

307.226

29
1981

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

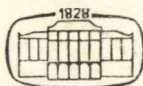
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

GÁSPÁR REZSŐ, KISS DEZSŐ, KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR
ÉS SZALAY SÁNDOR
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI
PÁL LÉNÁRD

XXIX. KÖTET

I. FÜZET



AKADÉMIAI KIADÓ
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST 1981

9

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klasszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10-10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóirattól évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelemben.

A kéziratok a következő címre küldendőek:

Turchányi György egyetemi tanár

Biofizikai Intézet

1444 Budapest VIII. Postafiók 263

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 90 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a KULTÚRA Külkereskedelmi Vállalat, 1389 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmi ismertetőt írjanak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közöljék. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írjanak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.

EXAFS: SZERKEZETVIZSGÁLAT A RÖNTGEN ABSZORPCIÓS ÉL KITERJEDT FINOMSZERKEZETE ALAPJÁN*

ZSOLDOS LEHEL

MTA Műszaki Fizikai Kutató Intézete, Budapest

A röntgen abszorpciós él nagyenergiájú oldalán a kondenzált anyagok fotoelektromos abszorpciós hatáskeresztmetszete az energia függvényében oszcillál. Ez az oszcilláció az abszorbeáló atom környezetétől függ, tehát a rövidtávú rendre vonatkozó információkat hordoz. Segítségével — függetlenül attól, hogy az anyag kristályos-e vagy sem — nemcsak az abszorbeáló atomok körüli szomszédok távolságát, hanem azok számát és fajtáját is meg lehet határozni. A dolgozat az alapfogalmak és a kísérleti elrendezések ismertetése után néhány példán mutatja be a módszer alkalmazási lehetőségeit.

BEVEZETÉS

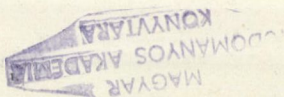
A röntgen spektroszkópia és diffrakció nyújtotta információk a legutóbbi időkig semmiféle átfedést nem mutattak. Az előbbi alapján véve energia nívók meghatározására és ezen keresztül kémiai analízisre alkalmas, az utóbbi pedig az atomok geometriai rendjének vizsgálatára. Az ugyan már régen ismert, hogy az abszorpciós élnek finom szerkezete van, amit kezdetben kizárólag az atomok kémiai állapotával hoztak kapcsolatba, de a széles körű vizsgálatokat csak az amorf anyagok szerkezete iránti fokozott érdeklődés és a nagy intenzitású röntgen sugárforrások egyidejű megjelenése indította el a 70-es évek első felében.

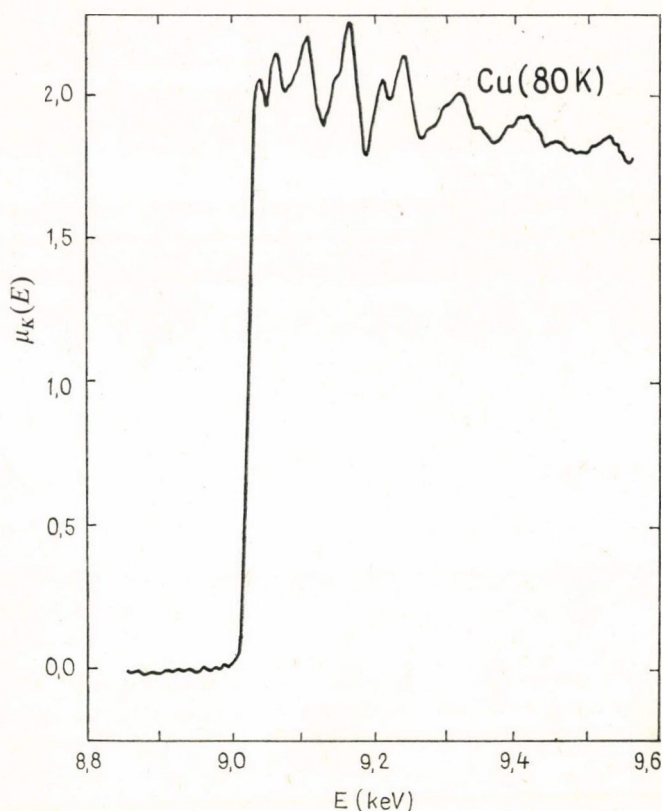
Hamarosan kiderült, hogy az abszorpciós él nagyenergiájú oldalán nem egyszer 1 keV-ra is kiterjedő oszcilláló finomszerkezet észlelhető (extended X-ray absorption fine structure, EXAFS), amely elsősorban a geometriai szerkezet függvénye (1. ábra).

Az EXAFS spektrum értelmezése

A néhányszor 10 keV-ig terjedő energia tartományban a sugárgyengülés döntő tényezője a fotoelektromos abszorpció, amelynek során a foton teljes energiáját elektronoknak adja át. Minket az az eset érdekel, amikor a folyamatban egy elektron vesz részt, és egy kezdeti mély nívóról (pl. a K héjról) kerül a folytonos végállapotba. Ehhez az kell, hogy a foton energiája elérje a két állapot közötti energiakülönbséget (ez a réz K héja esetén kb. 9 keV).

* Érkezett 1980. jan. 25.





1. ábra. A réz K-héjának abszorpciós együtthatója a foton energia függvényében (80 K hőmérsékleten) [5].

Szabad atomon történő fotoeffektusnál a végállapot a szabad elektron állapota lenne. Kondenzált rendszerekben azonban a környező atomok a hullámfüggvényt perturbálják. Közvetlenül az abszorpciós él közelében a kvantitatív leírás nehéz, de attól elég távol (kb. 50 eV-ra) az állapot már közel van a szabad elektronéhoz és úgy tekinthetjük, hogy a szabad elektron állapot hullámfüggvénye szóródik a környező atomokon és a végállapot a szabad elektron állapot és az egyszerűen szórt állapotok interferenciájának eredője. Az oszcilláló viselkedés onnan ered, hogy a fotoelektron energiájának, azaz hullámhosszának változásával változik a kimenő (szabad elektron) hullám és a visszaszórt hullámok fáziskülönbsége. Valójában tehát, ha sajátos formában is jelenik meg, szórási jelenségről van itt is szó.

A fentiek alapján nyilvánvaló az is, hogy az oszcilláció periódushossza a visszaszóró atomok távolságától, nagysága pedig azok számától és a szórt hullám amplitúdójától függ. A kölcsönhatás gyengesége miatt legtöbbször csak a közeli szomszédok hatásával kell számolni, továbbá a többszörös szórás is elhanyagolható.

Ilyen feltételek mellett, ha egy α típusú atom vizsgált átmenetéhez tartozó μ abszorpciós együttható lassan, monoton változó része μ_0 , akkor a $\chi = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}$ jelö-

léssel az elég távoli oszcilláló rész, a végállapot k hullámszáma függvényében, izotróp esetben a következőképpen írható fel [1, 2, 3]:

$$k\chi(k) = \sum_{\beta} \int_0^{\infty} p_{\alpha\beta}(r) \exp(-2r/\Lambda) t_{\beta}(k) \exp(-2\sigma_{\beta}^2 k^2) \sin 2(kr + \delta(r)) \frac{dr}{r^2}, \quad (1)$$

ahol $p_{\alpha\beta}(r)$ az α típusú atom körül a β típusú atomok radiális eloszlás függvénye (úgy definiálva, hogy $\int_0^{\infty} p_{\alpha\beta}(r) dr$ egyenlő legyen a β típusú atomok számával a mintában), $t_{\beta}(k)$ a β atomokról visszaszórt hullám amplitúdója, Λ az elektron szabad úthossza, σ_{β}^2 a β atomok termikus elmozdulásának négyzetes átlaga és $\delta_{\beta}(k)$ a β atomról szórt hullám fázis eltolódása. Az összegzés a gerjesztett atom körüli különböző féle atomokra terjesztendő ki.

Az exponenciális tényező a fotoelektron véges szabad úthossza és a hőmozgás miatt jelentkező lecsengést fejezi ki (az utóbbi azonos a diffrakciós vizsgálatokból jól ismert Debye—Waller tényezővel), a már említett oszcillációt pedig a szinuszos tényező hordozza.

Ha a gerjesztett atom körül N β atom van R_{β} távolságra, az integrálás elvégezhető [2] és

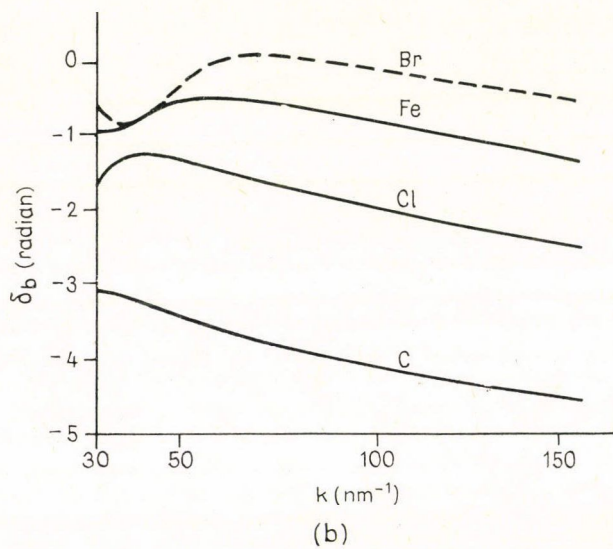
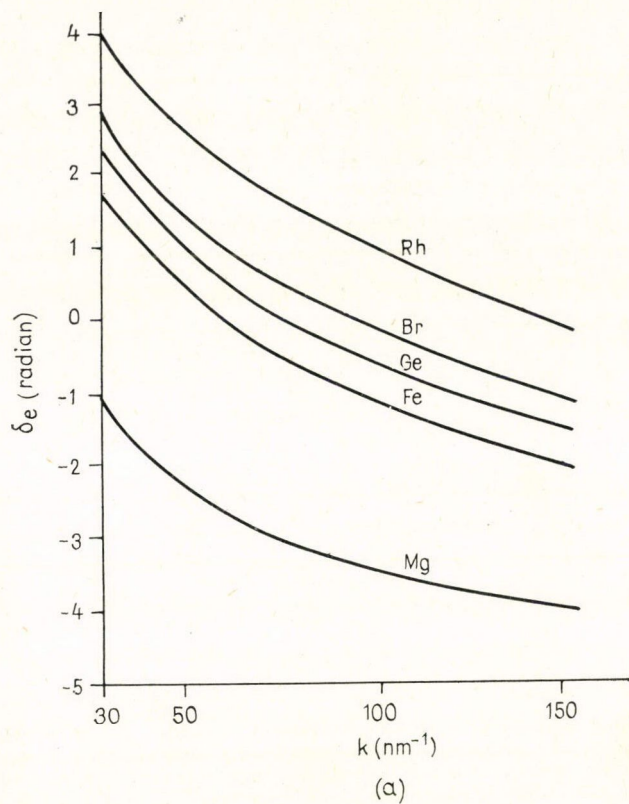
$$k\chi(k) = \sum_{\beta} \frac{N_{\beta}}{R_{\beta}^2} \exp(-2R_{\beta}/\Lambda) t_{\beta}(k) \exp(-2\sigma_{\beta}^2 k^2) \sin 2(kR_{\beta} + \delta(k)). \quad (2)$$

Ez a látszólag bonyolult kifejezés valójában igen egyszerű és segítségével az EXAFS spektrumokból egyértelmű szerkezeti információkat kapunk. Ismeretlen pl. a diffrakciós adatok értékelésénél oly sok gondot okozó fázis probléma. Ha δ_{β} állandó lenne, az oszcilláció periódushossza közvetlenül adná R_{β} -t (legalább is egyetlen környező atomfajta esetén).

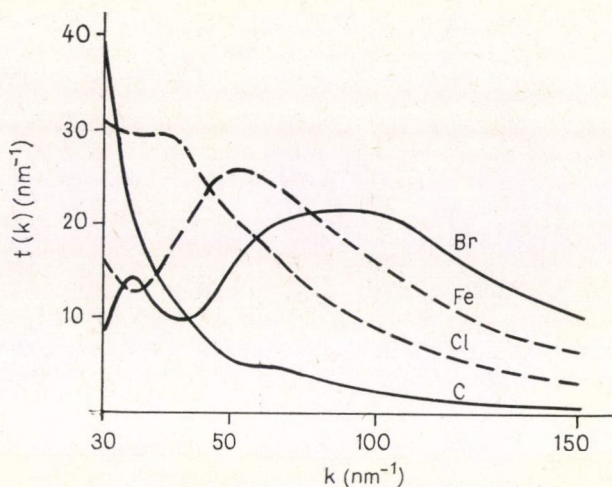
Valójában a δ_{β} fázisugrás k -val változik. Durva közelítésként ezt $\delta_{\beta} = \delta_0 + \delta_1 k$ alakúnak tekinthetjük és így a szinuszos tag frekvenciája $(R_{\beta} + \delta_1)$ -gyel lesz arányos. Mivel többnyire $\delta_1 < 0$, az EXAFS spektrumból közvetlenül adódó távolság a valódinál kisebb. Ennek kiküszöbölése legegyszerűbben úgy történhet, hogy ismert szerkezetű (pl. kristályos) mintán, amelyben a gerjesztett atom hasonló környezetben van, „hitelesítő mérést” végeznek.

A fázisugrást Lee és Beni [4] próbálta számítással meghatározni. Mind az emittáló, mind a visszaszóró atom hozzájárul ehhez (δ_e -vel ill. δ_b -vel és $\delta_{\beta} = \delta_e + \delta_b$) és általában feltételezik, hogy δ_{β} nem függ lényegesen a kémiai környezettől (2. ábra). A tapasztalat szerint ez a környezet csekély változása esetén igaz és vannak olyan esetek is, amikor a kémiai környezet gyökeres megváltozása sem eredményezett változást, de tudunk ellenpéldákról is.

Hasonló a helyzet a t_{β} amplitúdóval is, amely itt ugyanazt a szerepet tölti be, mint a diffrakciós szerkezetvizsgálatnál az f atom-szórási tényező. Itt azonban t_{β} egyrészt nem monoton függvénye k -nak, másrészt pedig nem nő olyan erőteljesen a rendszám növelésével, mint f (3. ábra) és a különböző atomok $t_{\beta}(k)$ görbéi nem is hasonlítanak egymáshoz. Ebből rögtön következik, hogy a gerjesztett atom környezetében esetleg meglevő nehéz atomok szerepe az EXAFS spektrumban nem domináló, és $t_{\beta}(k)$ rendszám — ill. k — függése lehetővé teszi az egyes atomfajták szerepének szétválasztását.



2. ábra. A δ_e és δ_b fázisugrások függése k -tól [2]



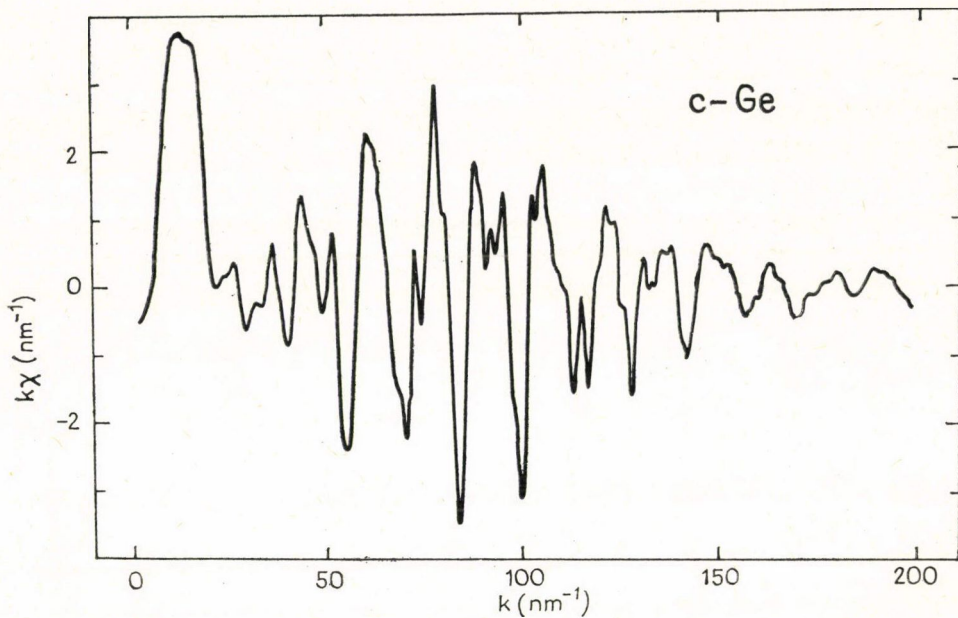
3. ábra. Néhány elem $t_p(k)$ visszaszórási együtthatója [2]

A spektrum kiértékelése

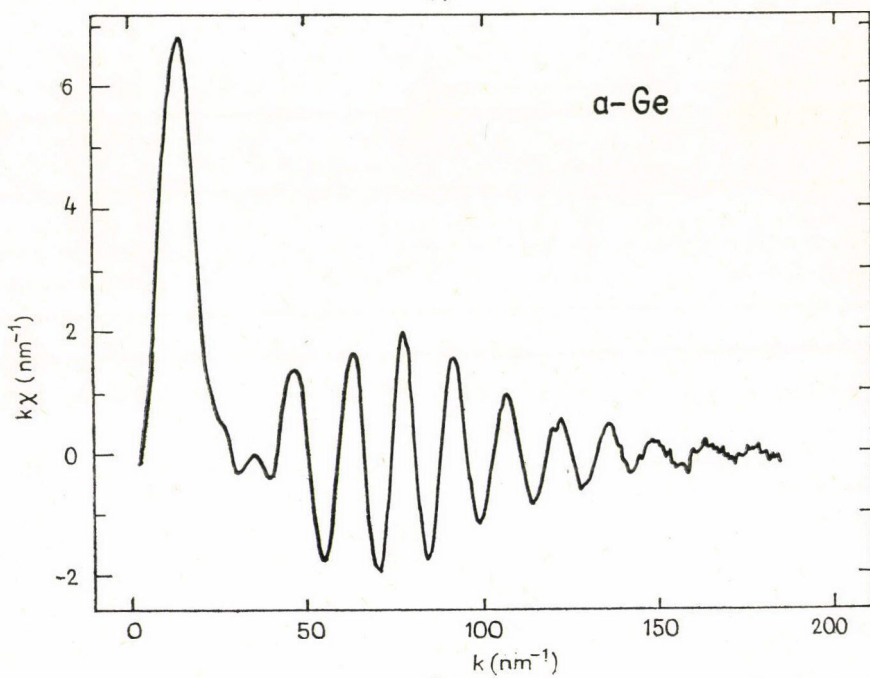
A kísérletileg mért μ_t abszorpció számottevő μ_h háttérrel is tartalmaz (pl. a lazábban kötött elektronok fotoeffektusa miatt). Ezért első lépésként az abszorpciós ϵ_l kisenergiájú oldalához $\mu_h = A + B(\omega)^c$ alakú háttér tagot illesztünk, és ennek megfelelően korrigáljuk az E_0 küszöb energia feletti részt is. A következő lépés μ_0 meghatározása. Ezt $(\hbar\omega - E_0)^2$ 4-ed vagy 6-od rendű polinomjaként lehet előállítani. Ez az EXAFS oszcillációkhoz képest lassan változik és a gerjesztési küszöb utáni erős csúcsot kihagyva, valamennyi mérési ponthoz illesztendő. Ennek levonása után marad meg az oszcilláló, szerkezetfüggő rész (4. ábra).

Látszólag egyszerű, de valójában néha komoly gond még a $k=0$ kezdőpont (a nulla energiájú vezetési elektron állapot) kijelölése, mert ez nem feltétlenül esik egybe az E_0 küszöbenergiájával [3]. A gyakorlatban az illesztés mégis az utóbbihoz történik, feltételezve, hogy $k = \sqrt{2m(\hbar\omega - E_0)}/\hbar$. Ez azonban hibákhoz vezethet, ha gyökeresen különböző rendszerek, pl. fémek és szigetelők spektrumait közvetlenül akarjuk összehasonlítani. A korrigált oszcilláló tag értékelése két módon történhet. Egyszerűbb szerkezeteknél alkalmas modellt keresünk. Az ebből számított EXAFS oszcillációt összehasonlítjuk a mérttel és szükség esetén a modellt finomítjuk. (Összehasonlítás a k térben.) Bonyolultabb rendszerekben azonban ez az eljárás aligha vezet célhoz.

Az r térben történő értelmezés közvetlenebb. Kézenfekvő, hogy ehhez (1) Fourier-transzformáltját kell előállítani. Minthogy a mérési tartomány véges és a gerjesztési küszöböt közvetlenül követő csúcs a leírt módon nem értelmezhető, kísérleti adatainkat egy $w(k)$ ablakfüggvénnyel kell súlyoznunk. (Ez a felesleges oszcillációk elkerülése érdekében egy négyszögfüggvény és egy Gauss-függvény konvolúciója.)



(a)



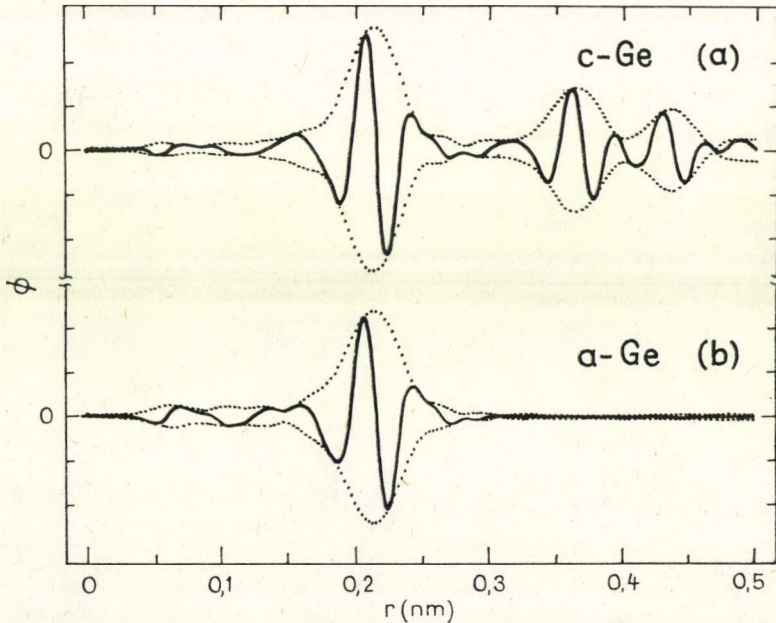
(b)

4. ábra. A K abszorpciós él EXAFS oszcillációja a fotoelektron k hullámszáma függvényében kristályos (a) és amorf (b) germániumnál [3]

A Fourier-transzformáció szerepének megértéséhez célszerű (1)-ben szétválasztani az r -től ill. k -től függő tényezőket. A szinusz függvény előtt szereplő tényezők az $\frac{1}{r^2}$ -es távolságfüggéssel és az exponenciális „lecsengéssel” súlyozott radiális eloszlásfüggvényt tartalmazzák (legyen ez az egész $f(r)$), a k -tól függő rész pedig — $w(k)$, a Debye hőmérsékleti tényező és $\delta_\beta(k)$ hatásától eltekintve — a $t_\beta(k)$ visszaszórási tényezővel azonos. Ez utóbbi tényezőket együttesen jelöljük $G_\beta(k)$ -val és Fourier-transzformáltját $g_\beta(r)$ -rel. Meg lehet mutatni, hogy az α elemen mért EXAFS oszcilláció $\Phi_\alpha(r)$ Fourier-transzformáltja, így lényegében f és g konvolúciója [3]

$$\Phi_\alpha(r) \sim \sum_\beta \int_0^\infty f(r') g_\beta(r-r') dr'. \quad (3)$$

$g_\beta(r)$ a β atomok valamilyen alakfüggvénye, tehát $\Phi_\alpha(r)$ végeredményben az atomok alakfüggvényével súlyozott radiális eloszlást adja meg, de mivel $G_\beta(k)$ csak $k > 0$ -ra van értelmezve $g_\beta(r)$ és vele együtt $\Phi_\alpha(r)$ is általában komplex. Az 5. ábrán a kristályos és amorf Ge $\Phi_\alpha(r)$ függvényét látjuk. Az origó közelében a gyenge oszcilláció μ_0 pontatlan meghatározásának eredménye. Egyébként a kristályos Ge-nál jól látszik az első három koordinációs héj hatása, az amorf Ge esetében azonban csak egyetlen csúcsot látunk, de ez mintegy 4×10^{-3} nm-rel szélesebb. A távolabbi csúcsok meg nem jelenése azt jelenti, hogy ezek az elsőhöz képest legalább további 0,02 nm-rel szélesebbek.



5. ábra. A 4. ábrán bemutatott EXAFS oszcillációk Fourier transzformáltja [3]. A pontozott vonal Φ abszolút értékét, a folytonos pedig valós részét jelöli. (Az ablakfüggvény 7 nm^{-1} szélességű Gauss-függvénnyel simított 39 nm^{-1} -től 142 nm^{-1} ig terjedő négyzetfüggvény)

A kiértékelést lényegesen megkönnyíti, hogy a hasonló kémiai összetételű (és állapotú), de szerkezetileg különböző rendszerek között csupán $p_{\alpha\beta}(r)$ -ben van különbség (feltételezve természetesen azt is, hogy μ_h és μ_0 meghatározása és az ablakfüggvény megválasztása is azonos módon történt), így alkalmas standard anyagot használva a Φ Fourier-transzformáltak összehasonlításával közvetlen információt kapunk.

Összehasonlítás a diffrakciós módszerekkel

Diffrakciós kísérletekben a szórt sugárzás intenzitása az összes párkorreláció függvénye, azaz a $\Phi_{\alpha}(r)$ transzformálttal egyenértékű Patterson-függvényben kettős összegzés van (α és β szerint egyaránt). Az EXAFS spektrum annyival egyszerűbb, hogy a gerjesztett atom és a szóró atom szerepe élesen különválik. Ez az egyszerűség, többkomponensű rendszerekben jelent igazán előnyt. Egy kétkomponensű rendszerben, pl. a diffrakciós adatok értelmezéséhez, három párkorrelációs függvényt kellene meghatározni és ehhez három független mérés kellene (más-más szórási tényezőkkel). Ha a vizsgált rendszer kristályos, az természetesen sokat segít, de az EXAFS módszer számára éppen azért, mert csak azokat a párokat érzi, amelyeknek egyike a gerjesztett atom, teljesen érdektelen, hogy a minta kristályos vagy amorf és kizárólag a rövidtávú rendre érzékeny. Ezért előszeretettel alkalmazzák amorf anyagok vizsgálatára, de jó szolgálatot tehet kristályok szerkezetének meghatározásánál is; pl. ha egy meghatározott atomfajta környezetéről akarunk adatokat kapni.

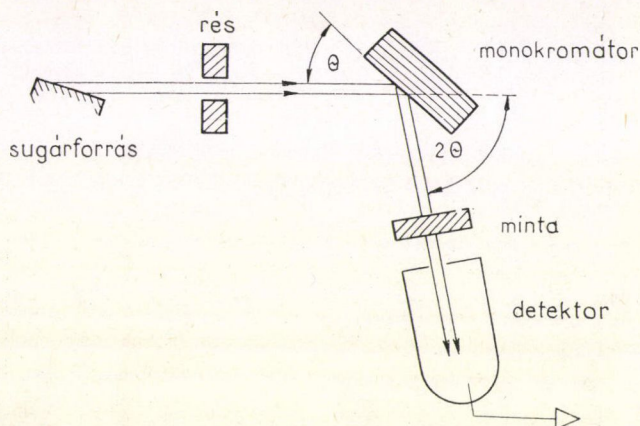
Az EXAFS mérést bármely, akár nem többségi összetevőn is elvégezhetjük. Ehhez csupán a röntgensugárzás hullámhosszát kell a vizsgálandó atom valamely abszorpciós élére hangolni, és ilyenkor a többségi összetevők nemcsak, hogy nem nyomják el a keresett információkat, de szerepük teljesen másodlagos is. (Pl. megnő a μ_h háttér, de ez csupán a megnövekvő mérési idő miatt jelent nehézséget.)

További lényeges különbség a diffrakciós mérésekhez képest, hogy más a reciprokterének (a k változónak) az a tartománya, amelyből az információkat begyűjtjük. Röntgen diffrakció esetében $\text{CuK}\alpha$ sugárzás mellett ez a tartomány $0\text{--}80\text{ nm}^{-1}$, EXAFS méréseknél viszont $30\text{--}150\text{ nm}^{-1}$, de az információk zöme az $50\text{--}130\text{ nm}^{-1}$ tartományba esik. A nagyobb k értékeknél megjelenő információ viszont rendkívül érzékeny a párkorreláció elmosódására, legyen az akár szerkezeti, akár hőmérsékleti eredetű. (Pl. $\sigma_{\beta} = 10^{-2}\text{ nm}$ esetén $k = 50\text{ nm}^{-1}$ -nél a hőmérsékleti tényező 0,88, de $k = 100\text{ nm}^{-1}$ -nél már 0,14. Még rosszabb a helyzet ennél erősebb elmosódásnál.) Az EXAFS jel tehát nagyon gyorsan eltűnik az eloszlás függvényének szélesedésével. Ez az oka annak is, hogy amorf anyagoknál a távolabbi koordinációs héjak már nem adnak csúcsot. Emlékeztetünk itt még arra, hogy a különböző atomok t_{β} visszaszórási amplitúdói éppen a kis k tartományokban ($30\text{--}80\text{ nm}^{-1}$) különböznek lényegesen egymástól, tehát ezek megkülönböztetéséhez különösen fontos az EXAFS spektrumnak ez a része.

Megjegyezzük még, hogy az abszorpciós él eltolódása, ill. az él közvetlen környezetének finomszerkezete alapján, a gerjesztett atom kötésiállapotára is következtethetünk.

Kísérleti módszerek

A legegyszerűbb mérési elrendezés vázlatát a 6. ábra mutatja. A rendszer por-diffraktométeren felépíthető. A porminta helyére kerülő monokromátor kristály forgatásával lehet a megfelelő hullámhosszat beállítani, miközben a minta a detektorral együtt úgy mozog, hogy a reflektált monokromatikus sugárzás mindig rá-essék. Természetesen minden hullámhossznál mérni kell a minta nélküli intenzitást is. Tudnunk kell azt, hogy az alapharmonikus mellett a kristály monokromátorról reflektált sugárzás mindig tartalmazza a $\lambda/2$, $\lambda/3$, ... felharmonikusokat is. Ezeket a számláló elektronika amplitúdó analízátorával küszöbölhetjük ki.



6. ábra. Az EXAFS mérés alapelrendezése

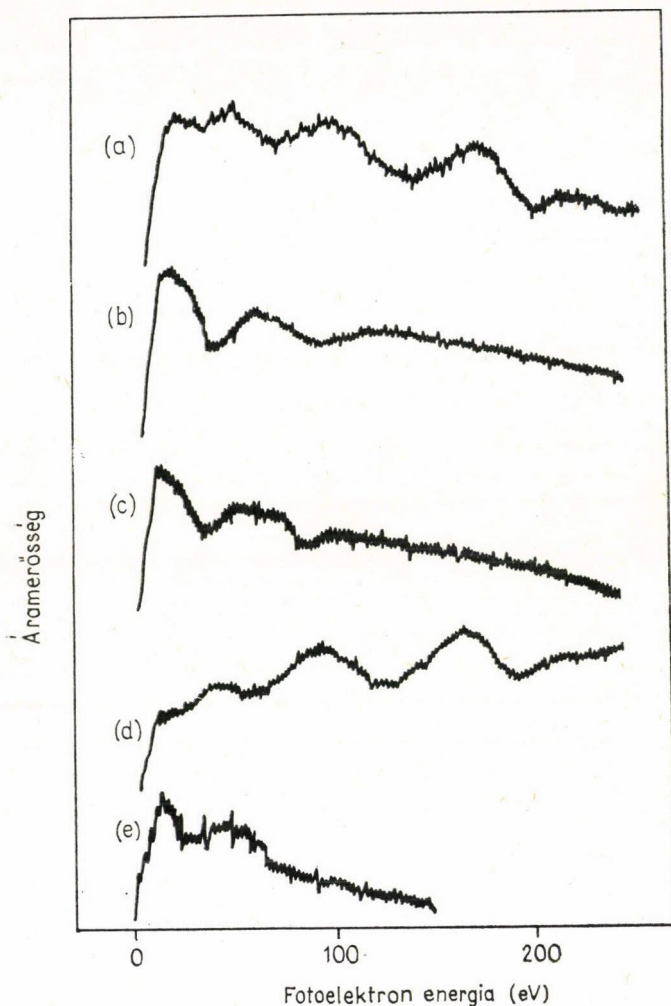
A mérés alapvető nehézsége abból ered, hogy a számunkra érdekes oszcilláció a viszonylag erős abszorpció kicsiny megváltozása, tehát μ_t -t igen pontosan kell mérnünk. Általában 1—1 pontban legalább 10^6 impulzust kell regisztrálni és a minta d vastagságát úgy érdemes megválasztani, hogy $1,5 < \mu d < 3$ legyen. Ez egyben azt is jelenti, hogy a minta nélküli állapotban mérendő impulzusszám $> 10^7$. A szokásos teljesítményű generátorok és monokromátor alkalmazásával így egy-egy mérés (pl. 500 pontban) 1—2 hetet vesz igénybe (1. táblázat).

1. TÁBLÁZAT

Különböző sugárforrások teljesítményének összehasonlítása [5]

Kísérleti rendszer	Mérhető intenz.	Min. koncentráció (20 h mérési időre)
1 kW-os generátor, sík monokromátor	$10^3 - 10^4 \text{ s}^{-1}$	elemek
1 kW-os generátor, hajlított monokromátor	10^6 s^{-1}	5 % Fe vízben
forgóanódos generátor, hajl. monokromátor	10^7 s^{-1}	1 % Fe vízben
tároló gyűrű, sík monokromátor	$> 10^8 \text{ s}^{-1}$	

A szinkrotron sugárzás felhasználása nagy előrelépést jelentett. Egyrészt a mérés ideje nagyságrendileg 10 percre csökkenthető, másrészt pedig a szinkrotron sugárzás spektruma igen széles és a hullámhossz függvényében elég sima. Ennek ellenére a klasszikus sugárforrások ilyen méréseknél jól alkalmazhatók, ha *hajlított kristályos monokromátor* használunk. *Knapp és munkatársai* [5] Johansson típusú hajlított kristályos Ge monokromátorral az intenzitást mintegy 200-szorosra növelték, még elfogadható, kb. 10^{-3} -as energia felbontás mellett, a 7,5–10,5 keV tartományban.



7. ábra. A detektor áram friss (a) és 300 °C-on oxidált (b) réz fotokatód esetén [7]. A mérés forgóanódos sugárforrással (20 kV, 100 mA) történt, egy-egy mintánál 12 percig mérve, a (c) görbe felvétele azonban 10 mA-rel történt. A (d) és (e) görbék üveg hordozóra leválasztott 100 nm-es és Al hordozóra leválasztott 3 nm-es réteg spektrumai

Ez azért figyelemre méltó, mert a sugárforrás — monokromátor és a monokromátor — detektor távolságokat, a mechanikai konstrukció egyszerűsége érdekében, az egész energiatarományban állandó értéken kell tartani. Ezt enyhén defókuszált, szimmetrikus geometriával érték el, a detektorrés és a sugárforrás távolságát kissé a fókuszáló körön kívül helyezve el.

A legtöbb esetben kedvezőbb, ha a primér és az áteresztett röntgensugárzás közvetlen mérése helyett a mintában elnyelt sugárzás által kiváltott másféle jelet (fluoreszcens sugárzás, fotoelektronok, stb.) mérünk. Ilyenkor ugyan a mért jel és μ között a kapcsolat némileg energiafüggő lehet, de az oszcilláló részt ez első közelítésben nem befolyásolja.

Ha a *vizsgálandó atomok koncentrációja kicsiny*, ezek abszorpciója a többi mellett ugyancsak csekély, és közvetlen abszorpció méréssel az EXAFS oszcilláció mérése reménytelen. Detektálhatjuk a gerjesztett atomok fluoreszcens sugárzását. A többi atom ehhez elvben nem ad járulékot, így a háttér igen alacsony szinten tartható. Szükség esetén itt is alkalmazhatunk elektronikus diszkriminálást.

Felületi rétegek (pl. adszorbeált atomok) EXAFS vizsgálatát végezhetjük el, ha az elnyelt sugárzás által kiváltott Auger-elektronok hozamát mérjük [2]. Ezek kilépési mélysége 1—2 nm, tehát az információt ilyen mély rétegből kapjuk. Ehhez a méréshez a mintát természetesen 10^{-7} Pa-nál nem rosszabb vákuumba kell helyezni. A nehézségeket fokozza, hogy az Auger-jel általában elég gyenge.

Vastagabb rétegek vizsgálatához Shevchik és Fischer [7] a teljes fotoelektron hozamot mérte úgy, hogy a minta egyben a detektorként használt, He-mal töltött ionizációs kamra fotokatódja volt és ezt a sugárzás sűrűlőve érte. A 7. ábra friss (a) és oxidált (b, c) réz felületek így kapott EXAFS spektrumát mutatja. A c görbe csupán annak demonstrálására szolgál, hogy kis teljesítményű sugárforrás használat mellett is lehet, rövid idő alatt, értékelhető spektrumot felvenni.

A módszer teljesítőképességére a *d* és *e* mérések jellemzők. Az előbbi 100 nm-es, üvegre felvitt réz rétegről, az utóbbi Al hordozón levő 3 nm-es réz rétegről készült. Látható az is, hogy az ilyen vékony réteg levegőn már szobahőmérsékleten teljesen oxidálódott.

Vastag, át nem világítható mintáknál a fotoelektron hozam külön detektorral való mérése ugyancsak jól használható. Említettük már, hogy a hőmozgás a nagyobb *k* értékekhez tartozó oszcillációkat erőteljesen csökkenti. Ezért a mérést érdemes alacsony hőmérsékleten (pl. cseppfolyós N_2 kriosztátban) tartott mintán elvégezni.

Az EXAFS oszcillációkhoz hasonló effektus jelentkezik az elektron energia-vesztési spektrumokban (EELS) az egyes elemek röntgen abszorpciós éleinek megfelelő veszteségi energiák felett [8, 9] is értelmezésük is hasonló. Az ilyen mérés, vékony mintákon, elektron energia spektrométerrel felszerelt transzmissziós elektron-mikroszkópban végezhető el, ha a spektrométer felbontóképessége nem rosszabb mint 1 eV, 100 keV körüli energiánál.

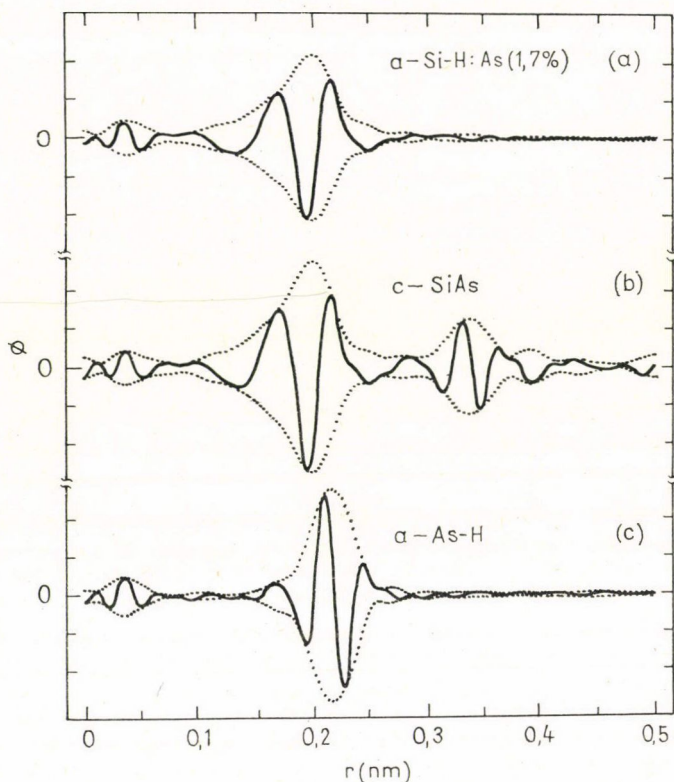
Az EXAFS módszer néhány alkalmazása

Az EXAFS vizsgálatok jelentős része amorf anyagokkal foglalkozik. Egy komponensű amorf szilárd anyagnál azonban nem számíthatunk több információra, mint a diffrakciós kísérleteknél. Az ilyen vizsgálatok inkább a módszer kipróbálásának tekinthetők. Alapvetően más a helyzet a két v. több komponensű üvegeknél.

Sayers és munkatársai GeO_2 üveget vizsgálva megállapították, hogy a GeO_4 tetraéderek, a hibahatáron belül, amorf állapotban is merev egységként viselkednek [10]. (A tetraéderek csúcsain ülő oxigének egy-egy szomszédos tetraéderhez is hozzátartoznak.) A hosszútávú rendezetlenség a tetraéderek kevésbé szabályos összekapcsolódásából ered. (A $\text{Ge}-\text{O}-\text{Ge}$ szög átlagosan $\pm 6,5^\circ$ -kal eltér az α -kvarcnál mérhető 130° -tól.)

Érdekes vizsgálatokat végeztek 800 K és 1050 K közötti hordozó hőmérsékleten előállított Nb_3Ge vékonyrétegeken [11]. A legmagasabb hőmérsékleten keletkezett rétegek β - W (A 15) szerkezetű kristályos szupravezetők $T_c = 21$ K-nel, a legalcsonyabbnál pedig amorfok $T_c = 3$ K-nel, de T_c legerősebb csökkenése 1000 és 1050 K között tapasztalható.

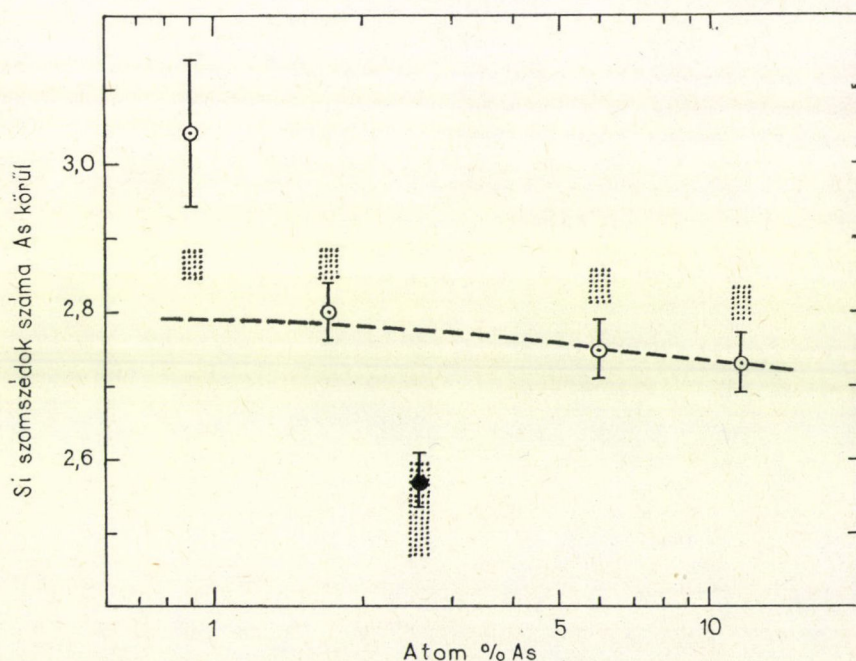
Az EXAFS vizsgálatok szerint az amorf $\text{Ge}-\text{Nb}$ távolság 0,266 nm, 0,021 nm-rel kisebb, mint kristályos állapotban, és a távolság csökkenés főként az 1000 K alatti hordozó hőmérsékletek esetén tapasztalható. T_c csökkenése tehát nincs közvetlen kapcsolatban a $\text{Ge}-\text{Nb}$ távolság csökkenésével.



8. ábra. Az As-K EXAFS oszcillációjának Φ Fourier transzformáltja az 1,7 at% As-t tartalmazó amorf Si-H ötvözetben (a), a kristályos SiAs-ben (b) és az amorf As-H-ben (c) [3]. (Az ablakfüggvény $37,5 \text{ nm}^{-1}$ -től $138,5 \text{ nm}^{-1}$ -ig terjedő négyzetfüggvény 7 nm^{-1} szélességű Gauss-függvénnyel simítva)

A $\text{Pd}_{78}\text{Ge}_{22}$ üvegben és a porlasztott $\text{Pd}_{30}\text{Ge}_{70}$ -ban a Ge atomoknak az EXAFS mérések [12] szerint Ge első szomszédja gyakorlatilag nincs (kémiai rendeződés) és $8,5 \pm 0,5$ Pd első szomszédja van $0,249$ nm-re, de e távolság szórása 10^{-2} nm-nél kisebb, mintha a Pd atomok a Ge körül egy gömb mentén helyezkednének el. Ez ellentétben van a Bernal-féle szerkezetmodellel. A bináris üvegek szerkezete tehát nem származtatható le a fém atomokból felépíthető amorf szerkezetből. A metalloidek jelenlétének fontos szerepe van.

Knights és munkatársai [13] az As adalékatomok környezetét vizsgálták amorf Si-H ötvözetekben (ez a potenciális alapanyaga a várhatóan olcsó vékonyréteg napelemeknek). Ez úton ugyanis eldönthető, hogy az As adalékanyag hatása ugyanúgy a 4-es koordinációban levő helyettesítő atom révén jut-e érvényre, mint a kristályos Si-ban. Összehasonlító anyagként kristályos SiAs-t és amorf As—H-t használtak (8. ábra). A vizsgálatokból kiderült, hogy nincs hosszútávú rend, tehát a félvezető tulajdonság nem magyarázható kvázi kristályossággal és az As-nak csak Si szomszédai vannak (mint ahogy előző példánkban sem volt Ge—Ge első szomszéd). A Si szomszédok átlagos száma általában jóval kisebb, mint négy (9. ábra), ami egyszerűen az ezeket helyettesítő H szomszédok jelenlétével függ össze. Kivételt képez a kis (< 1 at %) As koncentrációk esete, ahol az As—Si első szomszédok száma



9. ábra. Az As atomok körüli első szomszéd Si atomok száma az As koncentráció függvényében [3]. A sötét körrel jelzett mintában más a H koncentráció. (A pontok sorrendjében ez 13,2; 13,6; 34,6; 15,6 és 17,6 at%.) A pontozott oszlopok a H koncentráció alapján számított koordinációt jelölik, infravörös abszorpciós mérések alapján feltételezve, hogy valamennyi H kötött és, hogy minden As-hez kötött H eggyel csökkenti a Si szomszédok számát. (A H szomszéd nem ad EXAFS jelet)

lényegesen nagyobb annál (>3), mint amit a kötött hidrogén rendezetlen eloszlása alapján várni lehetne. Kis As koncentrációknál tehát az adalék As atomok jelentékeny része van tetraéderez Si környezetben, és érdekes módon a négyes koordináció megjelenésével egyidejűleg tapasztalható az elektromos vezetőképesség jelentékeny növekedése is.

Fontos szerepet játszhatnak az EXAFS vizsgálatok bonyolult, *szerves szerkezetek meghatározásánál*. Erre két példát említünk a metallo-proteinek köréből. A *vas-kén fehérje rubredoxin* molekulája egyetlen vas atomot tartalmaz. A röntgen szerkezetvizsgálat ennek az egyik kéntől való távolságát anómáisan kicsiny értékben adta meg. EXAFS mérések alapján [14, 15] bizonyosodott be, hogy ez hibás, amit az újabb diffrakciós vizsgálat megerősített.

A *hemeritrin*, amely molekulánként két vas atomot tartalmaz, némely tengeri állatnál ugyanazt a szerepet tölti be, mint az embernél a hemoglobin. Az Egyesült Államokban két kutató csoport, a vizsgálatot két különböző eredetű (Atlanti-óceáni és Csendes-óceáni állatból nyert) anyagon végezve, különböző szerkezetet állapított meg. Az EXAFS vizsgálatot mindkét anyagon elvégezve kiderült, hogy a szerkezetek azonosak [2].

A *felületek* vizsgálatának szép példája a grafiton megkötött Br_2 elhelyezkedésének vizsgálata [16]. A minták egymással párhuzamos lapos grafit szemcsékből álltak, nagy fajlagos felülettel, 0,2, 0,6 és 0,9 monoréteg Br_2 fedettséggel. Az anyagminta anizotrópiája lehetővé teszi nemcsak a kötéstávolságok, hanem a kötések irányának meghatározását is. Esetünkben ehhez a grafit bázissíkjára merőlegesen és azzal párhuzamosan polarizált röntgen sugárzással végezték a Br, K élének EXAFS vizsgálatát. (A polarizációra merőleges Br_2 molekula nem ad EXAFS jelet.) A spektrumban sikerült a Br és a C szomszédok hatását különválasztani. Kiderült, hogy kis Br_2 fedettség mellett a Br_2 molekulák egyik vége van a grafit réteg hatszöges helye felett kötve és a Br_2 molekula e pont körül elbillenhet. A Br—Br távolság 0,225 nm (alig kisebb a szabad Br_2 molekuláénál), de a hőmérsékleti oszcilláció elég nagy. Nagy fedettség esetén a Br_2 molekulák „lefeksznek” és a Br—Br távolság kissé, a Br—C távolság pedig jelentősen megnyúlik. A változás nyilvánvalóan a Br_2 — Br_2 kölcsönhatás eredménye.

Befejezésül néhány szót szólunk *katalizátorok* vizsgálatáról. Ezeknél a fő kérdés, hogyan kötődnek meg a gázok a felületen. *Lytle és munkatársai* [17] a szilícium-dioxidon diszpergált ruténiumot vizsgálták. Redukált állapotban oxigént nem találtak és minden Ru atomnak további 8 Ru szomszédja volt. Tekintve, hogy tömör anyagban a szomszédok száma 12 lenne, arra következtettek, hogy a Ru kétdimenziós „csomókat” alkot a felületen. Oxigén expozíció esetén az O_2 molekulák ugyanúgy kötődnek a háromszöges szimmetriájú pontokhoz, mint ahogy azt a grafit-bróm rendszerből láttuk.

Moraweck és munkatársai [18] Y-zeolitba beágyazott Pt katalizátort vizsgáltak, amelynek átlagos szemcsemérete 1,2 nm volt. Azt találták, hogy He expozíció után a Pt—Pt távolság a tömör anyagra jellemző 0,277 nm-ről 0,265 nm-re csökkent (az eloszlás egyidejű szélesedésével), majd a He-t 150 °C-on leszívattyúzva, H_2 expozíció után az átlagos távolság 0,274 nm-nek adódott. A heliumos környezetben tapasztalt kontrakció összhangban van azzal, amit ilyen kis szemcséknél várnak (az atomok 75%-a felületen van), de úgy látszik a H_2 kemiszorpció lehetővé teszi a Pt—Pt távolság relaxációját.

IRODALOM

1. *E. A. Stern*, *Phys. Rev. B10*, 3027, 1974.
2. *E. A. Stern*, *Contemp. Phys. 19*, 289, 1978.
3. *T. M. Hayes*, *J. Non-Cryst. Sol. 31*, 57, 1978.
4. *P. A. Lee and G. Beni*, *Phys. Rev. B15*, 2862, 1977.
5. *G. S. Knapp, Haydn Chen and T. E. Klippert*, *Rev. Sci. Instr. 49*, 1658, 1978.
6. *P. A. Lee*, *Phys. Rev. B13*, 5261, 1976.
7. *N. J. Shevchik and D. A. Fischer*, *Rev. Sci. Instr. 50*, 577, 1979.
8. *R. D. Leapman and V. E. Cosslett*, *J. Phys. D 9* L29, 1976.
9. *C. Colliex, V. E. Cosslett, R. D. Leapman and P. Trebbia*, *Ultramicroscopy 1*, 301, 1976.
10. *D. E. Sayers, E. A. Stern and F. W. Lytle*, *Phys. Rev. Lett. 35*, 584, 1975.
11. *C. S. Brown, L. R. Testardi, J. H. Wernick, A. B. Hallak and T. H. Geballe*, *Sol. State Commun. 23*, 875, 1977.
12. *T. M. Hayes, J. W. Allen, J. Tauc, B. C. Giessen and J. J. Hausser*, *Phys. Rev. Lett. 40*, 1282, 1978.
13. *J. C. Knights, T. M. Hayes and J. C. Mikkelsen, Jr.*, *Phys. Rev. Lett. 39*, 712, 1977.
14. *R. G. Shulman, P. Eisenberger, W. E. Blumberg and N. A. Stambaugh*, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA 72*, 4003, 1975.
15. *D. E. Sayers, E. A. Stern and J. Herriott*, *J. Chem. Phys. 64*, 427, 1976.
16. *E. A. Stern, D. E. Sayers, J. C. Dash, H. Shechter and B. Bunker*, *Phys. Rev. Lett. 38*, 767, 1977.
17. *F. W. Lytle, G. H. Via and J. H. Sinfelt*, *J. Chem. Phys. 67*, 3831, 1977.
18. *B. Moraweck, G. Clugnet and A. J. Rencuprez*, *Surface Sci. 81*, L631, 1979.

A ZEMPLÉN-TÉTEL*

SZABÓ JÁNOS

Nehézipari Műszaki Egyetem, Fizikai Tanszék, Miskolc

A tudományos kutatás módszeréről szóló írásokban, előadásokban gyakorta olvassuk, halljuk, a természettudományos oktatásban gyakran hangsúlyozzuk, hogy a tudomány módszere a logika: néhány univerzális állításból, axiómából kiindulva, logikus érveléssel új eredményeket vezetünk le. A néhány éve elhunyt *Lánczos Kornél* ezzel kapcsolatban a következőket írta [1]: „Az igaz, hogy a tudományos eredményeket rideg logikai alapon tanuljuk, de a logikus levezetés szerepét a tudományos felfedezésekben könnyű túlbecsülni... Tény, hogy még soha nem jutottak tudományos felfedezésre tisztán logikai alapon. A tudományos inspiráció fantáziadús, nem pedig logikai gondolkodáson alapul. Szükség van logikára a tudományos eredmények megállapítására és azok érvényességének a bebizonyításához, de nem a logika a legfontosabb a tudomány birodalmába való behatoláskor. Egy gépet meg lehet tanítani arra, hogy logikus műveleteket végezzen, de semmiféle gép nem lesz soha képes a legkisebb tudományos felfedezésre sem. Számomra nem látszik szerencsésnek, hogy tudományos képzésünkben oly sok időt szentelünk a logikus levezetéseknek ahelyett, hogy megmutatnánk a diákoknak a tudomány alapvető motivációit és képzelőerőt igénylő nézőpontjait.”

A tudományos kutatás gyakran kerülőkön, nem egyszer tévutakon át jut el a törvényszerűség, a tudományos igazság megismeréséhez. Robert Mayer, az energia-megmaradás törvényének egyik felismerője például úgy vélte, hogy a Napnak a sugárzás folytán elvesztett energiáját a behulló meteorok kinetikus energiája pótolja. Mayer felfogását eleinte támogatta Helmholtz is, és csak később, az ismert nehézségek felismerése után vetette fel Helmholtz azt a teóriát, hogy a Nap gravitációs összehúzódása révén szabadul fel a kisugárzáskor eltávozó energia. Noha a gravitációs kontrakció a csillagok fejlődésének egy kezdeti szakaszában lényeges szerepet játszik, később, — a csillag „idősebb korában”, — mint tudjuk, a magreakciók szolgáltatja energiához viszonyítva a gravitációs összehúzódáskor felszabaduló energia már elhanyagolhatóan kicsi.

Zemplén Győző a *Mathematische Annalen* 1906. évi 57. kötetének az 581. oldalán „Über die Kompatibilitätsbedingungen bei Unstetigkeiten in der Elektrodynamik” című dolgozatában a következőket írja:

„Im September 1905 hat E. Marx auf der Naturforschersammlung in Meran über seine Experimente berichtet, laut welchen sich Röntgenstrahlen mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen. Die obigen Resultate sind also mit diesem experimen-

* Érkezett 1980. május 15-én. Zemplén Győző születésének 100. évfordulója alkalmával rendezett emlékülésen tartott előadás.

tellen Resultat in Einklang, vorausgesetzt, dass die Röntgenstrahlung aus der Fortpflanzung irgend welcher Unstetigkeiten der elektromagnetischen Kräfte besteht."

Zemplén Győző tehát a röntgensugárzás mibenlétét abban látta, hogy a röntgensugárzás mentén elektromágneses szakadási felületek mozognak fénysebességgel. Noha Zemplén Győző ezen az úton, — mint tudjuk, — nem jutott, nem juthatott el a röntgensugarak természetének a felismeréséhez, az ilyen irányú, — nevezetesen a szakadási felületekre vonatkozó — elméleti vizsgálatai mind az elektrodinamikában, mind a hidrodinamikában, mind pedig — jóval később — a magnetohidrodinamikában alapvetőeknek bizonyultak.

Egyébként az elektromágneses potenciálokra felírt variációs elvből kiindulva Zemplén Győzőnek elsőként sikerült elméletileg leszámaztatnia azt az eredményt, hogy a röntgensugarak fénysebességgel terjednek. Erről Zemplén Győző a Matematikai és Fizikai Lapok 1907. évi kötetében a következőket írja:

„Ha bármely úton valamely felületen a potenciálok első differenciálhányadosainak szakadása következik be, a stacionárius működés elve alapján a szakadás mint elektromágneses hullám a fény terjedési sebességével terjed a térben tova. E hullámokon az elektromos tér erőssége *mindig transzverzális* szakadást szenved, míg a mágneses tér erősségének a szakadása merőleges az elektromos tér erősségének a szakadására, de *nem szükségképpen transzverzális*.

Természetes, hogy ily, részben transzverzális hullámoknak egészen más fizikai jelenségekben kell nyilvánulni, mint a tisztán transzverzális hullámoknak, és nincs kizárva, hogy a Röntgensugarak, melyeket eddig semmiféle ismert elektromágneses jelenségre nem lehetett visszavezetni, ily, részben transzverzális hullámokban lelik magyarázatukat. Eddig is megszoktuk, hogy a Röntgensugarakat elektromágneses *impulzusokkal*, vagyis *nem folytonos elektromágneses jelenségekkel* magyarázzuk; íme, szigorúan levezettük egy általános fizikai elvből azt, hogy ezen impulzusok — akár részben, akár tisztán transzverzálisak — a fénysebességgel terjednek tova; megemlítendő ezen eredménnyel kapcsolatban, hogy E. Marx az 1905. év szeptemberében a német orvosok és természetbúvárok meráni összejövetelén oly mérésekről számolt be, melyekkel kísérleti úton kimutatta, hogy a Röntgensugarak a fény sebességével terjednek tova."

A fiatal Zemplén Győző (alig múlt 26 éves) tehát igen közel jutott a röntgensugarak mibenlétének a megértéséhez. Nem kevésbé meglepő Zemplén Győző tárgyalásmódjának az egyszerűsége, gondolatmenetének kristálytisztá logikája. Az elektromágneses térre vonatkozó variációs elvet olyan — mondhatnánk: modern — formában fogalmazza meg, hogy az egy mai tankönyvbe változtatás nélkül átvehető. Érdemes idézni [2]:

„Induljunk ki a következő integrálból:

$$J^L = \int_0^1 dt \iiint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \omega \frac{H^2 - E^2}{8\pi} + \varrho_0 \left(\Phi - \frac{1}{c} [xA_x + yA_y + zA_z] \right) \right\} da db dc,$$

ahol \vec{E} az elektromos, \vec{H} a mágneses tér erőssége, Φ és \vec{A} az elektromágneses potenciálok, $\varrho_0 \equiv \varrho(a, b, c, 0)$ a térfogati elektromos töltéssűrűség kezdeti értéke, a, b , és c a Lagrange-féle változók és $\omega = \varrho_c / \varrho$. A stacionárius működés elve most már a következő alakban fogalmazható:

Az elektromos áramlás úgy megyen végbe, hogy a J^L integrál első variációja zérussal egyenlő, ha egyrészt a teret (Φ -t és \vec{A} -t mint x, y, z, t függvényeit) úgy

variáljuk, hogy a fenti egyenlet ki legyen elégítve, másrészt pedig variáljuk az áramlást magát (x -, y -, z -t mint a , b , c , t függvényeit). Az összes variációknak az integrál határain el kell tűnniök.

Látható, hogy ez nem közönséges variációprobléma, minthogy a Φ és \bar{A} variálandó függvények az x , y , z , t változóknak függvényei, melyek közül az x , y , z maguk is variálandók; itt tehát ismeretlen függvényeknek ugyancsak ismeretlen függvényei szerepelnek. A $\Phi(x, y, z, t)$, $A_x(x, y, z, t)$, $A_y(x, y, z, t)$, $A_z(x, y, z, t)$, $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ ismeretlen függvények meghatározására szolgáló összes egyenleteket megkapjuk akkor is, ha a J^L integrál összes megengedett variációi közül kiválasztunk két csoportot, és felállítjuk ama feltételeket, melyek mellett az egy-egy csoportba tartozó összes variációk eltűnnek.

I. csoport: Oly variációk, melyeknél az áramlás nem változik, az x , y , z -t tehát ismert függvényeknek tekintjük, és csak a teret variáljuk (Φ -t és \bar{A} -t mint x , y , z , t függvényeit).

II. csoport: Oly variációk, melyeknél csak az áramlást variáljuk (x -, y -, z -t mint a , b , c , t függvényét), a teret azonban változatlanak, Φ -t és \bar{A} -t adott függvényeknek tekintjük.

Feladatunk ilyenformán két közönséges variációproblémává esik szét, — vagy mondhatjuk, — az elv szétesik két elvvé, melyek közül az első a téregyenleteket, a másik a mozgásegyenleteket szolgáltatja.”

Az elektromágneses szakadási felületek problematikája még a közelmúltban is kutatás tárgyát képezte. Elegendő pl. *Györgyi G.*, *Marx Gy.* és *Nagy K.* ilyen témájú munkáira utalnunk [3], [4]. Az említett szerzők többek között azt vizsgálták, milyen az impulzuscsere az elektromágneses tér és a közegben tovahaladó szakadási felület között. A probléma, — mint ismeretes, — összefüggésben van a közegbeli elektromágneses energiimpulzustenzor sokszor és hosszú időn át vitatott Abraham-ill. Minkowski-féle alakjával.

A szakadási felületek tulajdonságainak Zemplén-féle analízise azonban első-sorban nem az elektrodinamikában, hanem más területen, nevezetesen a gázdinamikában vezetett igen fontos eredményre. Zemplén Győző ezt a munkáját a *Comptes rendus des séances de l'académie de Paris* című folyóirat 1905. évi kötetének az 1. oldalán „Sur l'impossibilité des ondes de choc négatives dans les gazes” címen, ill. az *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* című folyóirat IV/2. kötetében publikálta „Besondere Ausführungen über unstetige Bewegungen in Flüssigkeiten” címmel [5], [6].

Zemplén Győző a szakadási felületekkel 1904-ben kezdett foglalkozni göttingai tanulmányútja alkalmával. Érdeklődését a téma iránt *B. Riemann* egy dolgozata [7], ill. e dolgozat nyomán kialakult vita keltette fel. Riemann megvizsgálta, hogyan alakulnak ki a lökeshullámok a véges amplitúdójú hullámokból, de eredménye szerint a lökeshullámok — a tapasztalattal ellentétben — sűrítő és ritkító hullámok egyaránt lehetnek. H. Weber hívta fel a figyelmet arra, hogy a sűrűségugrás leírásához az energiamegmaradás törvényén kívül a hőtan második főtétele is figyelembe kell venni.

A problémára a 25 éves Zemplén Győző a párizsi akadémián tartott előadásában adta meg a véleges választ. Egzakt bizonyítást adott arra, hogy ritkító lökeshullámok nem lehetségesek, vagyis hogy az ideális folyadékban és gázban terjedő lökeshullámok csak kompressziós hullámok lehetnek. Ezt az eredményét *Zemplén-tétel* néven tartja számon a fizikai szakirodalom.

Idézzük a tétel Zemplén-féle megfogalmazását és fizikai indokolását [8]:

„Világos, hogy a gázokban csakis sűrítő lökeshullámok terjednek tova, míg ritkító lökeshullámok nem jöhetnek létre; hiszen láttuk, hogy a lökeshullámoknál a sűrűlódáshoz hasonló módon mozgási energia alakul át hővé, a ritkító lökésnél azonban az ellenkező folyamatnak kellene végbemenni; ez utóbbi azonban a termodinamika második főtétele értelmében lehetetlen... A sűrítő lökeshullám átvonulása növeli az egész gáz entrópiáját. Megfordítva: a ritkító lökeshullám éppen csökken-tené a gáz entrópiáját; ez azonban az említett második főtétel alapján lehetetlen”.

Zemplén Győző az 1905—1912 években tovább foglalkozott a gázdinamikai és az elektrodinamikai szakadási jelenségek elméletével. Megmutatta, hogy az a variációs elv, amelyből a folytonos áramlások hidrodinamikai alapegyenletei következnek, alkalmas arra is, hogy belőle a lökeshullámok egyenleteit lezárjazzassuk. [9], [10].

A Zemplén-tétel az utóbbi időben új megvilágítást és fontosságot kapott. Sikerült megmutatni, hogy a Zemplén-tétel magnetohidrodinamikai közegben haladó lökeshullámokra is érvényes [11], [12], [13], és hogy ezek a lökeshullámok fontos szerepet játszanak a Nap és a csillagok felületi jelenségeiben. *Abonyi Iván* [14] pedig a Zemplén-féle variációs módszer általánosításával lezárjazzatta a magnetohidrodinamikai lökeshullámok amplitúdóira az általános kompatibilitási feltételeket.

Nem véletlen az, hogy a nagy tudományos felismerések a tudomány fejlődésével újabb és újabb alkalmazásra találnak és így fontosságuk tovább növekszik. Így van ez a Zemplén-tétellel is. Zemplén Győző nevét méltán tartja számon a fizika története.

FÜGGELÉK

1. A hidrodinamikai Zemplén-tétel

A gázdinamikai Zemplén-tétel talán legegyszerűbb bizonyítása *N. J. Kocsin—I. A. Kibel—V. I. Roze*: Tyeoretyicseskaja gidromehanyika című könyvében található [15].

Tegyük fel, hogy az $f(x, y, z, t) = 0$ egyenlettel megadott S felületen a gázdinamikai paramétereknek legalább az egyike ugrásszerűen változik. Az S felületet erős szakadási felületnek (lökeshullámnak) nevezzük. A szakadási felületnek a vonatkoztatási rendszerhez viszonyított sebessége:

$$N = - \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{|\text{grad } f|}. \quad (1.1)$$

A szakadási felületnek a közeghez viszonyított sebessége nyilvánvalóan $\theta = N - v_n$, ahol v_n a közeg sebességének a vetülete az S felület normálisának az irányára. Az S felület normálisának az irányítását úgy választjuk meg, hogy

$$\theta = N - v_n < 0 \quad (1.2)$$

legyen. A v_n -nel együtt az S szakadási felületen a θ -nak is szakadása van. Azonban egyszerű megfontolással belátható, hogy θ -nak a szakadási felület két oldalán azonos

előjele van. Az $f(x, y, z, t) = 0$ egyenlettel megadott S felület két oldalán levő pontokban az $f(x, y, z, t)$ függvénynek ellentétes előjele van. Az S felületnek azt az oldalát választjuk pozitívnak, amerre a normális egységvektora mutat. A közeg áramlása közben folyadékreszek jutnak át az S felület negatív oldaláról a pozitívra.

Valamely $\Phi(x, y, z, t)$ hidrodinamikai mennyiségnek a szakadási felület pozitív oldaláról képezett határértékét Φ_+ -szal, a negatív oldali határértékét pedig Φ_- -szal jelöljük. A

$$[\Phi] = \Phi_+ - \Phi_- \quad (1.3)$$

mennyiséget a Φ gázdinamikai paraméter szakadásának mondjuk.

A gázdinamika alapegyenleteinek integrális alakjából az áramlási paraméterek szakadási amplitúdóira a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\varrho \theta [\vec{v}] = [p] \vec{n}, \quad (1.4)$$

$$[\varrho \theta] = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\varrho \theta}{2} [v^2] + c_v \varrho \theta [T] = [p \vec{v}] \vec{n}, \quad (1.6)$$

ahol ϱ a közeg tömegsűrűsége, c_v az állandó térfogaton vett fajhője, T az abszolút hőmérséklete, p a nyomása, \vec{v} az áramlási sebesség, \vec{n} pedig a szakadási felületnek a pozitív oldal felé mutató normális egységvektora.

A Zemplén-tétel kimondja, hogy csak olyan erős szakadási felületek lehetségesek, amelyekre

$$[v_n] < 0 \quad \text{és} \quad [\varrho] > 0. \quad (1.7)$$

A hőtan második főtétele szerint a zárt rendszer entrópiája, esetünkben tehát a p/ϱ^κ mennyiség nem csökkenhet (κ az adiabatikus kitevő). Ha az erős szakadási felület instacionárius, akkor tömeg áramlik át a felület negatív oldaláról a pozitívra. A második főtétele szerint tehát:

$$\left[\frac{p}{\varrho^\kappa} \right] > 0. \quad (1.8)$$

A szakadási amplitúdókra vonatkozó (1.4)–(1.6) egyenletekből kiindulva egyszerűen lezármasztatható az Hugoniot-féle görbe egyenlete:

$$\frac{p_+}{p_-} = \frac{(\kappa + 1) \frac{\varrho_+}{\varrho_-} - (\kappa - 1)}{(\kappa + 1) - (\kappa - 1) \frac{\varrho_+}{\varrho_-}}. \quad (1.9)$$

Ennek felhasználásával az entrópiásűrűség szakadása a következőképpen fejezhető ki:

$$\left[\frac{p}{\varrho^\kappa} \right] = \frac{p_-}{\varrho_+^\kappa} \left\{ \frac{(\kappa + 1) \frac{\varrho_+}{\varrho_-} - (\kappa - 1)}{(\kappa + 1) - (\kappa - 1) \frac{\varrho_+}{\varrho_-}} - \left(\frac{\varrho_+}{\varrho_-} \right)^\kappa \right\}. \quad (1.10)$$

A kapcsos zárójelben álló kifejezés előjele pozitív, ha $q_+/q_- > 1$, azaz $[q] > 0$, és negatív, ha $[q] < 0$. Mivel p és q csak pozitív lehet, ezért (1.10) szerint $[p/q^*]$ és $[q]$ azonos előjelűek, tehát $[q] > 0$.

A θ definíciója és (1.5) alapján viszont:

$$[v_n] = -[\theta] = \theta_- - \theta_+ = q_+ \theta_+ \frac{[q]}{q_+ q_-}. \quad (1.11)$$

Minthogy $\theta_+ < 0$ és $[q] > 0$, ezért:

$$[v_n] < 0 \quad \text{és} \quad [q] > 0. \quad (1.12)$$

Ez a gázdinamikai Zemplén-tétel.

2. A magnetohidrodinamikai Zemplén-tétel

A magnetohidrodinamika alapegyenleteinek az integrális alakjából a szakadási amplitúdókra a következő egyenletek adódnak [12]:

$$[H_n] = 0, \quad (2.1)$$

$$[\theta \vec{H}] + [\vec{v} H_n] = 0, \quad (2.2)$$

$$[q \theta \vec{v}] - \left[p + \frac{H^2}{8\pi} \right] \vec{n} + \frac{1}{4\pi} [H_n \vec{H}] = 0, \quad (2.3)$$

$$[q \theta] = 0, \quad (2.4)$$

$$\left[\theta \left(\frac{1}{2} q v^2 + \frac{p}{\kappa - 1} + \frac{H^2}{8\pi} \right) \right] - \left[\left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) v_n \right] + \left[\frac{\vec{v} \vec{H}}{4\pi} H_n \right] = 0, \quad (2.5)$$

ahol \vec{H} a mágneses térerősség.

Ha $\theta \neq 0$, vagyis ha a szakadási felület mozog a plazmához képest, akkor $\theta < 0$ miatt plazmarészek jutnak át a szakadási felület negatív oldaláról a pozitívra. A hőtan második főtétele szerint tehát:

$$\left[\frac{p}{q^*} \right] > 0. \quad (2.6)$$

A szakadási amplitúdókra vonatkozó (2.1)–(2.5) egyenletekből:

$$\left[\frac{p}{q^*} \right] = \frac{p_-}{q_+^*} \left\{ \frac{(\kappa + 1)x - (\kappa - 1)}{(\kappa + 1) - (\kappa - 1)x} - x^* + G \frac{x - 1}{(\kappa + 1) - (\kappa - 1)x} \right\}, \quad (2.7)$$

ahol

$$x = \frac{q_+}{q_-} \quad \text{és} \quad G = \frac{\kappa - 1}{8\pi} [\vec{H}]^2. \quad (2.8)$$

Elemi függvényvizsgálattal belátható, hogy a kapcsos zárójelben álló kifejezés előjele csak akkor pozitív, ha $x > 1$, azaz $[q] > 0$. Vagyis a magnetohidrodinamikai lökéshullámok is kompressziós hullámok. Az (1.11) formulából most is következik, hogy $[v_n] < 0$.

3. A Zemplén-tétel CGL-plazmára

Erős mágneses térben áramló plazmában a nyomáseloszlás anizotróp: a térrel párhuzamos és a rá merőleges irányban különböző. A nyomáseloszlást — lamináris áramlás esetén — jól írja le a Chew—Goldberger—Law-féle formula:

$$p_{ik} = \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{H^2} H_i H_k + p_{\perp} \delta_{ik},$$

ahol p_{\parallel} a térrel párhuzamos, p_{\perp} pedig a rá merőleges irányban uralkodó nyomás, δ_{ik} pedig a Kronecker-féle szimbólum.

Dobróka Mihály [16] bizonyította be először, hogy a Zemplén-tétel az ilyen, ún. CGL-plazmára is érvényes. Nevezetesen CGL-plazmában is csak olyan erős szakadási felületek létezhetnek, amelyekre $[v_n] < 0$, $[q] > 0$, és a két (p_{\parallel} és p_{\perp}) nyomás közül legalább az egyik nagyobb a szakadási felület pozitív oldalán, mint a negatívon.

IRODALOM

1. *Lánczos K.*, Fizikai Szemle, 23, 225, 1973.
2. *Zemplén Gy.*, Math. és Phys. Lapok, 15, 1906.
3. *G. Marx—G. Györgyi*, Acta Phys. Hung., 3, 213, 1954.
4. *G. Marx—K. Nagy*, Acta Phys. Hung., 4, 297, 1955.
5. *G. Zemplén*, Compt. Rendus, 141, 710, 1905.
6. *G. Zemplén*, Encyklopädie der math. Wiss., Bd. 2., 282, 1905.
7. *B. Riemann*, Göttinger Abhandlungen (Math. Kl.), 8, 43, 1860.
8. *Zemplén Gy.*, Math. és Phys. Lapok, 14, 361, 1905.
9. *G. Zemplén*, Math. Annalen, 61, 437, 1906.
10. *G. Zemplén*, Phys. Zeitschrift, 13, 498, 1912.
11. *R. V. Polovin, C. Ja. Ljubarszkij*, DAN, 121, No. 4, 1958.
12. *Szabó J.*, Magyar Fiz. Folyóirat, 9, 35, 1961.
13. *J. Szabó*, Acta Phys. Hung., 17, 75, 1964.
14. *I. Abonyi*, Acta Phys. Hung., 44, 157, 1978.
15. *N. J. Kocsin—I. A. Kibel—V. I. Roze*: Tyeoretyicseskaja gidromehanyika, Tom 2, pp. 19—22, Izd. Tyehny.-Tyeor. Lity., Moszkva, 1948.
16. *M. Dobróka*, Acta Phys. Hung., 41, 195, 1976.

INTERNATIONAL UNION OF
PURE AND APPLIED PHYSICS

—
S.U.N. COMMISSION

UNION INTERNATIONALE DE
PHYSIQUE PURE ET APPLIQUÉE

—
COMMISSION S.U.N.

SYMBOLS, UNITS AND NOMENCLATURE IN PHYSICS

Document U.I.P. 20
(1978)

Report published
with the financial support
of the UNESCO

Publication faite
avec l'appui financier
de l'UNESCO

INTRODUCTION

The recommendations in this document, composed by the Commission for Symbols, Units and Nomenclature (S.U.N. Commission) of the International Union of Pure and Applied Physics (I.U.P.A.P.), have been approved by the successive General Assemblies of the I.U.P.A.P., held from 1948 until 1975.

This document replaces the document: U.I.P.11 (S.U.N. 65—3) 1965, in which the previous recommendations of the S.U.N. Commission were presented.

The recommendations contained in this document are in general in agreement with recommendations of the following international organizations:

- (1) International Organization for Standardization, Technical Committee I.S.O./T.C. 12;
- (2) General Conference on Weights and Measures (1948—1975);
- (3) International Union of Pure and Applied Chemistry;
- (4) International Electrotechnical Commission, Technical Committees: I.E.C./T.C. 25;
- (5) International Commission on Illumination.

Les recommandations dans ce document, composé par la Commission de Symboles, Unités et Nomenclature (Commission S.U.N.) de l'Union Internationale de Physique Pure et Appliquée (U.I.P.P.A.), ont été approuvées par les Assemblées Générales successives de l'U.I.P.P.A., tenues de 1948 jusqu'à 1975.

Ce document remplace le document: U.I.P.11 (S.U.N. 65—3) 1965, dans lequel les recommandations précédentes de la Commission S.U.N. étaient présentées.

Les recommandations contenues dans ce document s'accordent en général avec des recommandations des organisations internationales suivantes:

- (1) Organisation Internationale de Normalisation, Comité Technique I.S.O./T.C. 12;
- (2) Conférence Générale des Poids et Mesures (1948—1975);
- (3) Union Internationale de Chimie Pure et Appliquée;
- (4) Commission Electrotechnique Internationale, Comités d'Études: C.E.I./C.T. 25;
- (5) Commission Internationale de l'Eclairage.

Secretary general

International Union of
Pure and Applied Physics:

Professor L. KERWIN

Bureau du Recteur, Université Laval,
QUEBEC, CANADA G1K 7P4

Secretary

Commission for Symbols,
Units and Nomenclature:

Professor L. VILLENA

Avenida de la Habana 147,
MADRID, 33, SPAIN

Secrétaire général

Union Internationale de
Physique Pure et Appliquée:

Secrétaire

Commission des Symboles,
Unités et Nomenclature:

CONTENTS

1. <i>Physical quantities—General recommendations</i>	31
1.1. Physical quantities	31
1.2. Symbols for physical quantities—General rules	31
1.3. Simple mathematical operations	32
2. <i>Units—General recommendations</i>	33
2.1. Symbols for units—General rules	33
2.2. Prefixes—General rules	34
2.3. Mathematical operations	34
3. <i>Numbers</i>	35
4. <i>Symbols for chemical elements, nuclides, and particles</i>	35
5. <i>Quantum states</i>	36
5.1. General rules	36
5.2. Atomic spectroscopy	37
5.3. Molecular spectroscopy	37
5.4. Nuclear spectroscopy	38
5.5. Spectroscopic transitions	38
6. <i>Nomenclature</i>	39
7. <i>Recommended symbols for physical quantities</i>	41
7.1. Space and time	41
7.2. Mechanics	42
7.3. Molecular physics	43
7.4. Thermodynamics	44
7.5. Electricity and magnetism	45
7.6. Radiation, light	46
7.7. Acoustics	47
7.8. Quantum mechanics	48
7.9. Atomic and nuclear physics	48
7.10. Solid state physics	50
7.11. Molecular spectroscopy	53
7.12. Chemical physics	55
7.13. Plasma physics	56
7.14. Dimensionless parameters	58

8. <i>Recommended mathematical symbols</i>	59
8.1. General symbols	59
8.2. Letter symbols	60
8.3. Circular and hyperbolic functions	61
8.4. Complex quantities	61
8.5. Symbols for special values of periodic quantities	62
8.6. Vector calculus	62
8.7. Matrix calculus	63
8.8. Theory of sets	63
8.9. Symbolic logic	64
9. <i>International symbols for units</i>	64
9.1. Unit system	64
9.2. The International System of Units (SI)	65
9.3. The centimetre-gram-second system (CGS system)	69
9.4. Other units of special interest in physics, which are neither SI nor CGS units	71
<i>Appendix I. Systems of quantities and units in electricity and magnetism</i>	72
1. Systems of equations with 3 base quantities	74
2. Systems of equations with 4 base quantities	75
3. Relations between quantities in different systems of equations	75
4. The CGS systems of units	76
<i>Appendix II. Fundamental physical constants</i>	77

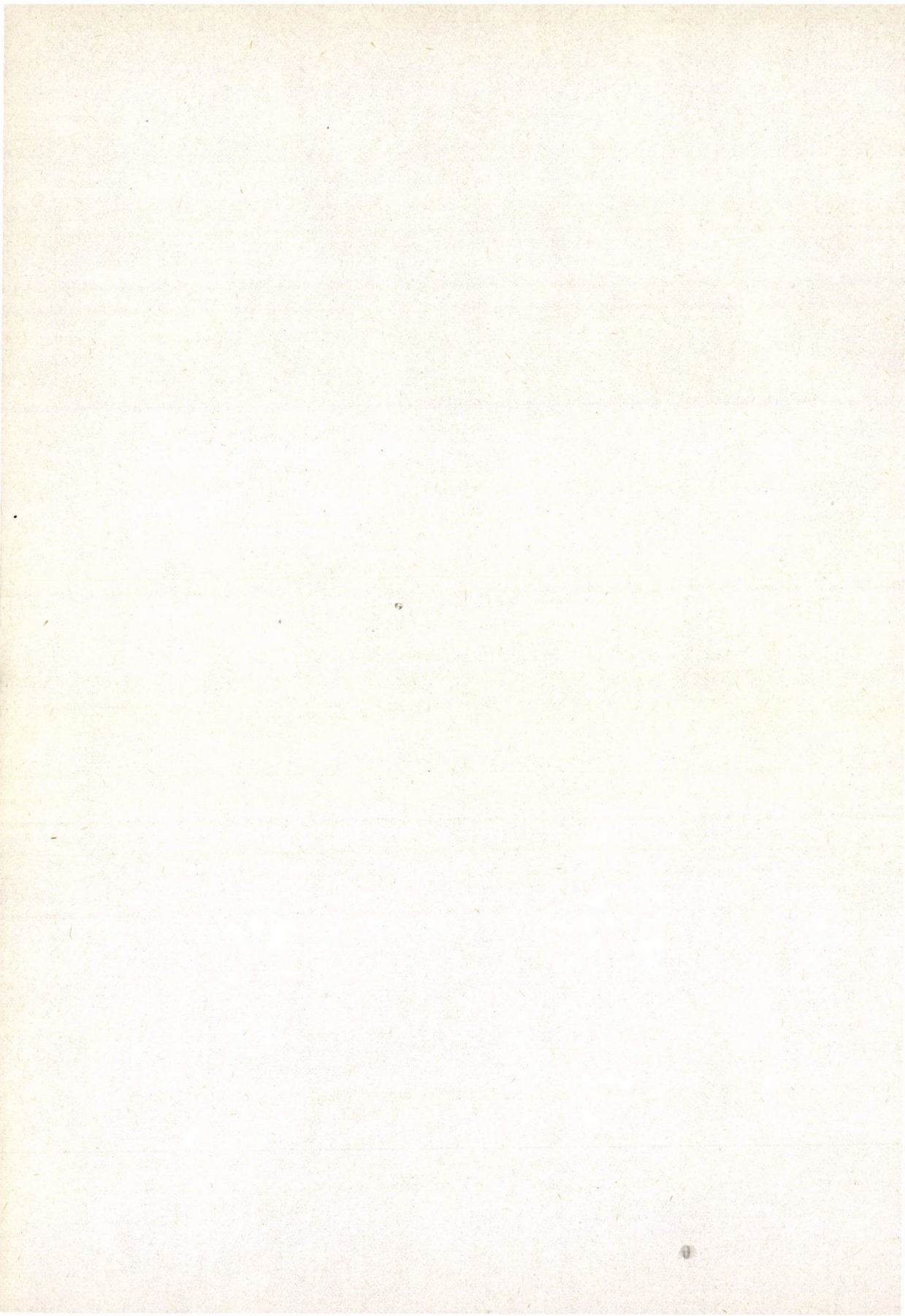
PREFACE

The manuscript for this new version of the S.U.N. document was completed by Professor Ulrich Stille a few months before his death in 1975. As president of the S.U.N. Commission he stimulated the commission in the revision of the previous document which dated from 1965.

Three sections on solid state physics, plasma physics and dimensionless parameters have been added to chapter 7 and two sections on theory of sets and symbolic logic to chapter 8. The chapter 9 on unit systems has been completely revised. The appendix II has been renewed and includes the latest 1973-data for physical constants recommended by CODATA.

April 1977

J. de Boer
(Acting President, S.U.N. Commission)



1. PHYSICAL QUANTITIES—GENERAL RECOMMENDATIONS†)

Note: The German, Italian, Russian, and Spanish translations of this term are 'physikalische Größe', 'grandezza fisica', 'ФИЗИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА', and 'magnitud fisica', respectively.

1.1. Physical quantities

A physical quantity (French: 'grandeur physique') is equivalent to the product of the *numerical value*, i.e. a pure number, and a *unit*:

$$\text{physical quantity} = \text{numerical value} \times \text{unit}.$$

For a physical quantity with symbol a this relation is usually represented in the form $a = \{a\} \cdot [a]$, where $\{a\}$ stands for the numerical value and $[a]$ stands for the symbol for the unit. For dimensionless physical quantities the unit often has no name or symbol and is not explicitly indicated (see section 9.1 "unit systems").

Examples:

$$E = 200 \text{ J} \quad n = 1,55 \quad (\text{for quartz})$$
$$F = 27 \text{ N} \quad \nu = 3 \times 10^8 \text{ Hz}.$$

1.2. Symbols for physical quantities—General rules

1. *Symbols for physical quantities* should be *single letters* of the Latin or Greek alphabet with or without modifying signs: subscripts, superscripts, primes, etc.

Remarks:

- (a) An exception to this rule is given by the two-letter symbols which are used to represent dimensionless combinations of physical quantities (see section 7.14 "dimensionless parameters"). If such a symbol, composed of two letters, appears as a factor in a product, it is recommended to separate this symbol from the other symbols by a dot or by a space or by brackets. It can be raised to a positive or negative power without using brackets.

†) For further details see International Standard I.S.O. 31/0: *General principles concerning quantities, units and symbols*.

- (b) Abbreviations, i.e. shortened forms of names or expressions, such as p.f. for partition function, should not be used in physical equations. These abbreviations in the text should be written in ordinary roman type.

2. *Symbols for physical quantities* should be printed in *italic* (or *sloping*) type.

Remark: It is recommended to consider as a guiding principle for the printing of indices the criterion: only indices which are symbols for physical quantities should be printed in italic (sloping) type.

Examples:

upright indices	sloping indices
C_g (g=gas)	p in C_p
g_n (n=normal)	n in $\sum_n a_n \psi_n$
μ_r (r=relative)	x in $\sum_x a_x b_x$
E_k (k=kinetic)	i, k in g_{ik}
χ_e (e=electric)	x in p_x

3. *Symbols for vectors and tensors*

To avoid the usage of subscripts it is often convenient to indicate vectors and tensors of the second rank by letters of a special type. The following choice is recommended:

- (a) Vectors should be printed in bold italic (sloping) type, e.g. ***A***, ***a***.
 (b) Tensors of the second rank should be printed in bold sans serif italic (sloping) type, e.g. ***S***, ***T***.

Remark: When such type is not available, a vector may be indicated by an arrow and a tensor by a double arrow above the symbol; e.g. \vec{A} , $\vec{\vec{S}}$.

1.3. Simple mathematical operations

1. *Addition and subtraction* of two physical quantities are indicated by:

$$a+b \quad \text{and} \quad a-b.$$

2. *Multiplication* of two physical quantities may be indicated in one of the following ways:

$$ab \quad a \cdot b \quad a \times b.$$

3. *Division* of one quantity by another quantity may be indicated in one of the following ways:

$$\frac{a}{b} \quad a/b \quad ab^{-1}$$

or in any other way of writing the product of a and b^{-1} .

These procedures can be extended to cases where one of the quantities or both are themselves products, quotients, sums or differences of other quantities. If necessary, brackets have to be used in accordance with the rules of mathematics. If the solidus is used to separate the numerator from the denominator and if there is any doubt where the numerator starts or where the denominator ends, brackets should be used.

Examples:

expressions with a horizontal bar	same expressions with a solidus
$\frac{a}{bcd}$	a/bcd
$\frac{2}{9} \sin kx$	$(2/9) \sin kx$
$\frac{a}{b} - c$	$a/b - c$
$\frac{a}{b - c}$	$a/(b - c)$
$\frac{a - b}{c - d}$	$(a - b)/(c - d)$
$\frac{a}{c} - \frac{b}{d}$	$a/c - b/d$

Remark: It is recommended that in expressions like:

$$\left[\begin{array}{ll} \sin \{2\pi(x - x_0)/\lambda\} & \exp \{(r - r_0)/\sigma\} \\ \exp \{-V(r)/kT\} & \sqrt{\epsilon/c^2} \end{array} \right]$$

the argument should always be placed between brackets, except when the argument is a simple product of two quantities: e.g. $\sin kx$. When the horizontal bar above the square root is used no brackets are needed.

2. UNITS—GENERAL RECOMMENDATIONS

2.1. Symbols for units—General rules

1. *Symbols for units* of physical quantities should be printed in *roman (upright) type*.
2. *Symbols for units* should not contain a full stop (period) and should remain unaltered in the plural, e.g.: 7 cm and *not* 7 cms.
3. *Symbols for units* should be printed in *lower case roman (upright) type*. However, the symbol for a unit, derived from a proper name, should start with a capital roman letter, e.g.: m (metre); A (ampere); Wb (weber); Hz (hertz).

2.2. Prefixes—General rules

1. The *prefixes* which should be used to indicate decimal multiples or submultiples of a unit are given in table 1.

TABLE 1

deci; <i>déci</i>	(=10 ⁻¹)	d	deca; <i>déca</i>	(=10 ¹)	da
centi; <i>centi</i>	(=10 ⁻²)	c	hecto; <i>hecto</i>	(=10 ²)	h
milli; <i>milli</i>	(=10 ⁻³)	m	kilo; <i>kilo</i>	(=10 ³)	k
micro; <i>micro</i>	(=10 ⁻⁶)	μ	mega; <i>méga</i>	(=10 ⁶)	M
nano; <i>nano</i>	(=10 ⁻⁹)	n	giga; <i>giga</i>	(=10 ⁹)	G
pico; <i>pico</i>	(=10 ⁻¹²)	p	tera; <i>téra</i>	(=10 ¹²)	T
femto; <i>femto</i>	(=10 ⁻¹⁵)	f	peta; <i>peta</i>	(=10 ¹⁵)	P
atto; <i>atto</i>	(=10 ⁻¹⁸)	a	exa; <i>exa</i>	(=10 ¹⁸)	E

2. *Compound prefixes*, formed by juxtaposition of two or more prefixes, are not to be used.

<i>Not:</i> mμs,	<i>but:</i> ns (nanosecond)
<i>Not:</i> kWμ,	<i>but:</i> GW (gigawatt)
<i>Not:</i> μμF,	<i>but:</i> pF (picofarad)

3. When the symbol of a prefix is placed before the symbol of a unit, the *combination of the two symbols* should be considered as *one new symbol*, which can be raised to a positive or negative power without using brackets.

Examples: cm³ mA² μs⁻¹.

Remark:

cm³ means always (0,01 m)³ but never 0,01 m³

μs⁻¹ means always (10⁻⁶ s)⁻¹ but never 10⁻⁶ s⁻¹.

2.3. Mathematical operations

1. *Multiplication* of two units may be indicated in one of the following ways:

Nm N·m.

2. *Division* of one unit by another unit may be indicated in one of the following ways:

$\frac{m}{s}$ m/s ms⁻¹

or by any other way of writing the product of m and s⁻¹.
Not more than one solidus should be used.

Examples:

<i>Not:</i> cm/s/s,	<i>but:</i> cm/s ² =cm s ⁻²
<i>Not:</i> J/K/mol,	<i>but:</i> J/K mol=JK ⁻¹ mol ⁻¹

3. NUMBERS

1. *Numbers* should be printed in *upright type*.
2. The *decimal* sign is a comma on the line (,). In documents in the English language a comma or a dot on the line (.) may be used.
If the magnitude of the number is less than unity, the decimal sign should be preceded by a zero.
3. The sign for *multiplication* of numbers is a cross (\times) or a dot half-high (\cdot). If a dot is used as a decimal sign, a dot should not be used as the multiplication sign.

Example: 2.3×3.4 or $2,3 \cdot 3,4$.

4. *Division* of one number by another number may be indicated in the following ways:

$$\frac{136}{273,15} \quad 136/273,15$$

or by writing it as the product of numerator and the inverse first power of the denominator. In such cases the number under the inverse power should always be placed between brackets.

Remark: When the solidus is used and when there is any doubt where the numerator starts or the denominator ends, brackets should be used, as in the case of quantities (see section 1.3).

5. To facilitate the reading of *large numbers*, the digits may be grouped in *groups of three*, but *no* comma or point should be used except for the decimal sign.

Example: 2 573,421 736.

4. SYMBOLS FOR CHEMICAL ELEMENTS, NUCLIDES, AND PARTICLES

1. *Symbols for chemical elements* should be written in *roman (upright) type*. The symbol is not followed by a full stop.

Examples: Ca C H He.

2. The *nucleon number (mass number)* of a *nuclide* is shown as a left superscript (e.g. ^{14}N).
3. The right subscript position is used to indicate the *number of atoms* of a nuclide in a molecule (e.g. $^{14}\text{N}_2$).
4. The right superscript position should be used, if required, for indicating a *state of ionization* (e.g. Ca^{2+} , PO_4^{3-}) or an *excited state* (e.g. $^{110}\text{Ag}^m$, He^*).

5. The attached numeral specifying the *spectrum of a z-fold ionized atom* is the roman number $z+1$.

Examples: CaII, AlIII, HI (spectrum of the *neutral* hydrogen atom).

Remark: Roman numbers in right superscript position may indicate the *oxidation number* (e.g. $\text{Pb}_2^{\text{II}}\text{Pb}^{\text{IV}}\text{O}_4$; $\text{K}_6\text{M}^{\text{IV}}\text{Mo}_6\text{O}_{32}$, where M denotes a metal).

6. Symbols for particles and quanta

It is recommended to use the notation listed in table 2.

TABLE 2

nucleon	N	pion	π
proton	p	K-meson	K
neutron	n		
Λ -particle	Λ	electron	e
Σ -particle	Σ	muon	μ
Ξ -particle	Ξ	neutrino	ν
Ω -particle	Ω	photon	γ
deuteron	d		
triton	t		
helion ($^3\text{He}^{2+}$)	h		
α -particle	α		

The charge of a particle may be indicated by adding the superscript $+$, $-$ or 0 .

Examples: π^+ π^- π^0 , p^+ p^- , e^+ e^- .

If in connection with the symbols p and e no charge is indicated, these symbols should refer to the positive proton and the negative electron, respectively.

The bar $^-$, or sometimes the tilde $^-$, above the symbol of a particle is used to indicate the corresponding anti-particle.

5. QUANTUM STATES

5.1. General rules

A letter symbol indicating the quantum state of *a system* should be printed in capital upright type.

A letter symbol indicating the quantum state of *a single particle* should be printed in lower case upright type.

5.2. Atomic spectroscopy

The letter symbols indicating atomic quantum states are:

$L, l=0$: S, s	$L, l=4$: G, g	$L, l=8$: L, l
$=1$: P, p	$=5$: H, h	$=9$: M, m
$=2$: D, d	$=6$: I, i	$=10$: N, n
$=3$: F, f	$=7$: K, k	$=11$: O, o.

A right subscript indicates the total angular momentum quantum number J or j .

A left superscript indicates the spin multiplicity $2S+1$.

Example: $^2P_{3/2}$ -state ($J=3/2$, spin multiplicity 2)
 $p_{3/2}$ -electron ($j=3/2$).

An atomic electron configuration is indicated symbolically by:

$$(nl)^x (n'l')^{x'} \dots$$

Instead of $l=0, 1, 2, 3 \dots$ one uses the quantum state symbol s, p, d, f, ...

Example: the atomic electron configuration: $(1s)^2 (2a)^2 (2p)^3$.

5.3. Molecular spectroscopy

The letter symbols, indicating molecular electronic quantum states are in the case of *linear molecules*:

$$\Lambda, \lambda = 0: \Sigma, \sigma$$

$$= 1: \Pi, \pi$$

$$= 2: \Delta, \delta$$

and for *non-linear molecules*

$$A, a; B, b; E, e; \text{ etc.}$$

Remarks: A left superscript indicates the spin multiplicity. For molecules having a symmetry centre the parity symbol g or u, indicating respectively symmetric or antisymmetric behaviour on inversion, is attached as a right subscript. A + or - sign attached as a right superscript indicates the symmetry as regards reflection in any plane through the symmetry axis of the molecules.

Examples: Σ_g^+ , Π_u , $^2\Sigma$, $^3\Pi$, etc.

The letter symbols indicating the vibrational angular momentum states in the case of *linear molecules* are

$$l = 0: \Sigma$$

$$= 1: \Pi$$

$$= 2: \Delta.$$

5.4. Nuclear spectroscopy

The spin and parity assignment of a nuclear state is

$$J^{\pi}$$

where the parity symbol π is $+$ for even and $-$ for odd parity.

Examples: 3^+ , 2^- , etc.

A shell model configuration is indicated symbolically by:

$$(nlj)^{\kappa} (n'l'j')^{\kappa'}$$

where the first bracket refers to the proton shell and the second to the neutron shell. Negative values of κ or κ' indicate holes in a completed shell. Instead of $l=0, 1, 2, 3, \dots$ one uses the quantum state symbol s, p, d, f,

Example: the nuclear configuration: $(1d\ 3/2)^3(1f\ 7/2)^2$.

5.5. Spectroscopic transitions

1. The upper level and the lower level are indicated by ' and '' respectively.

Examples: $h\nu = E' - E'' \quad \sigma = T' - T''.$

2. A spectroscopic transition should be indicated by writing the upper state first and the lower state second, connected by a dash.

Examples: ${}^2P_{1/2} - {}^2S_{1/2}$ for an electronic transition
 $(J', K') - (J'', K'')$ for a rotational transition
 $\nu' - \nu''$ for a vibrational transition.

3. Absorption transition and emission transition may be indicated by arrows \leftarrow and \rightarrow respectively.

Examples: ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ emission from ${}^2P_{1/2}$ to ${}^2S_{1/2}$
 $(J', K') \leftarrow (J'', K'')$ absorption from (J'', K'') to (J', K') .

4. The difference between two quantum numbers should be that of the upper state minus that of the lower state.

Example: $\Delta J = J' - J''.$

5. The indications of the branches of the rotation band should be as follows:

$\Delta J = J' - J'' = -2:$	O-branch
$= -1:$	P-branch
$= 0:$	Q-branch
$= +1:$	R-branch
$= +2:$	S-branch.

6. NOMENCLATURE

1. Use of the words 'specific' and 'molar'

The word 'specific' in the English name for an extensive physical quantity should be restricted to the meaning 'divided by mass (mass of the system, if this consists of more than one component or of more than one phase)'.

Examples: specific volume volume/mass
 specific energy energy/mass
 specific heat capacity heat capacity/mass.

The word 'molar' in the English name for an extensive physical quantity should be restricted to the meaning 'divided by amount of substance (amount of substance of the system, if this consists of more than one component or of more than one phase)'.

Examples: molar volume volume/amount of substance
 molar energy energy/amount of substance
 molar heat capacity heat capacity/amount of substance.

The symbol X_B , where X denotes an extensive quantity and B is the chemical symbol for a substance, denotes the partial molar quantity of the substance B defined by the relation:

$$X_B = (\partial X / \partial n_B)_{T, p, n_C, \dots}$$

For a pure substance B the partial molar quantity X_B and the molar quantity X_m are identical. The partial molar quantity X_B of pure substance B , which is identical with the molar quantity X_m of pure substance B , may be denoted by X_B^* where the superscript $*$ denotes 'pure', so as to distinguish it from the partial molar quantity X_B of substance B in a mixture.

2. Notation for covariant character of coupling

S	Scalar coupling	A	Axial vector coupling
V	Vector coupling	P	Pseudoscalar coupling
T	Tensor coupling.		

3. Abbreviated notation for a nuclear reaction

The meaning of the symbolic expression indicating a nuclear reaction should be the following:

initial	(incoming particle(s)	outgoing particle(s)	final
nuclide	(or quanta	or quanta	nuclide.

Examples: $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O}$ $^{59}\text{Co}(n, \gamma)^{60}\text{Co}$
 $^{23}\text{Na}(\gamma, 3n)^{20}\text{Na}$ $^{31}\text{P}(\gamma, pn)^{29}\text{Si}$.

4. Character of transitions

Multipolarity of transition:

electric or magnetic monopole	E0 or M0
electric or magnetic dipole	E1 or M1
electric or magnetic quadrupole	E2 or M2
electric or magnetic octupole	E3 or M3
electric or magnetic 2 ⁿ -pole	En or Mn.

Parity change in transition:

transition <i>with</i> parity change:	yes
transition <i>without</i> parity change:	no.

5. *Nuclide*

A species of *atoms*, identical as regards atomic number (proton number) and mass number (nucleon number) should be indicated by the word *nuclide*, not by the word *isotope*.

Different nuclides having the same atomic number should be indicated as *isotopes* or *isotopic nuclides*.

Different nuclides having the same mass number should be indicated as *isobars* or *isobaric nuclides*.

6. *Sign of polarization vector (Basel Convention)*

In nuclear interactions the positive polarization of particles with spin $\frac{1}{2}$ is taken in the direction of the vector product

$$\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_o$$

where \mathbf{k}_i and \mathbf{k}_o are the circular wave vectors of the incoming and outgoing particles, respectively.

7. *Description of polarization effects (Madison Convention)*

In the symbolic expression for a nuclear reaction $A(b, c)D$ an arrow placed over a symbol denotes a particle which is initially in a polarized state or whose state of polarization is measured.

Examples:

$A(\vec{b}, c)D$ polarized incident beam

$A(\vec{b}, \vec{c})D$ polarized incident beam; polarization of the outgoing particle c measured (polarization transfer)

$A(b, \vec{c})D$ unpolarized incident beam; polarization of the outgoing particle c measured

$\vec{A}(b, c)D$ unpolarized beam incident on a polarized target

$\vec{A}(b, \vec{c})D$ unpolarized beam incident on a polarized target; polarization of the outgoing particle c measured

$A(\vec{b}, c)\vec{D}$ polarized incident beam; measurement of the polarization of the target.

7. RECOMMENDED SYMBOLS FOR PHYSICAL QUANTITIES

Remarks:

- (1) Where several symbols are given for one quantity, and no special indication is made, they are on equal footing.
 (2) In general no special attention is paid to the name of the quantity.
 (3) Where there is more than one form for a greek letter (ε, ϵ ; ϑ, θ ; κ, χ ; φ, ϕ) either form may be used. The form $\overline{\omega}$ of the letter pi may be used as though it were a different letter.

7.1. Space and time

space coordinates; <i>coordonnées d'espace</i>	(x, y, z)
position vector; <i>vecteur de position</i>	\mathbf{r}
length; <i>longueur</i>	l
breadth; <i>largeur</i>	b
height; <i>hauteur</i>	h
radius; <i>rayon</i>	r
thickness; <i>épaisseur</i>	d, δ
diameter; <i>diamètre</i> : $d=2r$	d
element of path; <i>élément de parcours</i>	ds
area; <i>aire, superficie</i>	A, S
volume; <i>volume</i>	$V, (v)$
plane angle; <i>angle plan</i>	$\alpha, \beta, \gamma, \theta, \vartheta, \varphi$
solid angle; <i>angle solide</i>	ω, Ω
wave length; <i>longueur d'onde</i>	λ
wave number; <i>nombre d'onde</i> : $\sigma=1/\lambda$	$\sigma \quad \dagger)$
wave vector; <i>vecteur d'onde</i>	$\boldsymbol{\sigma}$
circular wave number; <i>nombre d'onde circulaire</i> : $k=2\pi/\lambda$	κ
circular wave vector; <i>vecteur d'onde circulaire</i>	$\boldsymbol{\kappa}$
attenuation coefficient; <i>constante d'affaiblissement</i> :	
$F(x)=\exp(-\alpha x) \cos \beta x$	α
phase coefficient; <i>constante de phase</i>	β
propagation coefficient; <i>constante de propagation</i> : $\gamma=\alpha+i\beta$	γ
time; <i>temps</i>	t
period, periodic time; <i>période, durée d'une période</i>	T
frequency; <i>fréquence</i> : $\nu=1/T$	ν, f
circular frequency, pulsance; <i>pulsation</i> : $\omega=2\pi\nu$	ω
relaxation time; <i>temps de relaxation</i> : $F(t)=\exp(-t/\tau)$	τ
damping coefficient; <i>coefficient d'amortissement</i> :	
$F(t)=\exp(-\delta t) \sin \omega t$	δ
logarithmic decrement; <i>décrément logarithmique</i> :	
$\Lambda=T\delta=T/\tau$	Λ
velocity; <i>vitesse</i> : $v=ds/dt$	u, v
angular velocity; <i>vitesse angulaire</i> : $\omega=d\varphi/dt$	ω

†) In molecular spectroscopy $\bar{\nu}$ is also used.

acceleration; <i>accélération</i> : $a = dv/dt$	a
angular acceleration; <i>accélération angulaire</i> : $\alpha = d\omega/dt$	α
acceleration of free fall; <i>accélération de la pesanteur</i>	g
standard --; -- <i>normale</i>	g_n
speed of light in empty space; <i>vitesse de la lumière dans le vide</i>	c
$v_0 c$	β
relativistic coordinates; <i>coordonnées relativistes</i> :	$(x_0 x_1 x_2 x_3)$
$x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$	$(x_1 x_2 x_3 x_4)$

7.2. Mechanics

mass; <i>masse</i>	m
(mass) density; <i>masse volumique</i> : $\rho = m/V$	ρ
relative density; <i>densité relative</i> : $d = \rho/\rho(\text{H}_2\text{O})$	d
specific volume; <i>volume massique</i> : $v = V/m = 1/\rho$	v
reduced mass; <i>masse réduite</i> : $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$	μ
momentum; <i>quantité de mouvement</i> : $p = mv$	p
angular momentum; <i>moment cinétique</i> : $L = r \times p$	L
second moment of plane area; <i>moment quadratique d'une aire plane</i> : $I_{a,y} = \int x^2 dx dy$	I_a
second polar moment of plane area; <i>moment quadratique polaire d'une aire plane</i> : $I_p = \int (x^2 + y^2) dx dy$	I_p
moment of inertia; <i>moment d'inertie</i> : $I_z = \int (x^2 + y^2) dm$	I, J
force; <i>force</i>	F
torque, moment of a couple; <i>torque, moment d'un couple</i>	T
weight; <i>poids</i>	$G, (W, P)$
moment of force; <i>moment d'une force</i>	M
pressure; <i>pression</i>	p
normal stress; <i>contrainte normale</i>	σ
shear stress; <i>contrainte tangentielle, cission</i>	τ
gravitational constant; <i>constante de gravitation</i> : $F(r) = Gm_1 m_2 / r^2$	G
linear strain, relative elongation; <i>dilatation linéique relative</i> : $\varepsilon = \Delta l / l_0$	ε
modulus of elasticity, Young's modulus; <i>module d'élasticité longitudinale</i> : $\sigma = E\varepsilon$	E
shear strain; <i>glissement unitaire</i>	γ
shear modulus; <i>module d'élasticité de glissement</i> : $\tau = G\gamma$	G
volume strain, bulk strain; <i>dilatation volumique relative</i> : $\theta = \Delta V / V_0$	θ
bulk modulus; <i>module de compression</i> : $p = -K\theta$	K
Poisson ratio, <i>rapport de Poisson</i>	μ, ν
viscosity; <i>viscosité</i>	$\eta, (\mu)$
kinematic viscosity; <i>viscosité cinématique</i> : $\nu = \eta/\rho$	ν
friction coefficient; <i>coefficient de frottement</i>	$\mu, (f)$

surface tension; <i>tension superficielle</i>	γ, σ
energy; <i>énergie</i>	E, W
potential energy; <i>énergie potentielle</i>	E_p, V, Φ
kinetic energy; <i>énergie cinétique</i>	E_k, T, K
work; <i>travail</i>	W, A
power; <i>puissance</i>	P
efficiency; <i>rendement</i>	η
Hamiltonian function; <i>fonction de Hamilton</i>	H
Lagrangian function; <i>fonction de Lagrange</i>	L
principal function of Hamilton; <i>fonction principale de Hamilton</i> : $W = \int L dt$	W, S_p
characteristic function of Hamilton; <i>fonction caractéristique de Hamilton</i> : $S = 2 \int T dt$	S
generalized coordinate; <i>coordonnée généralisée</i>	q, q_i
generalized momentum; <i>moment généralisé</i>	p, p_i
action integral; <i>intégrale d'action</i> : $J = \oint p dq$	J

7.3. Molecular Physics

number of molecules; <i>nombre de molécules</i>	N
number density of molecules; <i>nombre volumique de molécules</i> $n = N/V$	n
Avogadro constant; <i>constante d'Avogadro</i>	L, N_A
molecular mass; <i>masse moléculaire</i>	m
molecular velocity vector with (magnitudes of) components; <i>vecteur vitesse moléculaire et ses coordonnées</i>	$\mathbf{c}, (c_x, c_y, c_z)$ $\mathbf{u}, (u_x, u_y, u_z)$
molecular position vector with coordinates; <i>vecteur position moléculaire et ses coordonnées</i>	$\mathbf{r}, (x, y, z)$
molecular momentum vector with (magnitudes of) components; <i>vecteur quantité de mouvement moléculaire et ses coordonnées</i>	$\mathbf{p}, (p_x, p_y, p_z)$ $\mathbf{c}_0, \mathbf{u}_0, \langle \mathbf{c} \rangle, \langle \mathbf{u} \rangle$ $\bar{c}, \bar{u}, \langle c \rangle, \langle u \rangle$ \hat{c}, \hat{u}
average velocity; <i>vitesse moyenne</i>	l
average speed; <i>vitesse moyenne</i>	ε
most probable speed; <i>vitesse la plus probable</i>	φ_{ij}, V_{ij}
mean free path; <i>libre parcours moyen</i>	$f(c)$
molecular attraction energy parameter; <i>paramètre d'énergie d'attraction moléculaire</i>	H
interaction energy between molecules i and j ; <i>énergie d'interaction entre les molécules i et j</i>	q
velocity distribution function; <i>fonction de distribution des vitesses</i> : $n = \int f dc_x dc_y dc_z$	p
Boltzmann function; <i>fonction de Boltzmann</i>	Ω
generalized coordinate; <i>coordonnée généralisée</i>	
generalized momentum; <i>moment généralisé</i>	
volume in γ phase space; <i>volume dans l'espace γ</i>	

thermodynamic temperature; <i>température thermodynamique</i>	T
Boltzmann constant; <i>constante de Boltzmann</i>	k
$1/kT$ (in exponential functions; <i>dans les fonctions exponentielles</i>)	β
molar gas constant; <i>constante molaire des gaz</i>	R
partition function; <i>fonction de partitions</i>	Q, Z
symmetry number; <i>facteur de symétrie</i>	s
diffusion coefficient; <i>coefficient de diffusion</i>	D
thermal diffusion coefficient; <i>coefficient de thermodiffusion</i>	D_T
thermal diffusion ratio; <i>rapport de thermodiffusion</i>	k_T
thermal diffusion factor; <i>facteur de thermodiffusion</i>	α_T
characteristic temperature; <i>température caractéristique</i>	Θ
Debye temperature; <i>température de Debye</i> : $\Theta_D = h\nu_D/k$	Θ_D
Einstein temperature; <i>température d'Einstein</i> : $\Theta_E = h\nu_E/k$	Θ_E
rotational temperature; <i>température de rotation</i> : $\Theta_r = h^2/8\pi^2 Ik$	Θ_r
vibrational temperature; <i>température de vibration</i> : $\Theta_v = h\nu/k$	Θ_v

7.4. Thermodynamics †)

quantity of heat; <i>quantité de chaleur</i>	Q
work; <i>travail</i>	W, A
thermodynamic temperature; <i>température thermodynamique</i>	T
Celsius temperature; <i>température Celsius</i>	t, ϑ ††)
entropy; <i>entropie</i>	S
internal energy; <i>énergie interne</i>	U
Helmholtz function, <i>fonction de Helmholtz, énergie libre</i> : $F = U - TS$	F
enthalpy; <i>enthalpie</i> : $H = U + pV$	H
Gibbs function; <i>fonction de Gibbs, enthalpie libre</i> : $G = H - TS$	G
Massieu function; <i>fonction de Massieu</i> : $J = -F/T$	J
Planck function; <i>fonction de Planck</i> : $Y = -G/T$	Y
pressure coefficient; <i>coefficient de pression</i> : $\beta = (\partial p / \partial T)_V$	β
relative pressure coefficient; <i>coefficient de pression relative</i> : $\alpha_p = (1/p)(\partial p / \partial T)_V$	α_p
compressibility; <i>compressibilité</i> : $\kappa = -(1/V)(\partial V / \partial p)_T$	κ
linear expansion coefficient; <i>dilatabilité linéique</i>	α_l
cubic expansion coefficient; <i>dilatabilité volumique</i> : $\alpha = (1/V)(\partial V / \partial T)_p$	α, γ
thermal conductivity; <i>conductivité thermique</i>	λ

†) The index m is added in the case of molar quantities, if needed, to distinguish them from quantities referring to the whole system. For specific quantities (see section 6.1) lower case letters are used.

††) When Celsius temperature and time come together, t is reserved for time.

specific heat capacity; <i>chaleur massique</i> : $c = C/m$	c_p, c_v
heat capacity; <i>capacité thermique</i>	C_p, C_v
Joule—Thomson coefficient; <i>coefficient de Joule—Thomson</i>	μ
isentropic exponent; <i>exposant isentropique</i> *): $\kappa = -(V/p)(\partial p/\partial V)_s$	κ
ratio of specific heat capacities; <i>rapport des chaleurs massiques</i>	$\gamma, (\kappa)$
heat flow rate; <i>flux thermique</i>	$\Phi, (q)$
heat current density; <i>densité de flux thermique</i>	$q, (\varphi)$
thermal diffusivity; <i>diffusivité thermique</i> : $a = \lambda/\rho c_p$	a

7.5. Electricity and magnetism **)

quantity of electricity; <i>quantité d'électricité</i>	Q
charge density; <i>charge volumique</i>	q
surface charge density; <i>charge surfacique</i>	σ
electric potential; <i>potentiel électrique</i>	V, φ
potential difference, tension; <i>différence de potentiel, tension</i>	U, V
electromotive force; <i>force électromotrice</i>	E
electric field strength; <i>champ électrique</i>	E
electric flux, <i>flux électrique</i>	Ψ
electric displacement; <i>déplacement électrique</i>	D
capacitance; <i>capacité</i>	C
permittivity; <i>permittivité</i> : $D = \epsilon E$	ϵ
permittivity of vacuum, electric constant; <i>permittivité du vide, constante électrique</i>	ϵ_0
relative permittivity; <i>permittivité relative</i> : $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$	ϵ_r
dielectric polarization; <i>polarisation diélectrique</i> : $D = \epsilon_0 E + P$	P
electric susceptibility; <i>susceptibilité électrique</i>	χ_e
polarizability; <i>polarisabilité</i>	α, γ
electric dipole moment; <i>moment dipolaire électrique</i>	p
electric current; <i>courant électrique</i>	I
electric current density; <i>densité de courant électrique</i>	j, J
magnetic field strength; <i>champ magnétique</i>	H
magnetic potential difference; <i>différence de potentiel magnétique</i>	U_m
magnetomotive force; <i>force magnétomotrice</i> : $F_m = \oint H_s ds$	F_m
magnetic induction, magnetic flux density; <i>induction magnétique, densité de flux magnétique</i>	B
magnetic flux; <i>flux magnétique</i>	Φ
permeability; <i>perméabilité</i> : $B = \mu H$	μ
permeability of vacuum, magnetic constant; <i>perméabilité du vide, constante magnétique</i>	μ_0

*) For an ideal gas the isentropic exponent, κ , is equal to the ratio of specific heat capacities, γ .

**) Written according to the rationalized, 4-dimensional system of quantities, see Appendix I, section 2.

relative permeability; <i>perméabilité relative</i> : $\mu_r = \mu/\mu_0$	μ_r
magnetization; <i>aimantation</i> : $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$	\mathbf{M}
magnetic susceptibility; <i>susceptibilité magnétique</i>	χ_m
electromagnetic moment; <i>moment électromagnétique</i>	
$E_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$	μ, m
resistance; <i>résistance</i>	R
reactance; <i>réactance</i>	X
quality factor; <i>facteur de qualité</i> : $Q = X /R$	Q
impedance; <i>impédance</i> : $Z = R + iX$	Z
admittance; <i>admittance</i> : $Y = 1/Z = G + iB$	Y
conductance; <i>conductance</i>	G
susceptance; <i>susceptance</i>	B
resistivity; <i>résistivité</i>	ρ
conductivity; <i>conductivité</i> $\gamma = 1/\rho$	γ, σ
self inductance; <i>inductance propre</i>	L
mutual inductance; <i>inductance mutuelle</i>	M, L_{12}
coupling coefficient; <i>coefficient de couplage</i> : $k = L_{12}/(L_1 L_2)^{1/2}$	k
phase number; <i>nombre de phases</i>	m
loss angle; <i>angle de pertes</i>	δ
number of turns; <i>nombre de tours</i>	N
power; <i>puissance</i>	P
electromagnetic energy density; <i>énergie électromagnétique volumique</i>	w
Poynting vector; <i>vecteur de Poynting</i>	\mathbf{S}
magnetic vector potential; <i>potentiel vecteur magnétique</i>	\mathbf{A}

7.6. Radiation, light †)

radiant energy; <i>énergie rayonnante</i>	$Q, (Q_e), W$
radiant energy density; <i>énergie rayonnante volumique</i>	w
spectral concentration of radiant energy density (in terms of wavelength); <i>énergie rayonnante volumique spectrique (en longueur d'onde)</i> : $w = \int w_\lambda d\lambda$	w_λ
radiant flux, radiant power; <i>flux énergétique, puissance rayonnante</i> : $\Phi = \int \Phi_\lambda d\lambda$	$\Phi, (\Phi_e), P$
radiant flux density; <i>censité de flux énergétique</i>	ϕ
radiant intensity; <i>intensité énergétique</i> : $\Phi = \int I d\Omega$	$I, (I_e)$
spectral concentration of radiant intensity (in terms of frequency); <i>intensité énergétique spectrique (en fréquence)</i> : $I = \int I_\nu d\nu$	$I_\nu, (I_{e\nu})$
irradiance; <i>éclairage énergétique</i> : $\Phi = \int E dS$	$E, (E_e)$

†) In several cases, the same symbol is used for a pair of corresponding radiant and luminous quantities with the understanding that subscripts e for energetic and v for visible will be added, whenever confusion between these quantities might otherwise occur.

radiance; <i>luminance énergétique</i> : $I = \int L \cos \vartheta \, dS$	$L, (L_e)$
radiant excitance; <i>excitance énergétique</i> : $\Phi = \int M \, dS$	$M, (M_e)$
Stefan—Boltzmann constant; <i>constante de Stefan—Boltzmann</i> : $\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15h^3 c^2$	σ
first radiation constant; <i>première constante de rayonnement</i> : $c_1 = 2\pi hc^2$	c_1
second radiation constant; <i>deuxième constante de rayonnement</i> : $c_2 = hc/k$	c_2
emissivity; <i>émissivité</i> : $\varepsilon = M/M_B$ (M_B : radiant excitance of a black body radiator)	ε
luminous efficacy; <i>efficacité lumineuse</i> : $K = \Phi_v / \Phi_e$	K
spectral luminous efficacy; <i>efficacité lumineuse spectrale</i> : $K(\lambda) = \Phi_{v\lambda} / \Phi_{e\lambda}$	$K(\lambda)$
maximum spectral luminous efficacy; <i>efficacité lumineuse spectrale maximale</i>	K_m
luminous efficiency; <i>efficacité lumineuse relative</i> : $V = K/K_m$	V
spectral luminous efficiency; <i>efficacité lumineuse relative spectrale</i> : $V(\lambda) = K(\lambda)/K_m$	$V(\lambda)$
quantity of light; <i>quantité de lumière</i>	$Q, (Q_v)$
luminous flux; <i>flux lumineux</i>	$\Phi, (\Phi_v)$
luminous intensity; <i>intensité lumineuse</i> : $\Phi = \int I \, d\Omega$	$I, (I_v)$
spectral concentration of luminous intensity (in terms of wave number); <i>intensité lumineuse spectrique (en nombre d'onde)</i> : $I = \int I_\sigma \, d\sigma$	$I_\sigma, (I_{v\sigma})$
illuminance, illumination; <i>éclairage lumineux</i> : $\Phi = \int E \, dS$	$E, (E_v)$
luminance; <i>luminance</i> : $I = \int L \cos \vartheta \, dS$	$L, (L_v)$
luminous excitance; <i>excitance lumineuse</i> : $\Phi = \int M \, dS$	$M, (M_v)$
absorptance; <i>facteur d'absorption</i> : Φ_a / Φ_0	α *)
reflectance; <i>facteur de réflexion</i> : Φ_r / Φ_0	ρ *)
transmittance; <i>facteur de transmission</i> : Φ_{tr} / Φ_0	τ *)
linear attenuation coefficient; <i>coefficient d'atténuation linéique</i> μ	
linear absorption coefficient; <i>coefficient d'absorption linéique</i> a	
speed of light in empty space; <i>vitesse de la lumière dans le vide</i>	c
refractive index; <i>indice de réfraction</i> : $n = c/c_n$	n

7.7. Acoustics

velocity of sound; <i>vitesse du son</i>	c
velocity of longitudinal waves; <i>vitesse longitudinale</i>	c_l
velocity of transversal waves; <i>vitesse transversale</i>	c_t
group velocity; <i>vitesse de groupe</i>	c_g

*) $\alpha(\lambda)$, $\rho(\lambda)$ and $\tau(\lambda)$ designate spectral absorptance, $\Phi_{a\lambda}/\Phi_{0\lambda}$, spectral reflectance, $\Phi_{r\lambda}/\Phi_{0\lambda}$, and spectral transmittance, $\Phi_{tr\lambda}/\Phi_{0\lambda}$, respectively.

sound energy flux; <i>flux d'énergie acoustique</i>	P, P_a
reflexion factor; <i>facteur de réflexion</i> : P_r/P_0	ϱ
acoustic absorption factor; <i>facteur d'absorption acoustique</i> : $1 - \varrho$	$\alpha_a, (\alpha)$
transmission factor; <i>facteur de transmission</i> : P_{tr}/P_c	τ
dissipation factor; <i>facteur de dissipation</i> : $\alpha_a - \tau$	δ
loudness level; <i>niveau d'isophonie</i>	L_N
sound power level; <i>niveau de puissance acoustique</i>	L_P
sound pressure level; <i>niveau de pression acoustique</i>	L_p

7.8. Quantum mechanics

complex conjugate of Ψ ; <i>complexe conjugué de Ψ</i>	Ψ^*
probability density; <i>densité de probabilité</i> : $P = \Psi^* \Psi$	P
probability current density; <i>densité de courant de probabilité</i> : $S = (\hbar/2im)(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)$	S
charge density of electrons; <i>charge volumique d'électrons</i> : $\varrho = -eP$	ϱ
electric current density of electrons; <i>densité de courant électrique d'électrons</i> : $j = -eS$	j
Dirac bra vector; <i>vecteur bra de Dirac</i>	$\langle $
Dirac ket vector; <i>vecteur ket de Dirac</i>	$ \rangle$
expectation value of A ; <i>valeur moyenne de A</i>	$\langle A \rangle, \bar{A}$
commutator of A and B ; <i>commutateur de A et B</i> : $[A, B] = AB - BA$	$[A, B], [A, B]_-$
anticommutator of A and B ; <i>anticommutateur de A et B</i> : $[A, B]_+ = AB + BA$	$[A, B]_+$
matrix element; <i>élément de matrice</i> : $A_{ij} = \int \varphi_i^* (A \varphi_j) d\tau$	A_{ij}
Hermitian conjugate of operator A ; <i>conjugué Hermitien de l'opérateur A</i>	A^\dagger
momentum operator in coordinate representation; <i>opérateur de quantité de mouvement</i>	$+$ $(\hbar/i) \nabla$
annihilation operators; <i>opérateurs d'annihilation</i>	a, b, α, β
creation operators; <i>opérateurs de création</i>	$a^\dagger, b^\dagger, \alpha^\dagger, \beta^\dagger$

7.9. Atomic and nuclear physics

nucleon number, mass number; <i>nombre de nucléons, nombre de masse</i>	A
proton number, atomic number; <i>nombre de protons, nombre atomique</i>	Z
neutron number; <i>nombre de neutrons</i> : $N = A - Z$	N
elementary charge (equal to charge of proton); <i>charge élémentaire (égale à la charge du proton)</i>	e
electron mass; <i>masse de l'électron</i>	m, m_e

proton mass; <i>masse du proton</i>	m_p
neutron mass; <i>masse du neutron</i>	m_n
meson mass; <i>masse du méson</i>	m_π
nuclear mass; <i>masse nucléaire</i> (of nucleus: AX)	$m_N, m_N({}^AX)$
atomic mass; <i>masse atomique</i> (of nuclide: AX)	$m_a, m_a({}^AX)$
(unified) atomic mass constant; <i>constante (unifiée) de masse atomique</i> : $m_u = m_a({}^{12}\text{C})/12$	m_u
relative atomic mass; <i>masse atomique relative</i> : m_a/m_u	A_r
Planck constant; <i>constante de Planck</i> ($\hbar = h/2\pi$)	h
principal quantum number (qu.n.); <i>nombre quantique (n.qu.) principal</i>	n, n_i
orbital angular momentum qu.n.; <i>n.qu. de moment angulaire orbital</i>	L, l_i
spin qu.n.; <i>n.qu. de spin</i>	S, s_i
total angular momentum qu.n.; <i>n.qu. de moment angulaire total</i>	J, j_i
magnetic qu.n.; <i>n.qu. magnétique</i>	M, m_i
nuclear spin qu.n.; <i>n.qu. de spin nucléaire</i>	$I, J \quad \dagger)$
hyperfine qu.n.; <i>n.qu. hyperfin</i>	F
rotational qu.n.; <i>n.qu. de rotation</i>	J, K
vibrational qu.n.; <i>n.qu. de vibration</i>	v
quadrupole moment; <i>moment quadripolaire</i>	Q
Rydberg constant; <i>constante de Rydberg</i> $\dagger\dagger)$	R_∞
Bohr radius; <i>rayon de Bohr</i> $\dagger\dagger)$	a_0
fine structure constant; <i>constante de structure fine</i> $\dagger\dagger)$	α
mass excess; <i>excès de masse</i> : $m_a - Am_u$	Δ
packing fraction; <i>packing fraction</i> : Δ/Am_u	f
nuclear radius; <i>rayon nucléaire</i> : $R = r_0 A^{1/3}$	R
magnetic moment of particle; <i>moment magnétique d'une particule</i>	μ
magnetic moment of proton; <i>moment magnétique du proton</i>	μ_p
magnetic moment of neutron; <i>moment magnétique du neutron</i>	μ_n
magnetic moment of electron; <i>moment magnétique électronique</i>	μ_e
Bohr magneton; <i>magnéton de Bohr</i> $\dagger\dagger)$	μ_B
nuclear magneton; <i>magnéton nucléaire</i>	μ_N
g-factor; <i>facteur g</i> : e.g. $g = \mu/I\mu_N$	g
gyromagnetic ratio, gyromagnetic coefficient; <i>rapport gyromagnétique, coefficient gyromagnétique</i> $\dagger\dagger)$	γ
Larmor circular frequency; <i>pulsation de Larmor</i> $\dagger\dagger)$	ω_L
level width; <i>largeur d'un niveau</i>	Γ
mean life; <i>vie moyenne</i>	τ
reaction energy; <i>énergie de réaction</i>	Q
cross section; <i>section efficace</i>	σ

$\dagger)$ I is used in atomic physics, J in nuclear physics.

$\dagger\dagger)$ See for definition: Appendix I, section 3.

macroscopic cross section; <i>section efficace</i>	Σ
macroscopic: $\Sigma = n\sigma$	b
impact parameter; <i>paramètre de collision</i>	$\vartheta, \theta, \varphi$
scattering angle; <i>angle de diffusion</i>	
internal conversion coefficient; <i>coefficient de conversion interne</i>	α
disintegration energy; <i>énergie de désintégration</i>	Q
half life; <i>demi-vie</i>	$T_{1/2}$
reduced half life; <i>demi-vie réduite</i>	$fT_{1/2}$
decay constant, disintegration constant; <i>constante de désintégration</i>	λ
activity; <i>activité</i>	A
Compton wavelength; <i>longueur d'onde de Compton</i> :	
$\lambda_C = h/mc$	λ_C
electron radius; <i>rayon de l'électron</i> †)	r_e
linear attenuation coefficient; <i>coefficient d'atténuation linéique</i>	μ, μ_1
atomic attenuation coefficient; <i>coefficient d'atténuation atomique</i>	μ_a
mass attenuation coefficient; <i>coefficient d'atténuation massique</i>	μ_m
linear stopping power; <i>pouvoir d'arrêt linéaire</i>	S, S_1
atomic stopping power; <i>pouvoir d'arrêt atomique</i>	S_a
linear range; <i>distance de pénétration linéaire</i>	R, R_1
recombination coefficient; <i>coefficient de recombinaison</i>	α

7.10. Solid state physics

lattice vector: a translation vector which maps the crystal lattice on itself; <i>vecteur du réseau: vecteur qui reproduit par translation le réseau cristallin sur lui-même</i>	R, R_0
fundamental translation vectors for the crystal lattice; <i>vecteurs de base de la maille cristalline: $R = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3$, where n_1, n_2, n_3 are integers</i>	a_1, a_2, a_3 a, b, c
(circular) reciprocal lattice vector; <i>vecteur du réseau réciproque: $G \cdot R = m \cdot 2\pi$, where m is an integer</i>	G
(circular) fundamental translation vectors for the reciprocal lattice; <i>vecteur de base de la maille du réseau réciproque: $a_i \cdot b_k = 2\pi \delta_{ik}$ ††), where δ_{ik} is Kronecker delta symbol</i>	b_1, b_2, b_3 a^*, b^*, c^*
lattice plane spacing; <i>espacement entre plans réticulaires</i>	d
Bragg angle; <i>angle de Bragg</i>	ϑ
order of reflexion; <i>ordre de réflexion</i>	n

†) See for definition: Appendix I, section 3.

††) In crystallography however $a_i \cdot b_k = \delta_{ik}$.

short range order parameter; <i>paramètre d'ordre à courte distance (local)</i>	σ
long range order parameter; <i>paramètre d'ordre à grande distance</i>	s
Burgers vector; <i>vecteur de Burgers</i>	\mathbf{b}
particle position vector; <i>vecteur de position d'une particule</i> *)	\mathbf{r}, \mathbf{R}
equilibrium position vector of ion; <i>vecteur de position d'équilibre d'un ion</i>	\mathbf{R}_0
displacement vector of ion; <i>vecteur de déplacement d'un ion</i>	\mathbf{u}
normal coordinates; <i>coordonnées normales</i>	Q_i
polarization vector; <i>vecteur de polarisation</i>	\mathbf{e}
Debye—Waller factor; <i>facteur de Debye—Waller</i>	D
Debye circular wave number; <i>nombre d'onde circulaire de Debye</i>	q_D
Debye circular frequency; <i>pulsation de Debye</i>	ω_D
Grueneisen parameter; <i>paramètre de Grüneisen</i> : $\gamma = \alpha V / \kappa C_V$ (α : cubic expansion coefficient; κ : compressibility)	γ, Γ
Madelung constant; <i>constante de Madelung</i>	α
mean free path of electrons; <i>libre parcours moyen des électrons</i>	l, l_e
mean free path of phonons; <i>libre parcours moyen des phonons</i>	Λ, l_{ph}
drift velocity; <i>vitesse de mouvement</i>	v_{dr}
mobility; <i>mobilité</i>	μ
one electron wave function; <i>fonction d'onde monoélectronique</i>	$\psi(\mathbf{r})$
Bloch wave function; <i>fonction d'onde de Bloch</i> : $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$	$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$
density of states; <i>densité (électronique) d'état</i> : $dN(E)/dE = N_E(E) = \varrho(E)$	N_E, ϱ
(spectral) density of vibrational modes; <i>densité spectrale de modes de vibration</i>	g, N_ω
exchange integral; <i>intégrale d'échange</i>	J
resistivity tensor; <i>tenseur de résistivité</i>	ϱ_{ik}
electric conductivity tensor; <i>tenseur de conductibilité électrique</i>	σ_{ik}
thermal conductivity tensor; <i>tenseur de conductibilité thermique</i>	λ_{ik}
residual resistivity; <i>résistivité résiduelle</i>	ϱ_R
relaxation time; <i>temps de relaxation</i>	τ
Lorenz coefficient; <i>coefficient de Lorenz</i> : $L = \lambda / \sigma T$	L
Hall coefficient; <i>coefficient de Hall</i>	A_H, R_H
Ettinghausen coefficient; <i>coefficient d'Ettinghausen</i>	A_E
first Ettinghausen—Nernst coefficient; <i>premier coefficient d'Ettinghausen—Nernst</i>	A_N

*) To distinguish between electron and ion position vectors, lower case and capital letters are used, respectively.

first Righi—Leduc coefficient; <i>premier coefficient de Righi—Leduc</i>	A_{RL}
thermoelectromotive force between substances a and b; <i>force thermoélectromotrice entre deux substances a et b</i>	E_{ab}
Seebeck coefficient for substances a and b; <i>coefficient de Seebeck pour deux substances a et b</i> : $S_{ab}=dE_{ab}/dT$	S_{ab}, ε_{ab}
Peltier coefficient for substances a and b; <i>coefficient de Peltier pour deux substances a et b</i>	Π_{ab}
Thomson coefficient; <i>coefficient de Thomson</i>	$\mu, (\tau)$
work function; <i>travail d'extraction *</i> : $\Phi=e\varphi$	φ
Richardson constant; <i>constante de Richardson</i> : $j=AT^2 \exp(-\Phi/kT)$	A
electron number density; <i>nombre volumique électronique (densité électronique) **</i>	n, n_n, n_-
hole number density; <i>nombre volumique de trous (densité de trous) **</i>	p, n_p, n_+
donor number density; <i>nombre volumique de donneurs (densité de donneurs)</i>	n_d
acceptor number density; <i>nombre volumique d'accepteurs (densité d'accepteurs)</i>	n_a
intrinsic number density; <i>nombre volumique intrinsèque (densité intrinsèque)</i> : $n_i=(n \cdot p)^{1/2}$	n_i
gap energy; <i>bande d'énergie interdite (énergie gap)</i>	E_g
donor ionization energy; <i>énergie d'ionisation de donneur</i>	E_d
acceptor ionization energy; <i>énergie d'ionisation d'accepteur</i>	E_a
Fermi energy; <i>énergie de Fermi</i>	E_F, ε_F
circular wave vector, propagation vector (of particles); <i>vecteur d'onde, vecteur de propagation (de particules)</i>	k
circular wave vector, propagation vector (of phonons); <i>vecteur d'onde, vecteur de propagation (de phonons)</i>	q
Fermi circular wave vector; <i>vecteur de Fermi</i>	k_F
electron annihilation operator; <i>opérateur d'annihilation d'électron</i>	a
electron creation operator; <i>opérateur de création d'électron</i>	a^\dagger
phonon annihilation operator; <i>opérateur d'annihilation de phonon</i>	b
phonon creation operator; <i>opérateur de création de phonon</i>	b^\dagger
effective mass; <i>masse effective **</i>	m_n^*, m_p^*
mobility; <i>mobilité **</i>	μ_n, μ_p
mobility ratio; <i>rapport de mobilité</i> : $b=\mu_n/\mu_p$	b
diffusion coefficient; <i>coefficient de diffusion **</i>	D_n, D_p
diffusion length; <i>longueur de diffusion **</i>	L_n, L_p
carrier life time; <i>durée de vie de porteur **</i>	τ_n, τ_p

*) The symbol W is used for the quantity $W=\Phi+\mu$, where μ is the electron chemical potential, which, at $T=0$, is equal to the Fermi energy E_F .

**) In general subscripts n and p or $-$ and $+$ may be used to denote electrons and holes, respectively.

characteristic (Weiss) temperature; <i>température caractéristique (de Weiss)</i>	Θ, Θ_w
Curie temperature; <i>température de Curie</i>	T_C
Néel temperature; <i>température de Néel</i>	T_N
superconductor critical transition temperature; <i>température critique de transition supraconductrice</i>	T_c
superconductor (thermodynamic) critical field strength; <i>champ critique (thermodynamique) d'un supraconducteur</i>	H_c
superconductor critical field strengths (type II); <i>champ critique d'un supraconducteur (type II)*</i>	H_{c1}, H_{c2}, H_{c3}
superconductor energy gap; <i>bande interdite du supraconducteur</i>	Δ
London penetration depth; <i>profondeur de pénétration de London</i>	λ_L
coherence length; <i>longueur de cohérence</i>	ξ
Landau—Ginzburg parameter; <i>paramètre de Landau—Ginzburg: $\kappa = \lambda_L / \xi \sqrt{2}$</i>	κ
flux (or fluxoid) quantum; <i>quantum de flux: $\Phi_0 = h/2e$ **</i>	Φ_0
Miller indices; <i>indices de Miller</i>	h_1, h_2, h_3 h, k, l
single plane or set of parallel planes in lattice; <i>plan simple ou famille de plans réticulaires parallèles dans un réseau</i>	(h_1, h_2, h_3) (h, k, l)
full set of planes in lattice equivalent by symmetry; <i>famille de plans réticulaires équivalents par symétrie</i>	$\{h_1, h_2, h_3\}$ $\{h, k, l\}$
direction in lattice; <i>rangée réticulaire</i>	$[u, v, w]$
full set of directions in lattice equivalent by symmetry; <i>famille de rangées réticulaires équivalentes par symétrie</i>	$\langle u, v, w \rangle$

Note: If the letter symbols are replaced by numbers in the bracketed expressions, it is customary to omit the commas. A negative numerical value is commonly indicated by a bar above the number, e.g. ($\bar{1}10$).

7.11. Molecular spectroscopy

quantum number (qu.n.) of component of electronic orbital angular momentum vector along symmetry axis; <i>nombre quantique (n.qu.) de la composante du moment angulaire orbital électronique suivant l'axe de symétrie</i>	A, λ_i
qu.n. of component of electronic spin along symmetry axis; <i>n.qu. de la composante du spin électronique suivant l'axe de symétrie</i>	Σ, σ_i

*) H_{c1} : for magnetic flux entering the superconductor, H_{c2} : for disappearing of bulk superconductivity, H_{c3} : for disappearing of surface superconductivity.

**) $2e/h = 1/\Phi_0$ is also called characteristic constant for macroscopic coherence in superconductors.

qu.n. of total electronic angular momentum vector along symmetry axis; <i>n.qu. du moment angulaire total électronique suivant l'axe de symétrie</i> : $\Omega = \Lambda + \Sigma $	Ω, ω_1
qu.n. of electronic spin; <i>n.qu. du spin électronique</i>	S
qu.n. of nuclear spin; <i>n.qu. du spin nucléaire</i>	I
qu.n. of vibrational mode; <i>n.qu. d'une mode de vibration</i>	v
degeneracy of vibrational mode; <i>degré de dégénérescence d'une mode de vibration</i>	d
qu.n. of vibrational angular momentum; <i>n.qu. du moment angulaire vibrationnel</i> (L.M.)	l
qu.n. of total angular momentum; <i>n.qu. du moment angulaire total</i> (excluding nuclear spin)	J
qu.n. of component of \mathbf{J} in direction of external field; <i>n.qu. de la composante de \mathbf{J} dans la direction du champ extérieur</i>	M, M_J
qu.n. of component of \mathbf{S} in direction of external field; <i>n.qu. de la composante de \mathbf{S} dans la direction du champ extérieur</i>	M_S
qu.n. of total angular momentum; <i>n.qu. du moment angulaire total</i> (including nuclear spin) $\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{I}$	F
qu.n. of component of \mathbf{F} in direction of external field; <i>n.qu. de la composante de \mathbf{F} dans la direction du champ extérieur</i>	M_F
qu.n. of component of \mathbf{I} in direction of external field; <i>n.qu. de la composante de \mathbf{I} dans la direction du champ extérieur</i>	M_I
qu.n. of component of angular momentum along axis; <i>n.qu. de la composante du moment angulaire suivant l'axe</i> (L.M. and S.T.M.; excluding electron and nuclear spin; for L.M.: $(K = \Lambda + I)$)	K
qu.n. of total angular momentum; <i>n.qu. du moment angulaire total</i> (L.M. and S.T.M.; excluding electron and nuclear spin: $\mathbf{J} = \mathbf{N} + \mathbf{S}^*$)	N
qu.n. of component of angular momentum along symmetry axis; <i>n.qu. de la composante du moment angulaire suivant l'axe de symétrie</i> (L.M. and S.T.M., excluding nuclear spin; for L.M.: $P = K + \Sigma ^{**}$)	P
electronic term; <i>terme électronique</i> : $T_e = E_e/hc$ †)	T_e
vibrational term; <i>terme de vibration</i> : $G = E_{\text{vibr}}/hc$	G
coefficients in expression for vibrational term (for D.M.); <i>coefficients de l'expression d'un terme de vibration</i> :	
$G = \sigma_e(v + \frac{1}{2}) - x\sigma_e(v + \frac{1}{2})^2$	$\sigma_e, x\sigma_e$
coefficients in expression for vibrational term (for P.M.); <i>coefficients de l'expression d'un terme de vibration</i> :	
$G = \Sigma \sigma_j(v_j + \frac{1}{2}d_j) + \frac{1}{2} \sum_j \sum_k x_{jk}(v_j + \frac{1}{2}d_j)(v_k + \frac{1}{2}d_k)$	σ_j, x_{jk}

*) Case of loosely coupled electron spin.

**) Case of tightly coupled electron spin.

†) All energies are taken here with respect to the ground state as reference level.

rotational term; <i>terme de rotation</i> : $F=E_{\text{rot}}/hc$	F
principal moments of inertia; <i>moments principaux d'inertie</i>	
$I_A \leq I_B \leq I_C$ *)	I_A, I_B, I_C
rotational constants; <i>constantes de rotation</i> :	
$A=h/8\pi^2 cI_A$, etc. *)	A, B, C
total term; <i>terme total</i> : $T=T_e+G+F$	T

Remark: L.M. = linear molecules. S.T.M. = symmetric top molecules.

D.M. = diatomic molecules. P.M. = polyatomic molecules.

See for further details: Report on Notation for the Spectra of Polyatomic Molecules (Joint Commission for Spectroscopy of I.U.P.A.P. and I.A.U. 1954) J. Chem. Phys. **23** (1955) 1997.

7.12. Chemical physics

relative atomic mass; <i>masse atomique relative</i>	A_r
relative molecular mass; <i>masse moléculaire relative</i>	M_r
amount of substance; <i>quantité de matière</i>	n, ν **)
molar mass of substance B; <i>masse molaire de la substance B</i>	M_B
concentration of substance B; <i>concentration de la substance B</i> : $c_B=n_B/V$	c_B
mole fraction of substance B; <i>fraction molaire de la substance B</i>	x_B
mass fraction of substance B; <i>titre en masse de la substance B</i>	w_B
volume fraction of substance B; <i>titre en volume de la substance B</i>	φ_B
mole ratio of solution; <i>rapport molaire d'une solution</i>	r
molality of solution; <i>molalité d'une solution</i>	m
chemical potential of substance B; <i>potentiel chimique de la substance B</i> †)	μ_B
absolute activity of substance B (dimensionless); <i>activité absolue de la substance B (sans dimension)</i> : $\lambda_B=\exp(\mu_B/kT)$	λ_B
relative activity; <i>activité relative</i>	a_B
activity coefficients; <i>coefficients d'activité</i>	γ_B, f_B
osmotic pressure; <i>pression osmotique</i>	Π
osmotic coefficient; <i>coefficient osmotique</i>	g, φ
stoichiometric number of substance B; <i>nombre stœchiométrique de la substance B</i>	ν_B
affinity; <i>affinité</i>	A
extent of reaction; <i>état d'avancement d'une réaction</i>	ξ
equilibrium constant; <i>constante d'équilibre</i>	K

*) For diatomic molecules use I and $A=h/8\pi^2 cI$.

**) ν may be used as an alternative to n , when n is used for number density of particles.

†) Referred to one particle.

charge number of ion; <i>nombre de charge d'un ion, électrovalence</i>	z
Faraday constant; <i>constante de Faraday</i>	F
ionic strength; <i>force ionique</i>	I
reduced activity of substance B; <i>activité réduite de la substance B</i> ; $z_B = 2\pi mkT/h^2)^{3/2} \lambda_B$	z_B

7.13. Plasma physics

energy of particle; <i>énergie d'une particule</i>	ε
dissociation energy (e.g. of molecule X); <i>énergie de dissociation (par ex., d'une molécule X)</i>	$E_d, E_d(X)$
electron affinity; <i>affinité électronique</i>	E_{ea}
ionization energy; <i>énergie d'ionisation</i>	E_i
degree of ionization; <i>degré d'ionisation</i>	x
charge number of ion (positive or negative); <i>charge ionique (positif ou négatif)</i>	z
number density of ions of charge number z ; <i>densité ionique des ions de charge z †</i>	n_z
degree of ionization for charge number $z \geq 1$; <i>degré d'ionisation pour un nombre de charge $z \geq 1$:</i> $x_z = n_z / (n_z + n_{z-1})$	x_z
neutral particle temperature; <i>température des neutres</i>	T_n
ion temperature; <i>température ionique</i>	T_i
electron temperature; <i>température électronique</i>	T_e
electron number density; <i>densité électronique</i>	n_e
electron plasma circular frequency; <i>fréquence de plasma:</i> $\omega_{pe}^2 = n_e e^2 / \varepsilon_0 m_e$	ω_{pe}
Debye length; <i>longueur de Debye</i>	λ_D
charge of particle; <i>charge d'une particule</i>	
electron cyclotron circular frequency; <i>fréquence cyclotron électronique</i> : $\omega_{ce} = (e/m_e) B$	ω_{ce}
ino cyclotron circular frequency; <i>fréquence cyclotron ionique</i> : $\omega_{ci} = (ze/m_i) B$	ω_{ci}
reduced mass; <i>masse réduite</i> : $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$	μ, m_r
impact parameter; <i>paramètre d'impact</i>	b
mean free path; <i>libre parcours moyen</i>	l, λ
collision frequency; <i>fréquence de collision</i>	ν_{coll}, ν_c
mean time interval between collisions; <i>intervalle de temps moyenne entre collisions</i> : $\tau_{coll} = 1/\nu_{coll}$	τ_{coll}, τ_c
cross section; <i>section efficace</i> : $\sigma = 1/\ln$	σ

†) When only singly charged ions need to be considered, n_{-1} and n_{+1} may be represented by n_- and n_+ .

(electron) ionization efficiency; <i>efficacité d'ionisation (électronique)</i> : $s_e = (\rho_0/\rho) dN/dx$	s_e
(dN : number of ion pairs formed by an ionizing electron travelling through dx in the plasma at gas density ρ ; ρ_0 : gas density at $p_0=1$ Torr, $T_0=273,15$ K)	
rate coefficient; <i>taux de réaction</i>	k
one-body rate coefficient; <i>taux de réaction unimoléculaire</i> : $-dn_A/dt = k_m n_A$	k_m
relaxation time; <i>temps de relaxation</i> : (e.g. $\tau = 1/k_m$)	τ
two-body rate coefficient, binary rate coefficient; <i>taux de réaction binaire</i> : (e.g. $X + Y \rightarrow XY + hv$) $dn_{XY}/dt = k_b n_X n_Y$	k_b
three-body rate coefficient, ternary rate coefficient; <i>taux de réaction ternaire</i> : (e.g. $X + Y + M \rightarrow XY + M^*$) $dn_{XY}/dt = k_t n_M n_X n_Y$	k_t
Townsend (electron) ionization coefficient; <i>coefficient de Townsend</i> †)	α
Townsend (ion) ionization coefficient; <i>coefficient ionique de Townsend</i>	β
secondary electron emission coefficient; <i>taux d'émission secondaire</i>	γ
drift velocity; <i>vitesse de mouvement</i>	v_{dr}
mobility; <i>mobilité</i> : $\mu = v_{dr}/E$	μ
positive or negative ion diffusion coefficient; <i>coefficient de diffusion des ions</i>	D_+, D_-
electron diffusion coefficient; <i>coefficient de diffusion des électrons</i>	D_e
ambipolar (ion—electron) diffusion coefficient; <i>coefficient de diffusion ambipolaire</i> : $D_a = (D_+ \mu_e + D_e \mu_+)/(\mu_+ + \mu_e)$	D_a, D_{amb}
characteristic diffusion length; <i>longueur caractéristique de diffusion</i>	L_D, λ
ionization frequency; <i>fréquence d'ionisation</i>	ν_i
ion—ion recombination coefficient; <i>coefficient de recombinaison ion—ion</i> : $dn_-/dt = -\alpha_i n_- n_+$	α_i
electron—ion recombination coefficient; <i>coefficient de recombinaison électron—ion</i> : $dn_e/dt = -\alpha_e n_e n_+$	α_e
plasma pressure; <i>pression cinétique du plasma</i>	p
magnetic pressure; <i>pression magnétique</i> : $p_m = B^2/2\mu$ (μ : permeability)	p_m
magnetic pressure ratio; <i>coefficient β</i> : $\beta = p/p_m$ (p_m : magnetic pressure outside the plasma)	β
magnetic diffusivity; <i>diffusivité magnétique</i> : $\nu_m = 1/\mu\sigma$ (σ : electric conductivity; μ : permeability)	ν_m, η_m
Alfvén speed; <i>vitesse d'Alfvén</i> : $v_A = B/(\mu\rho)^{1/2}$ (ρ : (mass) density; μ : permeability)	v_A

†) The same name is also used for $\eta = \alpha/E$, where E denotes electric field strength.

7.14. Dimensionless parameters †)

1. Momentum transport

Reynolds number; <i>nombre de Reynolds</i> : $Re = vl/\nu$	<i>Re</i>
Euler number; <i>nombre d'Euler</i> : $Eu = \Delta p/\rho v^2$	<i>Eu</i>
Froude number; <i>nombre de Froude</i> : $Fr = v/(lg)^{-1/2}$	<i>Fr</i>
Grashof number; <i>nombre de Grashof</i> : $Gr = l^3 g \gamma \Delta T/\nu^2$	<i>Gr</i>
Weber number; <i>nombre de Weber</i> : $We = \rho v^2 l/\sigma$	<i>We</i>
Mach number; <i>nombre de Mach</i> : $Ma = v/c$	<i>Ma</i>
Knudsen number; <i>nombre de Knudsen</i> : $Kn = \lambda/l$	<i>Kn</i>
Strouhal number; <i>nombre de Strouhal</i> : $Sr = lf/v$	<i>Sr</i>

where the symbols used in the definitions denote, respectively, l : a characteristic length; v : a characteristic velocity; ΔT : a characteristic temperature difference; Δp : pressure difference; ρ : (mass) density; η : viscosity; ν : kinematic viscosity (η/ρ); σ : surface tension; g : acceleration of free fall; γ : cubic expansion coefficient ($-\rho^{-1}(\partial\rho/\partial T)_p$); λ : mean free path; f : a characteristic frequency; c : velocity of sound. $\Delta\rho/\rho$ equals $\gamma\Delta T$.

2. Transport of heat

Fourier number; <i>nombre de Fourier</i> : $Fo = a\Delta t/l^2$	<i>Fo</i>
Péclet number; <i>nombre de Péclet</i> : $Pe = vl/a = Re \cdot Pr$	<i>Pe</i>
Rayleigh number; <i>nombre de Rayleigh</i> : $Ra = l^3/g\gamma\Delta T/\nu a = Gr \cdot Pr$	<i>Ra</i>
Nusselt number; <i>nombre de Nusselt</i> : $Nu = h/\lambda$	<i>Nu</i>
Stanton number; <i>nombre de Stanton</i> : $St = h/\rho v c_p = Nu \cdot Pe^{-1}$	<i>St</i>

where the symbols used in the definitions denote, respectively, l : a characteristic length; v : a characteristic velocity; Δt : a characteristic time interval; ΔT : a characteristic temperature difference; g : acceleration of free fall; ρ : (mass) density; η : viscosity; ν : kinematic viscosity (η/ρ); c_p : specific heat capacity at constant pressure; γ : cubic expansion coefficient ($-\rho^{-1}(\partial\rho/\partial T)_p$); λ : thermal conductivity; a : thermal diffusivity ($\lambda/\rho c_p$); h : coefficient of heat transfer (heat/(time \times cross sectional area \times temperature difference)).

3. Transport of matter in a binary mixture

Fourier number for mass transfer; <i>nombre de Fourier pour transfert de masse</i> : $Fo^* = D\Delta t/l^2 = Fo/Le$	<i>Fo</i> *
Péclet number for mass transfer; <i>nombre de Péclet pour transfert de masse</i> : $Pe^* \times vl/D = Re \cdot Sc = Pe \cdot Le$	<i>Pe</i> *
Grashof number for mass transfer; <i>nombre de Grashof pour</i>	
Nusselt number for mass transfer; <i>nombre de Nusselt pour transfert de masse</i> : $Nu^* = kl/\rho D$	<i>Nu</i> *
Stanton number for mass transfer; <i>nombre de Stanton pour transfert de masse</i> : $St^* = k/\rho v = Nu^*/Pe^*$	<i>St</i> *

†) These symbols are those recommended in the International Standard I.S.O. 31 Part XII.

where the symbols used in the definitions denote, respectively, l : a characteristic length; v : a characteristic velocity; Δt : a characteristic time interval; Δx : a characteristic difference of mole fraction; g : acceleration of free fall; ρ : (mass) density; ν : kinematic viscosity (η/ρ); β' : $\beta' = -\rho^{-1}(\partial\rho/\partial x)_{T,p}$; D : diffusion coefficient; k : mass transfer coefficient (mass/(time \times cross sectional area \times mole fraction difference)); γ : cubic expansion coefficient ($-\rho^{-1}(\partial\rho/\partial T)_p$). The quantity $-\Delta\rho/\rho$ equals $\gamma\Delta T + \beta'\Delta x$.

4. Dimensionless constants of matter

Prandtl number; <i>nombre de Prandtl</i> : $Pr = \nu/a$	Pr
Schmidt number; <i>nombre de Schmidt</i> : $Sc = \nu/D$	Sc
Lewis number; <i>nombre de Lewis</i> : $Le = a/D = Sc/Pr$	Le

where the symbols used in the definitions denote, respectively, ρ : (mass) density; η : viscosity; ν : kinematic viscosity (η/ρ); D : diffusion coefficient; c_p : specific heat capacity at constant pressure; λ : thermal conductivity; a : thermal diffusivity ($\lambda/\rho c_p$).

5. Magnetohydrodynamics

Magnetic Reynolds number; <i>nombre de Reynolds magnétique</i> : $Rm = v\mu\sigma l$	Rm
Alfvén number; <i>nombre d'Alfvén</i> : $Al = v/v_A$	Al
Hartmann number; <i>nombre de Hartmann</i> : $Ha = Bl(\sigma/\rho\nu)^{1/2}$	Ha
Cowling number (second Cowling number); <i>nombre de Cowling (deuxième nombre de Cowling)</i> : $Co = B^2/\mu\rho v^2 = Al^{-2}$	Co, Co_2
first Cowling number; <i>premier nombre de Cowling</i> : $Co_1 = B^2 l \sigma / \rho v = Rm \cdot Co_2 = Ha^2 / Re$	Co_1

where the symbols used in the definitions denote, respectively, ρ : (mass) density; l : a characteristic length; v : a characteristic velocity; η : viscosity; ν : kinematic viscosity (η/ρ); μ : magnetic permeability; B : magnetic flux density; σ : electric conductivity; v_A : Alfvén speed ($B(\rho\mu)^{-1/2}$).

8. RECOMMENDED MATHEMATICAL SYMBOLS

8.1. General symbols

equal to; <i>égal à</i>	$=$
not equal to; <i>différent de</i>	\neq
identically equal to; <i>égal identiquement à</i>	\equiv
by definition equal to; <i>égal par définition à</i>	$\stackrel{\text{def}}{=}$
corresponds to; <i>correspond à</i>	\triangleq
approximately equal to; <i>égal environ à</i>	\approx
asymptotically equal to; <i>asymptotiquement égal à</i>	\asymp
proportional to; <i>proportionnel à</i>	\sim, \propto
approaches; <i>tend vers</i>	\rightarrow
greater than; <i>supérieur à</i>	\succ

less than; <i>inférieur à</i>	$<$
much greater than; <i>tres supérieur à</i>	\gg
much less than; <i>tres inférieur à</i>	\ll
greater than or equal to; <i>supérieur ou égal à</i>	\geq, \equiv, \supseteq
less than or equal to; <i>inférieur ou égal à</i>	\leq, \equiv, \subseteq
plus; <i>plus</i>	$+$
minus; <i>moins</i>	$-$
plus or minus; <i>plus ou moins</i>	\pm
a multiplied by b ; <i>a multiplié par b</i>	$ab, a \cdot b, a \times b$
a divided by b ; <i>a divisé par b</i>	$a/b, \frac{a}{b}, ab^{-1}$
ratio of the circumference of a circle to its diameter; <i>rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre</i>	π
a raised to the power n ; <i>a puissance n</i>	a^n
magnitude of a ; <i>valeur absolue de a</i>	$ a $
square root of a ; <i>racine carrée de a</i>	$\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, a^{1/2}$
mean value of a ; <i>valeur moyenne de a</i>	$\bar{a}, \langle a \rangle$
factorial p ; <i>factorielle p</i>	$p!$
binomial coefficient; <i>coefficient binomial: n!/p!(n-p)!</i>	$\binom{n}{p}$
infinity; <i>infini</i>	∞

8.2. Letter symbols

Letter symbols and letter expressions for *mathematical operations* should be written in *roman* (i.e. *upright*) type.

exponential of x ; <i>exponentielle de x</i>	$\exp x, e^x$
base of natural logarithms; <i>base des logarithmes népériens</i>	e
logarithm to the base a of x ; <i>logarithme de base a de x</i>	$\log_a x$
natural logarithm of x ; <i>logarithme népérien de x</i>	$\ln x, \log_e x$
common logarithm of x ; <i>logarithme décimal de x</i>	$\lg x, \log_{10} x$
binary logarithm of x ; <i>logarithme binaire de x</i>	$\lg_2 x, \log_2 x$
summation; <i>somme</i>	\sum
product; <i>produit</i>	\prod
finite increase of x ; <i>accroissement fini de x</i>	Δx †)
variation of x ; <i>variation de x</i>	δx
total differential of x ; <i>différentielle totale de x</i>	dx
function of x ; <i>fonction de x</i>	$f(x), f(x)$
composite function of f and g ; <i>fonction composée de f et g:</i> $g \circ f(x) = g(f(x))$	$g \circ f$
limit of $f(x)$; <i>limite de f(x)</i>	$\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
derivative of f ; <i>dérivée de f</i>	$\frac{df}{dx}, df/dx, f'$

†) Greek capital delta, not triangle.

partial derivative of f ; <i>dérivée partielle de f</i>	$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\partial f/\partial x$, $\partial_x f$, f_x
total differential of f ; <i>différentielle totale de f</i> : $df(x, y) = (\partial f/\partial x)_y dx + (\partial f/\partial y)_x dy$	df
variation of f ; <i>variation de f</i>	δf
Dirac delta function; <i>fonction delta de Dirac</i> $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$	$\delta(x)$, $\delta(\mathbf{r})$
Kronecker delta symbol; <i>symbole delta de Kronecker</i>	δ_{ij}
Unit step function; <i>fonction unité</i> : $\varepsilon(t) = 1$ for $t > 0$, $\varepsilon(t) = 0$ for $t < 0$	$\varepsilon(t)$
signum a ; <i>signum a</i> : $\operatorname{sgn} a = a/ a $ for $a \neq 0$	$\operatorname{sgn} a$
greatest integer $\leq a$; <i>le plus grand entier $\leq a$</i>	$\operatorname{ent} a$

8.3. Circular and hyperbolic functions

sine of x , <i>sinus x</i>	$\sin x$
cosine of x , <i>cosinus x</i>	$\cos x$
tangent of x , <i>tangente x</i>	$\tan x$, $\operatorname{tg} x$
cotangent of x , <i>cotangente x</i>	$\cot x$, $\operatorname{ctg} x$
secant of x , <i>sécante x</i>	$\sec x$
cosecant of x , <i>cosécante x</i>	$\operatorname{cosec} x$

It is recommended to use for the *inverse circular functions* the symbolic expressions for the corresponding circular function preceded by the letters: arc

Examples: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, etc.

It is recommended to use for the *hyperbolic functions* the symbolic expressions for the corresponding circular function, followed by the letter: h

Examples: $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, etc.

It is recommended to use for the *inverse hyperbolic functions* the symbolic expression for the corresponding hyperbolic function preceded by the letters: ar

Examples: $\operatorname{arsinh} x$, $\operatorname{arcosh} x$, etc.

8.4. Complex quantities

imaginary unit; <i>unité imaginaire</i> ($i^2 = -1$)	i , j
real part of z ; <i>partie réelle de z</i>	$\operatorname{Re} z$, z'
imaginary part of z ; <i>partie imaginaire de z</i>	$\operatorname{Im} z$, z''
modulus of z ; <i>module de z</i>	$ z $
phase, argument of z ; <i>phase, argument de z</i> : $z = z \exp i\varphi$	$\arg z$, φ
complex conjugate of z , conjugate of z ; <i>complexe conjugué de z, conjugué de z</i>	z^*

Remark: Sometimes the notation \bar{z} is used for the complex conjugate of z .

8.5. Symbols for special values of periodic quantities

Symbols for special values of periodic quantities are given in table 3.

TABLE 3

	case A*)	case B*)
instantaneous value; <i>valeur instantanée</i>	x	x
r.m.s. value**); <i>valeur efficace</i>	\tilde{x}	X
maximum value†) <i>valeur maximale</i>	\hat{x}	\hat{x}, \hat{X}
mean value††) <i>valeur moyenne</i>	$\bar{x}, \langle x \rangle$	$\bar{x}, \langle x \rangle$

*) A is the case in which only a lower case or only a capital letter may be used for the quantity. B is the case in which both, lower case and capital letters, may be used for the same quantity.

**) The r.m.s. value is here defined as

$$\tilde{x} = \left(T^{-1} \int_0^T [x(t)]^2 dt \right)^{1/2};$$

the symbols x_{rms} and x_{eff} are also used.

†) The minimum value of x may be indicated by x_{min} or \hat{x} .

††) The mean value is here defined as

$$\bar{x} = T^{-1} \int_0^T x(t) dt.$$

8.6. Vector calculus *)

vector; *vecteur*

absolute value; *valeur absolue*

unit vector; *vecteur unitaire*: $a/|a|$

unit vectors; *vecteurs unitaires*

scalar product of a and b ; *produit scalaire de a et b*

vector product of a and b ; *produit vectoriel de a et b*

dyadic product of a and b ; *produit dyadique de a et b*

differential vector operator, nabla; *opérateur vectoriel*,

nabla

gradient; *gradient*

divergence; *divergence*

curl; *rotationnel*

a, A

$|A|, A$

e_a

e_x, e_y, e_z, i, j, k †)

$a \cdot b$

$a \times b$ $a \wedge b$

ab

$\partial/\partial r, \nabla$

$\text{grad } \varphi, \nabla \varphi$

$\text{div } A, \nabla \cdot A$

$\text{curl } A, \text{rot } A, \nabla \times A$

*) See also sections 1.2.3. and 1.3.2.

†) l_x, l_y, l_z are also used.

Laplacian; *Laplacien*
 D'Alembertian; *D'Alembertien*
 second order tensor; *tenseur du second ordre*
 scalar product of tensors **S** and **T**; *produit scalaire des tenseurs S et T*: $(\sum_{i,k} S_{ik} T_{ki})$
 tensor product of tensors **S** and **T**; *produit tensoriel des tenseurs S et T*: $(\sum_k S_{ik} T_{kj})$
 product of tensor **S** and vector **A**; *produit du tenseur S et vecteur A*: $(\sum_k S_{ik} A_k)$

$$\Delta \varphi, \nabla^2 \varphi$$

$$\square \varphi$$

$$\mathbf{A}$$

$$\mathbf{S}:\mathbf{T}$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}$$

8.7. Matrix calculus

matrix; *matrice*

product of **A** and **B**: *produit de A et B*

inverse of **A**: *inverse de A*

unit matrix; *matrice unité*

transpose of matrix **A**: *matrice transposée de A*: $\tilde{A}_{ij} = A_{ji}$

complex conjugate of **A**; *matrice complexe conjuguée de A*: $A_{ij}^* = (A_{ij})^*$

Hermitian conjugate of **A**; *matrice conjuguée Hermitienne de A*: $A_{ij}^\dagger = A_{ji}^*$

determinant of **A**; *déterminant de A*

trace of **A**; *trace de A*

Pauli matrices; *matrices de Pauli*:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

unit matrix; *matrice unité*: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dirac (4×4) matrices; (4×4) *matrices de Dirac* †):

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$A$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$AB$$

$$A^{-1}$$

$$E, I$$

$$\tilde{A}$$

$$A^*$$

$$A^\dagger$$

$$\det A$$

$$\text{Tr } A$$

$$\sigma,$$

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$$

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

$$I$$

$$\alpha$$

$$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$$

$$\beta$$

8.8. Theory of sets

is an element of; *est un élément de*: $x \in A$

is not an element of, *n'est pas un élément de*: $x \notin A$

contains as element; *contient comme élément*: $A \ni x$

set of elements; *ensemble des éléments*

$$\in$$

$$\notin$$

$$\ni$$

$$\{a_1, a_2, \dots\}$$

†) Sometimes a different representation is used.

the set of rational numbers; <i>ensemble des nombres rationnels</i>	\mathbb{Z}
the set of real numbers; <i>ensemble des nombres réels</i>	\mathbb{Q}
the set of complex numbers; <i>ensemble des nombres complexes</i>	\mathbb{R}
set of elements of A for which $p(x)$ is true; <i>ensemble des éléments de A pour lesquels $p(x)$ est vrai</i>	\mathbb{C}
is contained as subset in; <i>est contenu comme sous-ensemble dans: $B \subseteq A$</i>	$\{x \in A p(x)\}$
contains; <i>contient: $A \supseteq B$</i>	$\subseteq (\subset)$
contains; <i>contient: $A \supseteq B$</i>	$\supseteq (\supset)$
is properly contained in; <i>est strictement contenu dans</i>	$\subset (\subsetneq)$
contains properly; <i>contient strictement</i>	$\supset (\supsetneq)$
union; <i>réunion: $A \cup B = \{x x \in A \text{ or } x \in B\}$</i>	\cup
intersection; <i>intersection: $A \cap B = \{x x \in A \text{ and } x \in B\}$</i>	\cap
difference; <i>différence: $A \setminus B = \{x x \in A \text{ and } x \notin B\}$</i>	\setminus
complement of; <i>complément de: $\complement A = \{x x \notin A\}$</i>	\complement

8.9. Symbolic logic

conjunction; <i>$p \wedge q$ means “p and q”; <i>conjonction: $p \wedge q$ signifie “p et q”</i></i>	\wedge
disjunction; <i>$p \vee q$ means “p or q or both”; <i>disjonction: $p \vee q$ signifie “p ou q ou les deux”</i></i>	\vee
negation; <i>négation</i>	\neg
implication; <i>implication</i>	\Rightarrow
equivalence, bi-implication; <i>équivalence, bi-implication</i>	\Leftrightarrow
universal quantifier; <i>quantificateur universel</i>	\forall
existential quantifier; <i>quantificateur existentiel</i>	\exists

9. INTERNATIONAL SYMBOLS FOR UNITS

9.1. Unit systems

In a system of physical quantities and equations between them, a certain number of quantities, which by *convention* are regarded as dimensionally independent, form a set of *base quantities* for the whole system. All other quantities can be defined as *derived quantities* in terms of the base quantities and can be expressed in terms of powers of the base quantities by algebraic relations.

A *coherent system of units* is a system, based on a certain set of base units well defined in terms of actual physical phenomena, in which all *derived units* are expressed as products of powers of the base units by algebraic relations, analogous to the corresponding quantities, dropping numerical factors.

The expression of a quantity as a product of powers of the base quantities (neglecting their vectorial or tensorial character and all numerical factors including

their sign) is called the *dimensional product* or the *dimension* of the quantity with respect to the chosen set of base quantities or base dimensions. The exponents of the powers, to which the various base quantities or base dimensions are raised, are called the *dimensional exponents*.

Physical quantities, which have as their dimension a product of powers of the base quantities or base dimensions with all dimensional exponents equal to zero, are called *dimensionless quantities* or *quantities of the dimension 1*.

The number of the base units of the unit system, coherent with respect to the system of quantities and equations in question, is equal to that of the corresponding set of base quantities. The base units themselves are well defined samples of the base quantities: base quantity and corresponding base unit are of the same dimension.

A derived unit, i.e. the unit for a derived quantity of the coherent unit system, is formed as a product of powers of the base units, with the same exponents as those in the product of powers of the base quantities in the algebraic expression for the derived quantity in question, and without introducing numerical factors. Derived units and their symbols are expressed algebraically in terms of base units and their symbols, respectively, by means of the mathematical signs for multiplication and division. Several of these algebraic expressions for derived units in terms of base units can be replaced by special names and their symbols which can themselves be used to form other derived units and their symbols, respectively (see sections 9.2 and 9.3).

The values of dimensionless quantities, e.g. relative density, relative permeability or refractive index, are expressed by pure numbers. The corresponding unit, which is the ratio of a unit to itself, is the *dimensionless unit* of the coherent unit system and may be expressed by the number 1.

9.2. The International System of Units (SI)

The name *International System of Units* with the international abbreviation SI has been adopted by the Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM) in 1960. It is based on the seven base units (CGPM 1960 and 1971) listed in table 4.

The SI base units have been defined by the CGPM in the following way:

(1) metre; *mètre*

The metre is the length equal to 1 650 763,73 wavelengths in vacuum of the radiation corresponding to the transition between the levels $2p_{10}$ and $5d_5$ of the krypton-86 atom. (11th CGPM (1960), Resolution 6.)

(2) kilogram; *kilogramme*

The kilogram is the unit of mass; it is equal to the mass of the international prototype of the kilogram. (1st CGPM (1889) and 3rd CGPM (1901), Declarations.)

(3) second; *seconde*

The second is the duration of 9 192 631 770 periods of the radiation corresponding to the transition between the two hyperfine levels of the ground state of the caesium-133 atom. (13th CGPM (1967), Resolution 1.)

TABLE 4
SI base units

base quantity; <i>grandeur de base</i>	SI base unit; <i>unité de base SI</i>	
	name; <i>nom</i>	symbol; <i>symbole</i>
length; <i>longueur</i>	metre; <i>mètre</i>	m
mass; <i>masse</i>	kilogram; <i>kilogramme</i>	kg
time; <i>temps</i>	second; <i>seconde</i>	s
electric current; <i>courant électrique</i>	ampere; <i>ampère</i>	A
thermodynamic temperature; <i>température thermodynamique</i>	kelvin; <i>kelvin</i>	K
amount of substance; <i>quantité de matière</i>	mole; <i>mole</i>	mol
luminous intensity; <i>intensité lumineuse</i>	candela; <i>candela</i>	cd

(4) ampere; *ampère*

The *ampere* is that constant current which, if maintained in two straight parallel conductors of infinite length, of negligible circular cross section, and placed 1 metre apart in vacuum, would produce between these conductors a force equal to 2×10^{-7} newton per metre of length. (9th CGPM (1948), Resolutions 2 and 7.)

(5) kelvin; *kelvin*

The *kelvin*, unit of thermodynamic temperature, is the fraction $1/273,16$ of the thermodynamic temperature of the triple point of water. (13th CGPM (1967), Resolution 4.)

The 13th CGPM (1967, Resolution 3) also decided that the unit kelvin and its symbol K should be used to express an interval or a difference of temperature. *Note:* In addition to the thermodynamic temperature (symbol T), expressed in kelvins, use is also made of Celsius temperature (symbol t) defined by the equation

$$t = T - T_0,$$

where $T_0 = 273,15$ K by definition Celsius temperature is expressed in degree Celsius; *degré Celsius* (symbol $^{\circ}\text{C}$). The unit "degree Celsius" is equal to the unit "kelvin" and an interval or a difference of Celsius temperature may also be expressed in degrees Celsius.

TABLE 5.
Derived SI units with special names

quantity; <i>grandeur</i>	derived SI unit; <i>unité SI dérivée</i>			
	name; <i>nom</i>	symbol; <i>symbole</i>	expression in terms of base units; <i>expression en unités de base</i>	expression in terms of other SI units; <i>expression en d'autres unités SI</i>
plane angle; <i>angle plan</i>	radian; <i>radian</i>	rad	$\text{m} \cdot \text{m}^{-1}$	
solid angle; <i>angle solide</i>	steradian; <i>stéradian</i>	sr	$\text{m}^2 \cdot \text{m}^{-2}$	
frequency; <i>fréquence</i>	hertz; <i>hertz</i>	Hz	s^{-1}	
force; <i>force</i>	newton; <i>newton</i>	N	$\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	J/m
pressure; <i>pression</i>	pascal; <i>pascal</i>	Pa	$\text{m}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	N/m ²
energy, work, quantity of heat; <i>énergie, travail, quantité de chaleur</i>	joule; <i>joule</i>	J	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	N · m
power, radiant flux; <i>puissance, flux énergétique</i>	watt; <i>watt</i>	W	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$	J/s
quantity of electricity, electric charge; <i>quantité d'électricité, charge électrique</i>	coulomb; <i>coulomb</i>	C	$\text{s} \cdot \text{A}$	A · s
electric potential, potential difference, electromotive force; <i>tension électrique, différence de potentiel, force électromotrice</i>	volt; <i>volt</i>	V	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$	W/A
capacitance; <i>capacité électrique</i>	farad; <i>farad</i>	F	$\text{m}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$	C/V
electric resistance; <i>résistance électrique</i>	ohm; <i>ohm</i>	Ω	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}$	V/A
conductance; <i>conductance</i>	siemens; <i>siemens</i>	S	$\text{m}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{A}^2$	A/V
magnetic flux; <i>flux d'induction magnétique</i>	weber; <i>weber</i>	Wb	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$	V · s

TABLE 5 (CONTINUED)

quantity; <i>grandeur</i>	derived SI unit; <i>unité SI dérivée</i>			
	name; <i>nom</i>	symbol; <i>symbole</i>	expression in terms of base units; <i>expression en unités de base</i>	expression in terms of other SI units; <i>expression en d'autres unités SI</i>
magnetic flux density; <i>induction magnétique</i>	tesla; <i>tesla</i>	T	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$	Wb/m
inductance; <i>inductance</i>	henry; <i>henry</i>	H	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$	Wb/A
luminous flux; <i>flux lumineux</i>	lumen; <i>lumen</i>	lm		cd · sr
illuminance; <i>éclairement lumineux</i>	lux; <i>lux</i>	lx		$\text{m}^{-2} \cdot \text{cd} \cdot \text{sr}$
activity; <i>activité</i>	becquerel; <i>becquerel</i>	Bq	s^{-1}	
absorbed dose; <i>dose absorbée</i>	gray; <i>gray</i>	Gy	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	J/kg

(6) mole; *mole*

The mole is the amount of substance of a system which contains as many elementary entities as there are atoms in 0.012 kilogram of carbon 12

When the mole is used, the elementary entities must be specified and may be atoms, molecules, ions, electrons, other particles, or specified groups of such particles.

The mole is a base unit of the International System of Units. (14th CGPM (1971), Resolution 3.)

(7) candela; *candela*

The candela is the luminous intensity, in the perpendicular direction, of a surface of 1/600 000 square metre of a black body at the temperature of freezing platinum under a pressure of 101 325 newtons per square metre. (13th CGPM (1967), Resolution 5.)

The coherent units of the system based on these base units are called: *SI units*. *Derived SI units having special names and symbols* are listed in table 5.

Although it might be thought that SI units can only be base units or derived units, the 11th Conférence Générale des Poids et Mesures (1960) admitted a third class of SI units called *supplementary units*, for which it declined to state, whether they were base units or derived units. To the class of supplementary units belong only the radian as SI unit for plane angle and the steradian as SI unit for solid angle; they may be regarded either as base units or as derived units.

In physics, radian and steradian are, in general, regarded as derived units (see table 5). In some special fields, e.g. in electromagnetic radiation and light or in particle scattering problems, the steradian is sometimes *formally* treated as a base unit; then the symbol sr must *not* be replaced by the number 1.

The usage of the SI units and their decimal multiples and sub-multiples formed by using the prefixes given in table 1 (see section 2.2.1) has been especially recommended.

Remark: Among the SI base units the unit of mass is the only whose name, for historical reasons, contains a prefix. Names of decimal multiples and submultiples of the SI unit of mass are formed by attaching prefixes to the word "gram" (Comité International des Poids et Mesures (CIPM) 1967, Recommendation 2).

Several *sub-systems* of the SI are used in different fields of science and technology. The two most important are:

(a) *The metre-kilogram-second system (MKS system)*

The MKS system is a coherent unit system for mechanics, based on the three base units metre, kilogram and second for the three base quantities length, mass and time.

(b) *The metre-kilogram-second-ampere system (MKSA system)*

The MKSA system is a coherent unit system for mechanics, electricity and magnetism, based on the four base units metre, kilogram, second and ampere for the four base quantities length, mass, time and electric current. This system has been given the name "*Giorgi system*" by the International Electrotechnical Commission in 1935.

9.3. The centimetre-gram-second system (CGS system)

The CGS system is a coherent system of units based on the three base units listed in table 6.

The CGS system enlarged by the kelvin (K) as unit of thermodynamic temperature (see section 9.2) and the mole (mol) as unit of amount of substance (see section 9.2) or by the candela (cd) as unit of luminous intensity (see section 9.2) is also used in *mechanics including thermodynamics or photometry*, respectively.

Derived units (from cm, g, s and cd, including sr, see section 9.2), in the field of *photometry*, having *special names and symbols* are listed in table 8.

In the field of *electricity and magnetism* several variants of the CGS unit system, to be used in connection with systems of "electric" and "magnetic" quantities and equations based on three base quantities, have been developed. For information about these three-dimensional systems of equations, quantities, and units in electricity and magnetism, see Appendix I: "Systems of Quantities and Units in Electricity and Magnetism".

The CIPM has expressed the view that it is in general preferable not to use, with the SI units and their decimal multiples and sub-

TABLE 6
CGS base units

base quantity; <i>grandeur de base</i>	base unit; <i>unité de base</i>	
	name; <i>nom</i>	symbol; <i>symbole</i>
length; <i>longueur</i>	centimetre; <i>centimètre</i>	cm
mass; <i>masse</i>	gram; <i>gramme</i>	g
time; <i>temps</i>	second; <i>seconde</i>	s

TABLE 7
Derived CGS units with special name

quantity; <i>grandeur</i>	derived CGS unit; <i>unité CGS dérivée</i>		
	name; <i>nom</i>	symbol; <i>symbole</i>	expression in terms of base units; <i>expression en</i> <i>unités de base</i>
force; <i>force</i>	dyne	dyn	$\text{cm} \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-2}$
energy; <i>énergie</i>	erg	erg	$\text{cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-2}$
viscosity; <i>viscosité</i>	poise	P	$\text{cm}^{-1} \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-1}$
kinematic viscosity; <i>viscosité cinématique</i>	stokes	St	$\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
acceleration of free fall; <i>accélération de la pesanteur</i>	gal	Gal	$\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$

TABLE 8
CGS units in photometry with special name

quantity; <i>grandeur</i>	derived unit; <i>unité dérivée</i>		
	name; <i>nom</i>	symbol; <i>symbole</i>	expression; <i>expression</i>
luminance; <i>luminance</i>	stilb	sb	$\text{cm}^{-2} \cdot \text{cd}$
illuminance; <i>éclairage lumineux</i>	phot	ph	$\text{cm}^{-2} \cdot \text{cd} \cdot \text{sr}$

multiples formed by using the prefixes given in table 1 (see section 2.2.1), derived CGS units which have special names (see tables 7 and 8 and table 13 in Appendix I). The aim of these recommendations is to secure a greater degree of uniformity, hence a better mutual understanding of the general use of units.

Nevertheless, the CIPM admits that in certain specialized fields of scientific research, in particular in theoretical physics, there may sometimes be very good reasons for using other systems or other units, e.g. CGS units—but in that case not together or mixed with units of the SI which have special names.

9.4. Other units of special interest in physics, which are neither SI nor CGS units

These units are grouped in three categories.

1. *Units of plane angle and time defined in terms of SI units, and some special names and symbols for decimal multiples or sub-multiples of SI units formed by using prefixes (see section 2.2.1).*

The CIPM (1969) recognized that users of the SI will wish to employ, for use with those of the SI, certain units, which are important and widely used; units as well as special names and symbols of units, accepted for continuing use together with the units of the SI, are listed in table 9. The combination of units of this table with SI units to form compound units should, however, be authorized only in limited cases.

Decimal multiples or sub-multiples of the time units listed in table 9 should not be formed by using the prefixes given in table 1. Forming symbols for decimal multiples or sub-multiples of units by using the symbols of the prefixes given in table 1 is not possible with symbols placed in superscript position, as e.g., $^{\circ}$, $'$ and $''$ for angle units.

2. *Units of mass and energy, whose numerical values expressed in SI units must be obtained by experiment and are therefore not known exactly.*

TABLE 9

quantity; <i>grandeur</i>	unit; <i>unité</i>		
	name; <i>nom</i>	symbol; <i>symbole</i>	definition; <i>définition</i>
plane angle; <i>angle plan</i>	degree; <i>degré</i>	$^{\circ}$	$1^{\circ} = (\pi/180) \text{ rad}$
	minute (of angle); <i>minute (d'angle)</i>	$'$	$1' = (1/60)^{\circ} = (\pi/10\,800) \text{ rad}$
	second (of angle); <i>seconde (d'angle)</i>	$''$	$1'' = (1/60)' = (\pi/648\,000) \text{ rad}$
time*); <i>temps</i>	minute; <i>minute</i>	min	1 min = 60 s
	hour; <i>heure</i>	h	1 h = 60 min = 3600 s
	day; <i>jour</i>	d	1 d = 24 h = 86 400 s
volume; <i>volume</i>	litre; <i>litre</i>	l	1 l = 1 dm ³ = 10 ⁻³ m ³
mass; <i>masse</i>	tonne; <i>tonne</i>	t	1 t = 1 Mg = 10 ³ kg

*) The general symbol for the time unit year; *année*, independent of its special definition, is *a*.

The units listed in table 10, which are important and widely used for special problems, are also accepted by the CIPM (1969) for continuing use with those of the SI.

3. Some units, defined as multiples of their corresponding SI units, the defining factor being an exact number, for quantities not contained in table 9 are listed in table 11.

TABLE 10

quantity; <i>grandeur</i>	unit; <i>unité</i>		
	name; <i>nom</i>	symbol; <i>symbole</i>	definition; <i>définition</i>
mass; <i>masse</i>	(unified) atomic mass unit; <i>unité de mass atomique (unifiée)</i>	u	$1 \text{ u} = 10^{-3} N_{\text{A}}^{-1}$ kg mol^{-1} †)
energy; <i>énergie</i>	electronvolt; <i>électronvolt</i>	eV	$1 \text{ eV} = (e/C) \text{ J}$ †)

†) For the values of the Avogadro constant, N_{A} , in mol^{-1} and the elementary charge, e , in C see Appendix II: "Fundamental Physical Constants".

In view of existing practice, the CIPM (1969) considered it preferable to keep for the time being, for use with those of the SI, the units listed in table 11, with exception of the units fermi, torr and calorie which should be avoided in favour of their corresponding SI unit or an appropriate decimal multiple or sub-multiple formed by using the prefixes.

The units listed in table 11 and accepted temporarily for use with those of the SI, eventually may be abandoned for this application in future.

APPENDIX I. SYSTEMS OF QUANTITIES AND UNITS IN ELECTRICITY AND MAGNETISM †)

The CGS unit system with the three base units centimetre, gram and second and the MKSA unit system (as a sub-system of the SI; see recommendation in section 9.2) with the four base units metre, kilogram, second and ampere correspond respectively to two different sets of equations in the field of electricity and magnetism, which are developed from three and four base quantities, respectively. These systems are called *three- and four-dimensional systems* of equations, respectively.

†) The S.U.N. Commission, after reproducing in the previous chapters all the recommendations on symbols, units, and nomenclature approved by the I.U.P.A.P., gives in this appendix some factual information about existing systems of quantities and units in the field of electricity and magnetism.

TABLE 11

quantity; <i>grandeur</i>	unit; <i>unité</i>		
	name; <i>nom</i>	symbol; <i>symbole</i>	definition; <i>définition</i>
length; <i>longueur</i>	ångström; <i>ångström</i>	Å	1 Å = 10^{-10} m
	fermi; *) <i>fermi</i>	fm	1 fermi = 10^{-15} m
area; <i>aire</i>	barn; <i>barn</i>	b	1 b = $100 \text{ fm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2$
pressure; <i>pression</i>	bar; <i>bar</i>	bar	1 bar = 10^5 Pa
	standard atmosphere; <i>atmosphère normale</i>	atm	1 atm = 101 325 Pa **)
	torr; <i>torr</i>	Torr	1 Torr = $\frac{101\,325}{760}$ Pa
quantity of heat; <i>quantité de chaleur</i>	calorie; <i>calorie</i>	cal	1 cal _{IT} = 4,186 8 J †) 1 cal _{th} = 4,184 J †)
activity of a radioactive source; <i>activité d'une source radioactive</i>	curie; <i>curie</i>	Ci	1 Ci = $3,7 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$
exposure of X or γ radiations; <i>exposition des rayonnements X ou γ</i>	röntgen; <i>röntgen</i>	R	1 R = $2,58 \times 10^{-4} \text{ C/kg}$
absorbed dose; <i>dose absorbée</i>	rad; <i>rad</i>	rad, rd	1 rad = 10^2 J/kg

*) fm is the correct symbol for femtometre; *femtomètre*: 1 fm = 10^{-15} m (see table 1 in section 2.2.1).

**) This pressure is used as the standard reference pressure.

†) These values are those for the so-called "International Table" calorie and "thermochemical calorie".

1. Systems of equations with three base quantities

Three distinct sets of equations with the three base quantities *length, time and mass* have been developed in the field of electricity and magnetism. These are:

- (1.a) The “*electrostatic system*” of equations, defining the electric charge as a derived physical quantity on the basis of Coulomb’s law for the force between two electric charges, by taking permittivity as a dimensionless quantity (relative permittivity), its value in vacuo being unity. As a consequence the square of the velocity of light in vacuo appears explicitly in some of the equations interrelating quantities of this system.
- (1.b) The “*electromagnetic system*” of equations, defining the electric current as a derived physical quantity on the basis of Ampère’s interaction law for the force between two electric current elements, by taking permeability as a dimensionless quantity (relative permeability), its value in vacuo being unity. As a consequence the square of the velocity of light in vacuo appears explicitly in some of the equations interrelating quantities of this system.
- (1.c) The “*symmetrical system*” of equations, using the electric quantities (including electric current) from system (1.a) and the magnetic quantities from system (1.b). As a result of combining the two sets of quantities the first power of the velocity of light in vacuo appears explicitly in some of the equations interrelating electric and magnetic quantities.

The equations in these three systems are usually written in the “*non-rationalized*” form, so called because in these equations factors 2π or 4π often appear in situations not involving circular or spherical symmetry, respectively. These equations are sometimes written in a “*rationalized*” form, in which these factors appear only in those equations, where they could be expected from the geometry of the system.

The basis of these considerations in which the rationalization is connected with the writing of the equations between physical quantities is in agreement with the resolution accepted by the I.U.P.A.P. in 1951 in Copenhagen:

“The General Assembly of the Union of Physics considers that, in the case that the equations are rationalized, the rationalization should be effected by the introduction of new quantities.”

(“L’Assemblée Générale de l’Union de Physique considère que, dans le cas où les équations sont rationalisées, la rationalisation doit être obtenue par l’introduction de grandeurs nouvelles.”)

When three-dimensional equations are used (e.g. in theoretical physics), one commonly uses those of the *non-rationalized three-dimensional symmetrical system*, shortly called the *Gaussian system*.

2. Systems of equations with four base quantities

In the equations with four base quantities at least one quantity of electric nature is included in the set of base quantities which are chosen here to be length, time, mass and electric current. In this system the permeability μ and the permittivity ε appear explicitly as physical quantities with dimensions in the relevant equations. The permeability of vacuum (magnetic constant) μ_0 and the permittivity of vacuum (electric constant) $\varepsilon_0 = (c^2/\mu_0)^{1/2}$ are: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m (exactly) and $\varepsilon_0 = (4\pi\zeta^2)^{-1} \times 10^{11}$ F/m $= (8.854\,187\,82 \pm 7) \times 10^{-12}$ F/m, where $\zeta = (299\,792\,458 \pm 1) \times 10^3$ is the numerical value of the velocity of light in vacuo c measured in cm/s (see Appendix II: "Fundamental Physical Constants").

When *four-dimensional equations* are used, one commonly writes these equations in the rationalized form. The use of this system of equations and quantities together with the SI units and their multiples and sub-multiples formed by using the prefixes listed in table 1 (see section 2.2.1) is especially recommended.

3. Relations between quantities in different systems of equations

Some characteristic equations between quantities of the non-rationalized three-dimensional symmetrical or Gaussian system (1.c) and the corresponding four-dimensional equations in the rationalized form are given in table 12. The Gaussian quantities defined through the three-dimensional non-rationalized symmetrical or

TABLE 12

(Non-rationalized symmetrical) Gaussian system with three base quantities (1.c)	(Rationalized) system with four base quantities	Relation between X^* and the corresponding X
$c \operatorname{rot} E^* = -\partial B^*/\partial t$ $\operatorname{div} D^* = 4\pi Q^*$ $\operatorname{div} B^* = 0$ $c \operatorname{rot} H^* = 4\pi j^* + \partial D^*/\partial t$ $F = Q^* E^* + Q^* v \times B^*/c$ $w = (E^* \cdot D^* + B^* \cdot H^*)/8\pi$ $S = c(E^* \times H^*)/4\pi$ $E^* = -\operatorname{grad} V^* - (1/c) \partial A^*/\partial t$ $B^* = \operatorname{rot} A^*$ $\varepsilon_r E^* = D^*$ $E^* = D^* - 4\pi P^*$ $B^* = \mu_r H^*$ $B^* = H^* + 4\pi M^*$ $a_0 = \hbar^2/me^2$ $\hbar c R_\infty = e^2/2a_0$ $\mu_B^* = e^* \hbar/2mc$ $\gamma^* = g(e^*/2mc)$ $\omega_L = (e^*/2mc) B^* = \mu_B^* B^*/\hbar$ $\alpha = e^2/\hbar c$ $r_e = e^2/mc^2$	$\operatorname{rot} E = -\partial B/\partial t$ $\operatorname{div} D = Q$ $\operatorname{div} B = 0$ $\operatorname{rot} H = j + \partial D/\partial t$ $F = QE + Qv \times B$ $w = (E \cdot D + B \cdot H)/2$ $S = E \times H$ $E = -\operatorname{grad} V - \partial A/\partial t$ $B = \operatorname{rot} A$ $\varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon E = D$ $\varepsilon_0 E = D - P$ $B = \mu H = \mu_0 \mu_r H$ $B = \mu_0 (H + M)$ $a_0 = \hbar^2 4\pi \varepsilon_0 / me^2$ $\hbar c R_\infty = e^2/8\pi \varepsilon_0 a_0$ $\mu_B = e\hbar/2m$ $\gamma = g(e/2m)$ $\omega_L = (e/2m) B \mu_B B/\hbar$ $\alpha = e^2/4\pi \varepsilon_0 \hbar c$ $r_e = e^2/4\pi \varepsilon_0 mc^2$	$E^*/E = (4\pi \varepsilon_0)^{1/2}$ $D^*/D = (4\pi/\varepsilon_0)^{1/2}$ $B^*/B = (4\pi/\mu_0)^{1/2}$ $H^*/H = (4\pi \mu_0)^{1/2}$ $Q^*/Q = (4\pi \varepsilon_0)^{-1/2}$ $q^*/q = (4\pi \varepsilon_0)^{-1/2}$ $j^*/j = (4\pi \varepsilon_0)^{-1/2}$ $I^*/I = (4\pi \varepsilon_0)^{-1/2}$ $V^*/V = (4\pi/\varepsilon_0)^{1/2}$ $A^*/A = (4\pi/\mu_0)^{1/2}$ $P^*/P = (4\pi \varepsilon_0)^{1/2}$ $M^*/M = (4\pi/\mu_0)^{-1/2}$ $R^*/R = 4\pi \varepsilon_0$ $\sigma^*/\sigma = (4\pi \varepsilon_0)^{-1}$ $C^*/C = (4\pi \varepsilon_0)^{-1}$ $L^*/L = 4\pi/\mu_0$ $\chi_e^*/\chi_e = \chi_m^*/\chi_m = (4\pi)^{-1}$ $e^*/e = (4\pi \varepsilon_0)^{-1/2}$ $\mu_B^*/\mu_B = (4\pi/\mu_0)^{-1/2}$ $\gamma_p^*/\gamma_p = (4\pi/\mu_0)^{-1/2}$

Gaussian system of equations (1.c) have been indicated with an asterisk (*)†), as far as they are different from their corresponding quantities of the system of rationalized four-dimensional equations. The third column of the table contains some relations between three-dimensional Gaussian quantities X^* and their corresponding four-dimensional quantities X .

4. The CGS systems of units

- (4.a) The system of "electrostatic" CGS units (e.s.u.) forms a coherent system of units in combination with the three-dimensional "electrostatic system" of equations (1.a).
- (4.b) The system of "electromagnetic" CGS units (e.m.u.) forms a coherent system of units in combination with the three-dimensional "electromagnetic system" of equations (1.b).
- (4.c) The system of "mixed" CGS units, called the system of Gaussian CGS units, consisting of the set of electric units of the system of "electrostatic" CGS units on the one hand and the set of magnetic units of the system of "electromagnetic" CGS units on the other hand, form together also a coherent system of units, when used in combination with the three-dimensional "symmetrical system" or "Gaussian system" of equations (1.c).

Special names and symbols have been given to four of the magnetic e.m.u. or Gaussian CGS units. These are given in table 13.

TABLE 13

quantity; <i>grandeur</i>	unit; <i>unité</i>	
	name; <i>nom</i>	symbol; <i>symbole</i>
H^*	oersted; <i>oersted</i> ($=\text{cm}^{-1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$)	Oe
B^*	gauss; <i>gauss</i> ($=\text{cm}^{-1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$)	G
Φ^*	maxwell; <i>maxwell</i> ($=\text{cm}^{3/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$)	Mx
F_m^*	gilbert; <i>gilbert</i> ($=\text{cm}^{-1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$)	Gi

†) The symbol Gs has also been used.

†) The symbols of the Gaussian quantities may also be distinguished from those of the four-dimensional quantities by the subscript s (for "symmetric") instead of the asterisk in right superscript position.

APPENDIX II. FUNDAMENTAL PHYSICAL CONSTANTS*)

Name and Symbol**)	Numerical Value†)	SI-Unit (Decimal Multiple)	Other unit (Decimal Multiple)
gravitational constant; <i>constante de gravitation</i> $G =$	6,672 0 4 1	$10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$	
speed of light in vacuum; <i>vitesse de la lumière dans le vide</i> $c =$	2,997 924 58 1,2	10^8 ms^{-1}	
$1/c =$	3,335 604 95 1,3	$10^{-9} \text{ m}^{-1} \text{ s}$	
$c^2 =$	8,987 551 79 5,4	$10^{16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$	
$1/c^2 =$	1,112 650 056 7	$10^{-17} \text{ m}^{-2} \text{ s}^2$	
permeability of vacuum; <i>perméabilité du vide</i> $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2 =$	4π 1,256 637 06	10^{-7} Hm^{-1} 10^{-6} Hm^{-1}	
permittivity of vacuum; <i>permittivité du vide</i> $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2 =$	8,854 187 82 7	10^{-12} Fm^{-1}	
rest mass of ^1H atom; <i>masse au repos de l'atome ^1H</i> $m(^1\text{H}) =$	1,673 559 8,5 1,007 825 036 11	10^{-27} kg	u
proton rest mass; <i>masse au repos du proton</i> $m_p =$	1,672 648 5 8 6 1,007 276 470 11	10^{-27} kg	u
neutron rest mass; <i>masse au repos du neutron</i> $m_n =$	1,674 954 3 8 6 1,008 665 012 37	10^{-27} kg	u
muon rest mass; <i>masse au repos du muon</i> $m_\mu =$	1,883 566 11 1,134 292 0 2 6	10^{-28} kg	10^{-1} u

*) New consistent values of the fundamental physical constants have been recommended by the Task Group on Fundamental Constants of the Committee on Data for Science and Technology (CODATA) of the international Council of Scientific Unions (ICSU), published in CODATA-Bulletin No. 11, December 1973. The values should serve as a standard reference set for the next several years. There are significant changes in these values from the former 1963 values recommended by the Committee on Fundamental Constants of the U.S. National Academy of Sciences—National Research Council, one of the largest being an increase of 88 ppm in the Planck constant.

**) The symbols of quantities defined in the 3-dimensional symmetric system are indicated with an asterisk (*) (compare Appendix I, section 3).

†) All uncertainties given in the table are intended to represent one standard deviation.

Name and Symbol	Numerical Value	SI-Unit (Decimal Multiple)	Other unit (Decimal Multiple)
electron rest mass; <i>masse au repos de l'électron</i> m_e	9,109 534 47 5,485 802 6 2 1	10^{-31} kg	10^{-4} u
ratio, proton mass to electron mass; <i>rapport de la masse du proton à celle de l'électron</i> m_p/m_e	1,836 151 52 70	10^3	
ratio, muon mass to electron mass; <i>rapport de la masse du muon à celle de l'électron</i> m_μ/m_e	2,067 686 5 4 7	10^3	
elementary charge; <i>charge élémentaire</i> e e^* e^*/c	1,602 189 2 4 6 4,803 242 14 1,602 189 2 4 6	10^{-19} C	10^{-10} e.s.u. 10^{-20} e.m.u.
(negative) specific electron charge; <i>charge massique (négative) de l'électron</i> e/m_e e^*/m_e $e^*/m_e c$	1,758 804 7 4 9 5,272 764 15 1,785 804 7 4 9	10^{11} C kg $^{-1}$	10^{17} e.s.u. g $^{-1}$ 10^7 e.m.u. g $^{-1}$
specific proton charge; <i>charge massique du proton</i> e/m_p e^*/m_p $e^*/m_p c$	9,578 756 27 2,871 639 8 9,578 756 27	10^7 C kg $^{-1}$	10^{14} e.s.u. g $^{-1}$ 10^3 e.m.u. g $^{-1}$
Zeeman splitting constant; <i>constante de décomposition Zeeman</i> $e/4\pi m_e c$ $e^*/4\pi m_e c^2$	4,668 604 13 4,668 604 12	10 m $^{-1}$ T $^{-1}$	10^{-5} cm $^{-1}$ e.m.u. $^{-1}$
Planck constant; <i>constante de Planck</i> h $\hbar = h/2\pi$	6,626 176 36 1,054 588 7 5 7	10^{-34} J s 10^{-34} J s	
quantum of circulation; <i>quantum de circulation</i> $h/2m_e$ h/m_e	3,636 945 5 6 0 7,273 891 12	10^{-4} J s kg $^{-1}$ 10^{-4} J s kg $^{-1}$	

Name and Symbol	Numerical Value	SI-Unit (Decimal Multiple)	Other unit (Decimal Multiple)
magnetic flux quantum; <i>quantum de flux magnétique</i>	$\Phi_0 = h/2e =$ 2,067 850 6 5 4	$10^{-15} \text{ JsC}^{-1}$	
	$h/e =$ 4,135 701 11	$10^{-15} \text{ JsC}^{-1}$	
	$h/e^* =$ 1,379 521 4		10^{-17} erg s e.s.u.^{-1}
	$hc/e^* =$ 4,135 701 11		10^{-7} erg s e.m.u.^{-1}
Josephson frequency—voltage ratio; <i>relation fréquence—tension dans l'effet Josephson</i>	$2e/h =$ 4,835 939 13	10^{14} HzV^{-1}	
first radiation constant; <i>première constante de rayonnement</i>	$c_1 = 2\pi hc^2 =$ 3,741 832 20	10^{-16} Wm^2	
	$c_1/2\pi = hc^2 =$ 5,995 310 32	10^{-17} Wm^2	
second radiation constant; <i>deuxième constante de rayonnement</i>	$c_2 = hc/k =$ 1,438 786 45	10^{-2} mK	
	$c_2/c = h/k =$ 4,799 27 15	10^{-11} sK	
constant of Wien; <i>constante de Wien</i>	$b = \lambda_{\text{max}} T =$ 2,897 790 90	10^{-3} mK	
Stefan—Boltzmann constant; <i>constante de Stefan—Boltzmann</i>	$\sigma = (\pi^2/60)k^4/\hbar^3 c^2 =$ 5,670 32 71	10^{-8} Wm^{-2} K^{-4}	
fine structure constant; <i>constante de structure fine</i>	$\alpha = \mu_0 c e^2/2h =$ 7,297 350 6 6 0	10^{-3}	
	$\alpha^2 =$ 5,325 132 6 6 2	10^{-5}	
	$\alpha^{-1} =$ 1,370 360 4 1 1	10^2	
Rydberg constant; <i>constante de Rydberg</i>	$R_\infty = \mu_0^2 m_e e^4 c^3/8h^3 =$ 1,097 373 177 83	10^7 m^{-1}	
	$R_H = R_\infty/(1 + m_e/m_p) =$ 1,096 775 854 83	10^7 m^{-1}	
Rydberg frequency; <i>fréquence de Rydberg</i>	$R'_\infty = R_\infty c =$ 3,289 842 02 25	10^{15} Hz	
	$R'_H = R_H c =$ 3,288 051 29 25	10^{15} Hz	
Bohr radius; <i>rayon de Bohr</i>	$a_0 = \alpha/4\pi R_\infty =$ 5,291 770 6 4 4	10^{-11} m 10^{-11} m	
(classical) electron radius; <i>rayon (classique) de l'électron</i>	$r_e = \alpha^2 a_0 = \alpha^3/4\pi R_\infty =$ 2,817 938 7	10^{-15} m	
Thomson cross section; <i>section efficace de Thomson</i>	$(8\pi/3)r_e^2 =$ 6,652 447 32	10^{-29} m^2	

Name and Symbol	Numerical Value	SI-Unit (Decimal Multiple)	Other unit (Decimal Multiple)
Bohr magneton; <i>magnéton de Bohr</i>			
$\mu_B = e\hbar/2m_e =$	9,274 078 36	10^{-24} JT^{-1}	
$\mu_B^* = e^*\hbar/2m_e c =$	9,274 078 36		$10^{-21} \text{ erg e.m.u.}^{-1}$
nuclear magneton; <i>magnéton nucléaire</i>			
$\mu_N = e\hbar/2m_p =$	5,050 824 20	10^{-27} JT^{-1}	
$\mu_N^* = e^*\hbar/2m_p c =$	5,050 824 20		$10^{-24} \text{ erg e.m.u.}^{-1}$
electron magnetic moment; <i>moment magnétique de l'électron</i>			
$\mu_e =$	9,284 832 36	10^{-24} JT^{-1}	
$\mu_e^* =$	9,284 832 36		$10^{-21} \text{ erg e.m.u.}^{-1}$
electron <i>g</i> -factor; <i>facteur g de l'électron</i>			
$\frac{1}{2} g_e = \mu_e/\mu_B = \mu_e^*/\mu_B^* =$	1,001 159 656 7 3 5		
proton magnetic moment; <i>moment magnétique du proton</i>			
$\mu_p = \gamma_p \hbar/2 =$	1,410 617 1 5 5	10^{-26} JT^{-1}	
$\mu_p^* = \gamma_p^* \hbar/2 =$	1,410 617 1 5 5		$10^{-23} \text{ erg e.m.u.}^{-1}$
proton magnetic moment in Bohr magnetons; <i>rapport du moment magnétique du proton au magnéton de Bohr</i>			
$\mu_p/\mu_B = \mu_p^*/\mu_B^* =$	1,521 032 209 16	10^{-3}	
proton magnetic moment in nuclear magnetons; <i>rapport du moment magnétique du proton au magnéton nucléaire</i>			
$\mu_p/\mu_N = \mu_p^*/\mu_N^* =$	2,792 845 6 1 1		
muon magnetic moment; <i>moment magnétique du muon</i>			
$\mu_\mu =$	4,490 474 18	10^{-26} JT^{-1}	
$\mu_\mu^* =$	4,490 474 18		$10^{-23} \text{ erg e.m.u.}^{-1}$
muon <i>g</i> -factor; <i>facteur g du muon</i>			
$\frac{1}{2} g_\mu =$	1,001 166 16 31		
ratio electron to proton magnetic moments; <i>rapport du moment magnétique de l'électron à celui du proton</i>			
$\mu_e/\mu_p = \mu_e^*/\mu_p^* =$	6,582 106 880 66	10^2	
ratio muon to proton magnetic moments; <i>rapport du moment magnétique du muon à celui du proton</i>			
$\mu_\mu/\mu_p = \mu_\mu^*/\mu_p^* =$	3,183 340 2 7 2		
proton gyromagnetic ratio; <i>coefficient gyromagnétique du proton</i>			
$\gamma_p =$	2,675 198 7 7 5	$10^8 \text{ s}^{-1} \text{ T}^{-1}$	
$\gamma_p^* =$	2,675 198 7 7 5		$10^4 \text{ s}^{-1} \text{ e.m.u.}^{-1}$

Name and Symbol	Numerical Value	SI-Unit (Decimal Multiple)	Other unit (Decimal Multiple)
diamagnetic shielding factor, spherical H ₂ O sample; <i>facteur d'écran diamagnétique, pour une sphère d'eau</i> $1 + \sigma(\text{H}_2\text{O}) =$	1,000 025 637 67		
proton gyromagnetic ratio (uncorrected); <i>coefficient gyromagnétique du proton (dans l'eau, non corrigé)</i> $\gamma'_p =$	2,675 130 1 7 5	$10^8 \text{ s}^{-1} \text{ T}^{-1}$	
$\gamma'_p/2\pi =$	4,257 602 12	$10^7 \text{ s}^{-1} \text{ T}^{-1}$	
$\gamma'^*_p =$	2,675 130 1 7 5		$10^4 \text{ s}^{-1} \text{ e.m.u.}^{-1}$
proton magnetic moment in nuclear magnetons (uncorrected); <i>rapport du moment magnétique du proton au magnéton nucléaire (non corrigé)</i> $\mu'_p/\mu_N = \mu'^*_p/\mu'^*_N =$	2,792 774 0 1 1		
Compton wavelengths; <i>longueurs d'onde de Compton</i> : of electron; <i>de l'électron</i> $\lambda_{C,e} = h/m_e c = \alpha^2/2R_\infty =$	2,426 308 9 4 0	10^{-12} m	
$\lambda_{C,e}/2\pi = \alpha\alpha_0 =$	3,861 590 5 6 4	10^{-13} m	
of proton; <i>du proton</i> $\lambda_{C,p} = h/m_p c =$	1,321 409 9 2 2	10^{-15} m	
$\lambda_{C,p}/2\pi =$	2,103 089 2 3 6	10^{-16} m	
of neutron; <i>du neutron</i> $\lambda_{C,n} = h/m_n c =$	1,319 590 9 2 2	10^{-15} m	
$\lambda_{C,n}/2\pi =$	2,100 194 1 3 5	10^{-16} m	
Avogadro constant; <i>constante d'Avogadro</i> $N_A =$	6,022 045 31	10^{23} mol^{-1}	
atomic mass constant, atomic mass unit; <i>constante de masse atomique, unité de masse atomique</i> $m_u = 1 \text{ u} = (10^{-3} \text{ kg mol}^{-1})/N_A =$	1,660 565 5 8 6	10^{-27} kg	

Name and Symbol	Numerical Value	SI-Unit (Decimal Multiple)	Other Unit (Decimal Multiple)
molar gas constant; <i>constante molaire de gaz</i> *) $R =$	8,314 41 26	J mol ⁻¹ K ⁻¹	
Boltzmann constant; <i>constante de Boltzmann</i> **) $k = R/N_A =$	1,380 662 44	10 ⁻²³ JK ⁻¹	
molar volume, ideal gas; <i>volum molaire, gaz parfait</i> ($T_0 = 273,15$ K, $p_0 = 101\,325$ Pa) $V_m = RT_0/p_0 =$	2,241 383 70	10 ⁻² m ³ mol ⁻¹	
Loschmidt constant; <i>constante de Loschmidt</i> $n_0 = N_A/V_m =$	2,686 754 86	10 ²⁵ m ⁻³	
Faraday constant; <i>constante de Faraday</i> $F = N_A e =$	9,648 455 27	10 ⁴ C mol ⁻¹	
$F^* = N_A e^* =$	2,892 534 8		10 ¹⁴ e.s.u. mol ⁻¹
$F^*/c = N_A e^*/c =$	9,648 455 27		10 ³ e.m.u. mol ⁻¹
Equivalent Values			
1 proton mass: $E(m_p) = m_p c^2 =$	1,503 302 8 9,382 796 27	10 ⁻¹⁰ J	10 ⁸ eV
1 neutron mass: $E(m_n) = m_n c^2 =$	1,505 374 8 9,395 731 27	10 ⁻¹⁰ J	10 ⁸ eV
1 muon mass: $E(m_\mu) = m_\mu c^2 =$	1,692 865 9 1,056 594 8 3 5	10 ⁻¹¹ J	10 ⁸ eV
1 electron mass: $E(m_e) = m_e c^2 =$	8,187 241 42 5,110 034 14	10 ⁻¹⁴ J	10 ⁵ eV
1 atomic mass unit: $E(u) = (1\,u) c^2 =$	1,492 442 8 9,315 016 26	10 ⁻¹⁰ J	10 ⁸ eV

*) The values of the molar gas constant expressed by use of the energy units litre atmosphere (1 atm), thermochemical calorie (cal_{th}), 15°-calorie (cal₁₅), and International Steam Table calorie (cal_{IT}) are:

$$R = 8,205\,68 \times 10^4 \text{ l} \cdot \text{atm mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 1,987\,19 \text{ cal}_{\text{th}} \text{ mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 1,986\,48 \text{ cal}_{15} \text{ mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 1,985\,86 \text{ cal}_{\text{IT}} \text{ mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

**) The values of the Boltzmann constant expressed by use of the energy units litre atmosphere (1 atm), thermochemical calorie (cal_{th}), 15°-calorie (cal₁₅), and International Steam Table calorie (cal_{IT}) are:

$$k = 1,362\,61 \times 10^{-19} \text{ l} \cdot \text{atm K}^{-1} = 3,299\,86 \times 10^{-24} \text{ cal}_{\text{th}} \text{ K}^{-1} = 3,298\,68 \times 10^{-24} \text{ cal}_{15} \text{ K}^{-1} = 3,297\,65 \times 10^{-24} \text{ cal}_{\text{IT}} \text{ K}^{-1}.$$

Equivalent Values		Numerical Value	SI-Unit (Decimal Multiple)	Other Unit (Decimal Multiple)
1 kilogram:	$E(\text{kg}) = (1 \text{ kg}) c^2 =$	8,987 552 54 5,609 545 16	10^{16} J	10^{35} eV
1 hertz:	$E(\text{Hz}) = (1 \text{ Hz}) h =$	6,626 176 36 4,135 701 11	10^{-34} J	10^{-15} eV
1 electron volt:	$\nu(\text{eV}) = 1 \text{ eV}/h =$	2,417 969 6 6 3	10^{14} Hz	
1 reciprocal metre:	$E(\text{m}^{-1}) = (1 \text{ m}^{-1}) hc =$	1,986 478 11 1,239 852 3	10^{-25} J	10^{-6} eV
1 electron volt:	$\sigma(\text{eV}) = 1 \text{ eV}/hc =$	8,065 479 21	10^5 m^{-1}	
1 kelvin:	$E(\text{K}) = (1 \text{ K}) k =$	1,380 662 44 8,617 35 28	10^{-22} J	10^{-5} eV
1 electron volt:	$T(\text{eV}) = 1 \text{ eV}/k =$	1,160 450 36	10^4 K	
1 rydberg ($1 \text{ Ry} = R_\infty$):	$E(\text{Ry}) = (1 \text{ Ry}) hc =$	2,179 907 12 1,360 580 36	10^{-18} J	10 eV

KÖNYVISMERTETÉS

A. Benninghoven, C. A. Evans, R. A. Powell, R. Shimizu, H. A. Storms (editors):

Secondary Ion Mass Spectrometry, SIMS—II.

Springer Series in Chemical Physics 9.

Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1979.

A szekunder ionizációs tömegspektrometria (SIMS) az utóbbi tíz évben a szilárd test fizika, kémia és anyagvizsgálat fontos eszközévé vált. Ezt jelzi, hogy 1979-ben immár másodízben rendezték meg az önálló nemzetközi SIMS konferenciát. A Springer-Verlag szép kiállítású könyv formájában jelentette meg a konferencia több mint 80 előadásának teljes szövegét. A könyv tehát összefoglalja mindazokat a legfontosabb eredményeket, amelyeket a szekunder ionemisszió elvi kérdései és gyakorlati alkalmazásai területén a világon az utóbbi években elértek.

A kötet első fejezete a SIMS elméleti alapjaival foglalkozik, és bár számos kérdést tárgyal (a porlasztás modellezése, negatív ionok képződése stb.), meg kell állapítanunk, hogy e tekintetben a konferencia jelentős újdonságot nem hozott. Szorosan összefügg az elméleti kérdésekkel a könyv II. fejezete, amelyben a SIMS kvantitatívításának kérdéseivel foglalkozó közlemények vannak. Ezek közül a legtöbb információt nyújtó az a munka, amelyik 22 laboratórium tapasztalatait összegzi, és így az olvasó felmérheti a SIMS analitikai teljesítőképességét. A könyv egy-egy fejezete a készülék-szerkesztés új irányait (szekunder ionoptikák, kvadrupól tömegszűrő alkalmazása, ionképek digitalizálása stb.), valamint a felületanalitikai módszerek (SIMS, AES, XPS, LEED) kombinált alkalmazásait mutatja be.

A SIMS alkalmazási területei közül a félvezetők doppeló anyag-eloszlásának meghatározása szinte hagyományosnak mondható, ezzel a SIMS—II. külön fejezete foglalkozik számos példa és mérés ismertetésével. A mélységi koncentrácioprofilok kvantitatívítását azonban a könyv nem tárgyalja kellő súllyal. A számos metallurgiai alkalmazás (acélok analízise, korrózió, fémoxidáció stb.) ugyancsak igen fontos és érdekes fejezete a kongresszus anyagának. A geológiában (VII. fejezet) a SIMS az ásványok azonosításában, in-situ izotóparány-mérésekben, geológiai kormeghatározásban hozott újat.

Hangsúlyozandó, hogy a SIMS—II. könyvben olvashatunk először részletesen a SIMS két egészen új alkalmazási területéről a nem illékony vegyületek (aminosavak, cukrok stb.) minőségi analitikai lehetőségéről, továbbá a biológiai preparátumok (csont, vér, szempigment stb.) elemeloszlásának meghatározásáról.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a SIMS—II. igen hasznos könyv azok számára, akik a szekunder ionizációs tömegspektrometria alapismereteinek birtokában a SIMS-módszer széles körű felhasználásával kívánnak megismerkedni. Megemlíthjük, hogy a magyar olvasó abban az előnyös helyzetben van, hogy az elmúlt évben idehaza két alapvető monográfia is megjelent a SIMS-ről. A SIMS—II. könyv magyar vonatkozású aktualitását adja, hogy a III. SIMS konferencia Budapesten kerül megrendezésre 1981 őszén.

Dr. Riedel Miklós

H. C. Freyhardt: Crystals 2.

Growth and Properties

Springer-Verlag, 1980.

A Springer kiadó által indított, Kristályok c., növesztéssel, tulajdonságokkal és alkalmazásokkal foglalkozó sorozat második kötete 1980-ban megjelent. Az első kötet Kristályok mágneses alkalmazások céljára címet viselte. A jelen kötet címe Növesztés és tulajdonságok.

A sorozat célja, hogy áthidalja a szakadékok kutatás és ipar között, ezért kipróbált, teljes és bevált növesztési módszereket kíván nyújtani, ugyanakkor kitérve az elmélet mellett a legszélesebb értelemben vett minősítésre és analízisre, mivel reprodukálható eredmények akkor várhatók, ha

a reális makro és mikrostruktúra, valamint a kémiai összetétel ismeretes. Figyelmet kíván fordítani az alkalmazási lehetőségekre, pl. elektronikában, lézertechnológiában, nemlineáris optikában. Ugyancsak nő az érdeklődés szerves kristályok iránt, ezért ezekkel is foglalkozni fognak.

A jelen kötet négy cikket közöl.

1. *K. Nassau, J. Nassau*: Szintetikus ékkövek és ékkőutánpótlások növesztése.

2. *E. Schönherz*: Nagy kristályok növesztése gőzfázisból.

3. *D. E. Ovsienko, G. A. Alfintsev*: Kristálynövesztés olvadékból. A kinetika és morfológia kísérleti tanulmányozása.

4. *A. H. Morrish*: Gamma-vasoxid morfológiája és fizikai tulajdonságai.

Az első cikk széles áttekintést ad a különböző ékkőként használható anyagok egykristályainak növesztéséről. Többek között bemutatja a gyémántsztézt, a kvarc hidrotermális növesztését, a rubin növesztését Verneuil módszerrel.

A második cikk elméleti áttekintés után sokféle kísérleti kivitelt tárgyal, gazdag táblázatot adva a gőzfázisból növesztett anyagokra, irodalmi utalásokkal.

A harmadik cikk a szerző saját kísérleteire alapozva anyagok széles skáláján vizsgálja az olvadási entrópia—kinetika—morfológia kapcsolatot.

A negyedik cikk a gamma vasoxidnak, ennek a mágneses rögzítésben oly fontos szerepet játszó anyagnak mikroszemcsés, epiréteges és egyéb előállítási módszereivel foglalkozik, valamint vizsgálja a szerkezet és a mágneses tulajdonságok kapcsolatát.

Úgy vélem, ez a kötet is, az egyes speciális területeken az aktuális ismeretek állásának bemutatásával, érdeklődést fog kiváltani a kristálynövesztő szakemberek körében.

Voszka R.

T. S. Sørensen (ed.):
Dynamics and Instability of Fluid Interfaces.
Proceedings, Lyngby, 1978.
Lecture Notes in Physics, Vol. 105
Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1979.

A fizikusok, meteorológusok és fizikokémikusok dániai (Lyngby, 1978. május) találkozóján rendkívül szerteágazó téma áttekintésére vállalkoztak; jól reprezentálja ezt a találkozó előadásait közreadó kötet.

Az egymás fölé rétegezett folyadékok Maragoni-féle instabilitásával két előadás is foglalkozott. *T. S. Sørensen* a Maragoni-féle és a Rayleigh—Taylor-féle instabilitás kapcsolatát vizsgálta, és megmutatta, hogy a felületi feszültség csökkenése rontja a stabilitást, ill. hogy ez a destabilizáció a mikroemulziók kialakulását segítheti. *H. Linde, P. Schwartz és H. Wilke* dolgozatának a témája a Maragoni-féle instabilitás kinetikája.

A fizika, a műszaki gyakorlat és a biológia határterületére esik *R. K. Jain, I. B. Ivanov, Ch. Maldarelli és E. Ruckenstein* dolgozatának témája: „Vékony folyadékfilmek instabilitása és elszakadása.” *A. Sanfeld, A. Steinchen, M. Hennenberg, P. M. Bisch, D. Van Lamsweerde-Gallez és W. Dalle-Vedove* dolgozata („Mechanikai, kémiai és elektromos kényszerek és a felületi hidrodinamikai instabilitás”) részletes leírását adja annak, milyen kényszerek (kémiai affinitás, abszorpció, adszorpció, gravitáció, elektromos potenciálkülönbség, dipól-orientáció, diffúzió) hogyan befolyásolják két folyadék elválasztó felületének a mozgását, ill. e mozgás instabilitását.

D. T. Wasan, N. F. Djabbarah, M. K. Vora és S. T. Shah „Felületaktív anyagok és makromolekulák dinamikai hatása a felületi viszkoelasztikus tulajdonságokra” című dolgozata is sokrétű témát ismertet: a makromolekulák nagyságrendben módosíthatják a tömegáramlást, a buborékok és a cseppek képződését, az emulziók stabilitását, a vékony rétegek kialakulását és elszakadását.

Két folyadék határfelületét három, egymást kiegészítő szempont alapján vizsgálja *M. Hennenberg, P. M. Bisch, M. Vignes-Adler és A. Sanfeld* munkája: geometriai, mechanikai és termodinamikai szempontból. Részletes analízist adja a dolgozat annak, milyen hatással vannak a felület stabilitására a felületi hullámok.

Ismét csak a Maragoni-féle instabilitás, a határfelületi áramlás a témája *M. G. Velarde* dolgozatának. Külön érdekessége munkájának a „súlytalanság” állapotában levő folyadékok viselkedésének a vizsgálata.

Milyen rezgéseket végezhet egy folyadékcsepp, amelyik másik folyadékba van ágyazva? Mely rezgései stabilisak? Ezekre a kérdésekre igyekszik választ adni — legalább speciális esetekben — *T. S. Sørensen és M. Hennenberg* dolgozata.

Nem véletlen, hogy a dolgozatok többsége több szerző munkája: a különböző tudományágak határterületére eső témák áttekintésére, ismertetésére egy szerző nem vállalkozhat.

Mi hozza közös nevezőre a különböző témájú dolgozatokat? A közegek elválasztó felületének fizikai, kémiai és hidrodinamikai leírásának igénye. A téma kísérleti és elméleti aspektusa egyenlő súllyal szerepel a kötetben.

A könyv egyaránt ajánlható fizikusoknak, kémikusoknak, mérnököknek és biológusoknak: minthogy határterületi témát ismertet — a recenzius véleménye szerint —, mindannyian találnak témájukhoz tartozó hasznos tudnivalókat a kötetben.

Szabó János

**Landolt—Börnstein: High Pressure Properties of Matter
Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology, New Series,
Group 4, Volume 4,
Springer-Verlag, 1979.**

Az anyag viselkedésének extrém körülmények között történő vizsgálatát a legutóbbi évtizedben nagy tudományos érdeklődés kísérte. Ebben is megkülönböztetett helyet foglal el az anyagok tulajdonságainak magas nyomások mellett történő vizsgálata. Mivel a jelen kötethez hasonló, az összefoglalás igényével fellépő mű ezen a területen még nem jelent meg, különösen nagy örömmel vehetjük kezünkbe a kötetet.

A 427 oldal terjedelmű mű kb. 1000, 1977-ig bezárólag megjelent dolgozat alapján 1714 rendszer adatait dolgozza fel. A bevezető a könyv egyéb fejezeteihez képest igen szűkszavú, csupán két oldalon és igen felületesen tárgyalja az allotrop és polimorf fázisátalakulások nyomásfüggését. Ez a hozzáállás azzal igazolható, hogy a nagynyomású fizika tulajdonképpen egy teljes fizika, amelynek még részleges ismertetése sem lehetséges, sőt nem is célszerű egy ilyen terjedelmű összefoglalás esetében.

A kötetben található adatok a legváltozatosabb fizikai mennyiségek nyomásfüggését tartalmazza maximum 10 kbar nyomáshatárig. A szerkesztők az adattömeget hét fejezetre osztották, amelyek közül az első fejezetek nyomásérzékeny interatomos, ill. intermolekuláris kölcsönhatásokon alapuló fizikai mennyiségekkel foglalkoznak.

Az egyes fejezetek tartalma a következő: fázisegyensúlyok adatai, termodinamikai mennyiségek, kritikus állapotathatározók feletti rendszerek termodinamikai adatai, transzportfolyamatokkal összefüggő mennyiségek, elektromos és mágneses mennyiségek, optikai mennyiségek. Az adatok legtöbbször egykomponensű, ritkábban két ill. több komponensű rendszerekre vonatkozik. A könyv végén megtalálható regiszter könnyen áttekinthető rendszerben foglalja össze a szereplő vegyületeket, ami a könyv használatát nagymértékben megkönnyíti. Ritka az összes fejezetben szereplő vegyület. Ilyen pl. a metán, a benzol, azonban különösképpen még a víz sem tartozik ide. Egy kimagadott példa; a metanol esetében az olvadáspont, a sűrűség, és a dielektromos állandó nyomásfüggései szerepelnek az adatok között.

A könyv lapozgatása közben nem alakul ki az a teljességgel kapcsolatos érzés, amelyet a sorozat egyéb tagjai szinte magától értetődő módon kiváltottak. Inkább az a vélemény alakul ki, hogy szinte valószínűtlenül kevés a közölt adatok száma és egy adott vegyület adott tulajdonságaira vonatkozó adatok megtalálása a szerencsén múlik. Ez természetesen semmivel sem kisebbíti a szerkesztők érdemeit, akik a rendelkezésükre álló objektíve korlátozott adatanyagot gondos kivitelben, jól rendszerezve vonultatták az olvasó elé.

Az ismertető éppen a sokrétűség következtében igen nehéz helyzetben van a kötet lehetséges felhasználási területeinek vázolása tekintetében. Röviden szólva a kötet szinte valamennyi szakember számára igen értékes adatgyűjtemény!

Mégis kiemelném az adatok csillagászati felhasználásának lehetőségét. Ámbár a 10 kbar felső határ távol van a többségében csillagokban észlelt értékektől, az adatok extrapolálása elméleti számítások alapját képezheti.

Raksányi Kund

**Landolt—Börnstein: Absorption Equilibria of Gases in Liquids of High Vapour pressure
Numerical Data and functional relationships in Science and Technology, Volume 4, Part 4c 2,
Springer-Verlag, 1979.**

A kötet elődje az 1976-ban megjelent 4c 2 jelzésű kötet az alacsony gőznyomású folyadékok gázabszorpciós adatait tartalmazta. Jelen kötet viszont olyan rendszereket tárgyal, amelyekben az alacsonyabban forró komponens normál állapotban gázhalmazállapotú, a magasabb forráspontú komponens pedig a fázisegyensúlyok által meghatározott állapotathatározóknál folyékony halmazállapotú.

Az 1093 oldal terjedelmű mű bevezetésében a hagyományokhoz híven részletes összefoglalást találhatunk az abszorpciós egyensúlyok termodinamikájáról, az egyensúlyokat leíró empirikus összefüggésekről, a gázok és folyadékok állapotegyenleteiről. Az egyensúlyok mérésének módszereivel azonban csupán igen rövid és főként az összefoglaló irodalmi forrásokat felsorakoztató fejezet foglalkozik. A kötet az irodalomban 1977-ig bezárólag megjelent publikációkat dolgozza fel.

A rendszerezés hierarchiája a következő: magasabban forró komponens, alacsonyabban forró komponens. Az egyes komponensek esetében: Nemes gázok, elemek, szerves vegyületek, szerves vegyületek. A kötet alfabétikus indexregisztert is tartalmaz. A tárgyalt rendszerek száma 306. Pl. metán esetében a He , $\text{N}_2 + \text{He}$, Ne , Ar , H_2 , N_2 , O_2 , és CO rendszerek adatait közli. Az egyes rendszerekre vonatkozó adatok elsősorban az egyes komponensek molszázalékban kifejezett koncentráció értékeit vagy megoldási hányadosait tartalmazzák, az állapotathatározók függvényében. Az egyes tiszta komponensekre vonatkozó lényegesebb termikus adatokat pl. kritikus pontokat, hármaspontokat, forráspontokat minden rendszer esetében külön közli. Ritkábban találkozhatunk a rendszerekre vonatkozó egyéb termikus adatokkal pl. kritikus hőmérsékletekkel. Az adatok diagramokban, vagy táblázatokban találhatók.

Ámbár az utóbbi évtizedekben nagy haladás történt egyensúlyi adatok extrapoláció vagy elméleti után történő becslésére, még hosszú időnek kell eltelnie addig, amíg az elmélet képes lesz az empirikus méréseket nélkülözni. Éppen azért kifogásolható, hogy az adatok mérésének alapjául szolgáló módszerek, továbbá azok mérési pontossága csaknem teljesen hiányzik. Ennek részleges pótlására hasznos lett volna legalább a hivatkozások teljes címét közölni, azonban az sajnálatos módon csupán a kiegészítő irodalmi források esetében valósult meg, amelyek általában éppen elméleti jellegűek, vagy az elméleti és tapasztalati eredmények egyesítésével foglalkoznak.

Ezen apró hiányosságok ellenére is megállapítható, hogy a kötet igen gondosan összeállított munka, amely elsősorban az ipari szakemberek, de ezen keresztül az egyensúlyok elméletével és gyakorlatával foglalkozó fizikai kémikusok számára is az ismeretek és adatok újabb tárházát szolgáltatja. Külön kiemelendő a szerzőkollektíva munkája, amely lehetővé tette, hogy a nagyszámú adat izléses és áttekinthető formában kerüljön az olvasó elé.

Raksányi Kund

**Landolt—Börnstein: Magnetic Properties of Free Radicals
Numerical Data and Relationships in Science and Technology, New Series, Group II,
Volume 9, Part d 1
Springer-Verlag, 1979.**

Az 1965-ben kiadott II/1 jelzésű forrásmű II/9 pótkötetét a feldolgozott adatok nagy számára való tekintettel több részre osztották. Az ismertetendő mű ezen felosztás utolsó előtti d 1 jelzésű kötete szerves anion-gyökök adatait tartalmazza. A 904 oldal terjedelmű mű 7 fejezetre oszlik. Az egyes fejezetek címei és terjedelmei a következők: Semidiones (102 oldal), Semiquinones (255 oldal), nitro compounds (296 oldal), nitroso compounds (27 oldal), hydrocarbon anion radicals (143 oldal), heterocyclic anion radicals (46 oldal). A tárgyalt gyökök száma tekintélyes, mintegy 6000—7000. Az egyes gyökök esetében, név, bruttó és szerkezeti képlet, előállítási mód, a matrix v. oldószer, a mérési módszer és hőmérséklet, a g factor, az adott atomokra vonatkozó a értékek és az irodalmi források kaptak helyet az összeállításban. Minden fejezet elején rövid útmutató található. A referenciák jegyzéke az egyes fejezetek végén található meg, címek nélkül. Az irodalom feldolgozását 1979 elejéig végezték el. Azonos v. közeli körülmények között mért értékek csupán ritka esetben találhatók, az eltéréseket indokló kritikai megjegyzések hiányoznak. A vegyületek között számos bonyolult összetételű biológiai fontosságú gyök is szerepel.

A kötetből kimaradtak a spinnel jelzett biomolekulák — ez utóbbiakra vonatkozó adatgyűjtemény megjelenésére csupán ezen sorozat keretén kívül fog sor kerülni. A záró d 2 jelzésű kötet a kationok és polionok adatait fogja tartalmazni.

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Zsoldos Lehel</i> : EXAFS: szerkezetvizsgálat a röntgen abszorpció és kiterjedt finomszerkezete alapján	1
<i>Szabó János</i> : A Zemplén-tétel	17
Symbols, Units and Nomenclature in Physics	25

KÖNYVISMERTETÉS

<i>A. Benninghoven, C. A. Evans, R. A. Powell, R. Shimizu, H. A. Storms</i> (ed.-s): Secondary Ion Mass Spectrometry, SIMS II.	85
<i>H. C. Freyhardt</i> (ed.): Crystals 2. Growth and Properties	85
<i>T. S. Sørensen</i> (ed.): Dynamics and Instability of Fluid Interfaces	86
<i>Landolt—Börnstein</i> : Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology .	87
<i>Landolt—Börnstein</i> : Absorption Equilibria of Gases in Liquids of High Vapour pressure	88
<i>Landolt—Börnstein</i> : Magnetic Properties of Free Radicals	88
<i>E. Gerlach, P. Grosse</i> (ed.-s): The Physics of Selenium and Tellurium	89
<i>David Park</i> : Classical Dynamics and its Quantum Analogues	90
<i>H. I. Schmidt</i> : Axiomatic Characterisation of Physical Geometry	90
<i>B. M. Fraeijs de Veubeke</i> : A Course in Elasticity	91
<i>G. I. Marchuk, G. A. Mikhailov, M. A. Nazaratov, R. A. Darbinjan, B. A. Kargin, B. S. Elepov</i> : The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics	91

Az összeállításban nem található regiszter, a sorozatra vonatkozó teljes regisztert a d 2 kötet fogja tartalmazni. A szerkesztőbizottság élén A. Berndt-tel, szakemberhez méltó, nagyszerű munkát végzett a kötet összeállításánál. Külön kiemelendő az egyes tételek jó kiállítású, szemléletes tálalása, melyben hű maradt a nagyszerű sorozat hagyományaihoz. Az utóbbi években a stabil gyökök elméleti és gyakorlati jelentősége rohamos emelkedésének lehetünk tanúi. Itt elsősorban az elméleti kémia számos fontos kérdésének megoldásában pl. a kémiai reakcióképesség vizsgálatánál a rövid élettartamú gyökök detektálása terén betöltött szerepükre utalok, azonban számos gyakorlati területen is, mint pl. a polimerek kémiájában, fontos szerepkört töltenek be. A kötet megjelenése így a szakemberek széles táborában nagy érdeklődésre tarthat számot.

Raksányi Kund

**E. Gerlach, P. Grosse (editors): The Physics of Selenium and Tellurium
Springer Series in Solid-State Sciences 13.
Springer-Verlag, Berlin. 1979.**

A kötet Königsteinben (NSZK) 1979. május 28—31-én tartott nemzetközi konferencia anyaga.

A témában már 8 éve nem volt nemzetközi konferencia. Az akkoriban, a Pont-á-Mousson-ban tartott tette lehetővé, hogy kitűzzék az utóbbi évek kutatómunkájának fókuszpontjait.

A Se és Te korán magára vonta a kutatók figyelmét. Alacsony szimmetriájú viszonylag egyszerű struktúrájuk ellenére először az alkali-halogenid kristályokat, mint modellanyagukat kezdték el kutatni Göttingában, Pohl vezetésével. Az a tulajdonságuk, hogy — különösen a Se — könnyen képez üveget, ma különösen érdekes.

A könyv anyagát adó konferencia egyaránt áttekinti a Se és Te kristály és üveg fizikájának jelenlegi állását. Az elektromos és a rácsdinamikai szerkezetre vonatkozó mai ismeretek mellett a két fém nagy nyomások alatt felvett módosulatai, a kémiai és a geometriai hibákra vonatkozó mai ismeretek mind helyet kapnak az alkalmazások, elsősorban az elektrografiai felhasználás mellett.

A kötet, ill. a konferencia jellemzésére egy elméleti és egy kísérleti előadást részletezünk.

6 előadásban tárgyalásra kerültek a Se és Te sáv- és kötésproblémái. A trigonális Se és Te kristálystruktúrája az atomok helikális láncainak hexagonális sorából áll. Ez a struktúra talán legjobban egy egyszerű köbös szerkezetként képzelhető el, amely trigonális Peierls torzulás alatt van úgy, hogy minden egyes atom erősen kötődik a két legközelebbi szomszédjához. A Se és Te elektron struktúráját különböző megközelítésekkel vizsgálták éveken át. A legfontosabb reális számítások a KKR közelítést, az empirikus pseudopotenciál módszert, a kémiai pseudopotenciál módszert, a self-consistent pseudopotenciál technikát, valamint az OPW és a self-consistent OPW technikát alkalmazták. Mindezek a számítások megegyeznek abban, hogy a Se és Te elektron-sűrűség állapota teli állapotként írható le, amelyet lényegében három teli valencia sáv tripletben különbölnék el, és hogy a legalacsonyabb üres sávok egy vezetési sáv tripletet képeznek. A számítások helyességét igazolják a XPS, VPS, EPM módszerekkel végzett fotoemissziós mérések.

A közvetlen gyakorlati alkalmazásra a könyv tizenkettedik fejezetéből veszünk példát. E fejezet címe: Preparálás és alkalmazások.

A szelén és vegyületeinek legismertebb alkalmazásának egyike a Xerox-szal kapcsolatos. Kévéb ismert az a fotovoltaiikus effektus, amely a tellur-fém vékony réteg kontaktusoknál fellép. Erről számol be egy bucaresti kutatócsoport. A tellurium vékonyréteget párologtatással hozták létre üvegen, csillámon, plexin és NaCl kristályon, merőleges, ill. ferde beeséssel. A tellurium rétegre merőlegesen szintén párologtatással fémek (Ag, Bi, Pb, Zn, Cu és Cd) vékonyrétegeit is felvitték. Esetükben a rétegvastagság többszáz Å-tól több mikronig változott.

A Te-réteget, a fémréteget és a kontakt rétegeket szaggattak, kb. 1 mm átmérőjű fehér fényfolttal végigseperve a fotofeszültséget egy oszcilloszkópon láthatóvá téve a román szerzők egy gyors (ugrás) és egy lassú komponenst (exponenciális) tudtak megkülönböztetni.

A szerzők megvizsgálták a jelenség időállandóságát, összevetették a fém és más alátét tellur-rétegek viselkedését.

A könyvet ismertetőben felmerült a kérdés, hogy a fotofeszültség két komponense nem csak regisztrálási effektus-e: az „ugrás” a rendszernek, mint kapacitásnak gyors feltöltődése a kapacitások arányának megfelelő-e csak, amelyet azután az ellenállások arányának megfelelő feszültség (exponenciális) megoszlása követ. — Egyéb megállapításait nem érinti ez a megjegyzés.

(T. Gy.)

David Park: Classical Dynamics and its Quantum Analogues
Lecture Notes in Physics 110.
Springer-Verlag, Berlin. 1979.

A könyv célja az, hogy megvilágítsa a klasszikus és kvantummechanika között fennálló számos analógiát, hasonlóságot, oly módon, hogy a közöttük fennálló folytonosság nyilvánvaló legyen. E kapcsolatok hangsúlyozásával a könyv mechanikakönyvként íródott olyanok számára, akik már rendelkeznek bizonyos alapvető klasszikus és kvantummechanikai ismeretekkel.

A könyv tartalmazza az elemi kvantumelmélet legalapvetőbb és leggyakrabban használt részeit, valamint a klasszikus mechanikának ezekhez kapcsolódó, ezeket megvilágító részeit is, de tartalmaz optikát is, ami a hullám és sugáropтика, illetve a hullámmechanika és a pontmechanika között fennálló kapcsolatok hasonlósága miatt természetesen illeszkedik a könyv témakörébe.

Részletesen tárgyalja a klasszikus mechanika szokásos eljárásait: a Lagrange-, Hamilton-féle elveket és a Hamilton—Jacobi módszert. Ezek során különös figyelmet szentel a különböző egzakt és közelítő megoldási módszerek bemutatásának, valamint hangsúlyozza a szimmetriák és invarianciák szerepét. A klasszikus perturbációszámítást a bolygók perihélium elfordulásának tárgyalásán illusztrálja; ennek kapcsán természetesen a relativisztikus mechanika alapjait is említi. Párhuzamosan tárgyalja a merev testek mozgásának leírását a klasszikus és kvantummechanikában és elemzi a spinorok szerepét a kétféle leírásban.

A könyv elméleti anyagát minden fejezetben számos feladat egészíti ki. A könyv tartalma és szerkezeti felépítése alapján kiválóan alkalmas arra, hogy a kvantummechanikával már megismerkedett egyetemi hallgatók elméleti fizika szeminárium keretében feldolgozzák.

Palla László

H. I. Schmidt: Axiomatic Characterization of Physical Geometry
Lecture Notes in Physics. No. 111
Springer-Verlag, 1979.

Ez a könyv a fizikai geometria megalapozásának axiomatikus megközelítését adja. A geometria a fizikai tér elmélete, amely alapvető szerepet játszik a fizikában. Minden fizikai elmélet tartalmaz geometriai fogalmakat. Ezenfelül olyan fizikai fogalmak mint az energia, impulzus, impulzuszórántum, a Noether-tétel segítségével a tér különböző fogalmainak és így megfelelő szimmetriacsoportjainak feleltethetők meg.

A szerző alapvető problémái: Hogyan értelmezhetők a geometriai fogalmak, vagyis milyen értelemben alkalmazhatók ezek a „valóságban létező dolgokra”? Honnan tudjuk, hogy a geometria „igaz”?

A szerző a fizika axiomatizálásával foglalkozó G. Ludwig professzor nyomdokain haladva kívánja axiomatikus leírását adni a laboratóriumi méretekben észlelt geometriának (L-geometria, szembeállítva a mikrovilág geometriájával: μ -geometria és az asztronómia geometriájával A-geometria). Az L-geometria az, amit a merev testekkel történő mérésekkel és műveletekkel építünk fel.

Axiomatikájának alapvető fogalmai a tartományok, befoglalás és transzport (egybevágó leképezés transzlációk és elforgatások segítségével).

A fizikai tér axiomatikus jellemzésének igénye először H. V. Helmholtz 1866-ban megfogalmazott távolságmérésre vonatkozó gondolataiban jelent meg. Ezeket a gondolatokat a matematikusok fejlesztették tovább, elsősorban S. Lie 1890-ben, és így a matematikában Helmholtz—Lie problémaként ismert. H. Freudeuthal megoldva ezt a problémát 1954-ben a legáltalánosabb alakját fogalmazta meg a fizikai geometriák axiómájának. A szerző az axiómabeli matematikai feltevéseket próbálja kézenfekvővé tenni fizikai geometriájának alapfeltevései segítségével.

A könyv a fizika, matematika és bizonyos mértékig a természetfilozófia határán mozogva adja leírását a fizikai térnek. A dolgozat rendkívül gondolatgazdag, és matematikailag nagy igényű, ezért az olvasótól sok energiát követel olvasása. A fizika matematikai axiomatizálásával foglalkozó kutatók számára hasznos olvasmány.

Horváth Zsolt

B. M. Fraeijs de Veubeke: A Course in Elasticity.

Applied Mathematical Sciences, Vol. 29.

Translated from the French by Ficken, F. A. With Editorial Assistance of Simons, D. A. 330 pp. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1979.

B. M. Fraeijs de Veubeke könyve nem csupán egy a rugalmasságtannal foglalkozó szak-könyvek sorában: kitűnik tárgyalásmódjának az eleganciájával, matematikai egzaktásával és néhány speciális alakváltozás újszerű ismertetésével.

Az első öt fejezet (a kontinuumok kinematikája; a sztatika és a virtuális munka elve; az energiamegmaradás; kartéziusi tenzorok; a rugalmasság lineáris alapegyenletei) a rugalmasságtan alapjaival foglalkozik. Meglepő, — mert szokatlan, — hogy a tenzoralgebra elemeit nem a könyv elején (vagy függelékben), hanem a közbülső, negyedik fejezetben foglalja össze a szerző, más matematikai tudnivalók és segédtetelek (pl. a Green-tétel, a Stokes-tétel, a biharmonikus függvények tulajdonságai) viszont azokban a fejezetekben találhatók, amelyekben a fizikai alkalmazásukra szükség van. A feszültségek és a deformációk általános kapcsolatának a tárgyalása után kerül sor a speciális, lineáris konstitutív egyenletek részletes ismertetésére.

A könyv nagyobbik felét kitevő, utolsó három fejezet a rugalmasságtan három, klasszikusnak mondható alkalmazásával foglalkozik: prizmatikus rudak nyújtása, hajlítása és csavarása; síkbeli feszültségek és deformációk; lemezek deformációja. Ezeket a rugalmas alakváltozásokat — tankönyvben először — teljes általánosságban analizálja a szerző, majd tanulságos speciális esetek részletes ismertetése következik. A könyv használatát gondosan összeállított tárgymutató segíti.

A könyv alapját a szerző egyetemi előadásai képezik. Színvonala végzős mérnök, fizikus és matematikus hallgatók és kezdő kutatók szakmai színvonalához igazodik; feltételezi a lineáris algebra, a komplex függvénytan, a variációszámítás és a kontinuummechanika alapjainak az ismeretét.

Szabó János

G. I. Marchuk, G. A. Mikhailov, M. A. Nazaratiev, R. A. Darbinjan, B. A. Kargin, B. S. Elepov:

The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics

Springer Series in Optical Sciences Vol. 12

Springer-Verlag, 1980.

A Monte Carlo módszerek néven ismert sztochasztikus szimulációs eljárások a számítógépek teljesítőképességének növekedésével egyre újabb kutatási és számítási területekre törnek be. Számos probléma, melynek megoldása egzakt analitikus, vagy determinisztikus numerikus módszerekkel nehézkes, vagy esetleg lehetetlen, Monte Carlo módszerekkel viszonylag egyszerűen megoldható. A légköri és óceáni optikában felmerülő ilyen kérdésekkel foglalkozik ez a könyv.

A sugárzástranszport integro-differenciál egyenleteinek egzakt megoldására csak néhány igen egyszerű esetben van lehetőség, bonyolultabb (inhomogén, bonyolult geometriájú és összetételű) rendszerekre a klasszikus numerikus módszereknél célravezetőbb Monte Carlo módszerek alkalmazása.

A könyv második fejezete az általános sugárzástranszport egyenletek felépítését és az alkalmazható Monte Carlo eljárások közös jellemzőit ismerteti. A harmadik fejezetben tárgyalta becslési és szóráscsökkentési módszerek érdekesek lehetnek mindazok számára, akik transzport jelenségek Monte Carlo szimulációjával foglalkoznak, függetlenül attól, hogy kapcsolatban vannak-e ezek a légköri optika kérdéskörével, vagy sem. A könyv utolsó három fejezete a légköri optikában felmerülő konkrét problémákat tárgyalja. A negyedik fejezet témája a sugárzástranszport egyenes és fordított problémáinak megoldása gömbi légkör figyelembevételével. A módszerek és becslések ismertetése után modellfeladatok numerikus eredményeivel és más módszerekkel kapott eredmények egybevetésével szemlélítetik a Monte Carlo módszerek hatékonyságát a sugárzási tér jellemzőinek meghatározására. Az ötödik fejezetben írják le a keskeny sugárnyaláb (lézersugár) légköri és óceánbeli terjedését leíró nemstacionárius egyenletek szimulációs módszereit és a kapott numerikus kísérleti eredményeket mérési adatokkal vetik egybe. Az utolsó, hatodik fejezet az egzakt módszerekkel egyáltalában nem kezelhető, a turbulens közegben fellépő erős optikai fluktuációk szimulációs kérdéseivel foglalkozik.

A könyv hasznos segédeszköz lehet mind a transzportjelenségek Monte Carlo szimulációjával, mind a légköri optikai problémák numerikus megoldásával foglalkozó szakemberek számára.

Lux Iván

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Marton Andor

A kézirat nyomdába érkezett: 1980. VI. 15. Terjedelem: 8,05 (A/5 ív)
80-3043 — Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Dobó József igazgató

307.226

IV

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

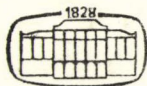
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

GÁSPÁR REZSŐ, KISS DEZSŐ, KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR
ÉS SZALAY SÁNDOR
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI
PÁL LÉNÁRD

XXIX. KÖTET

2. FÜZET



AKADÉMIAI KIADÓ
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST 1981

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klasszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10-10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóirattól évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelemben.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Turchányi György egyetemi tanár
Biofizikai Intézet

1444 Budapest VIII., Postafiók 263

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 90 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a KULTÚRA Külkereskedelmi Vállalat, 1389 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmi ismertetőt írjanak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közöljék. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írjanak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.

NEHÉZ-ION REAKCIÓK KOLLEKTÍV ÉS EGY-RÉSZECSKE ASPEKTUSAI*

FÁI GYÖRGY

TARTALOM

Bevezetés	93
1. A nehéz-ion fizika energia szerinti felosztása	98
1.1 A MeV-tartomány	98
1.2 Közepes energiák	100
1.3 Relativisztikus energiák	102
2. A MeV-tartomány	105
2.1 A párolgási spektrumok mellett megfigyelt kemény komponens	105
2.2 A PEP-modell	106
2.3 Eredmények; összehasonlítás a kísérlettel	109
2.4 Diszkusszió	112
3. Közepes energiák	113
3.1 Hidrodinamika	113
3.2 A visszalökődés szerepe	118
3.3 Sematikus modell aszimmetrikus, centrális reakciókra	118
3.4 Diszkusszió	120
4. Relativisztikus energiák	122
4.1 A tűzfelhő	122
4.2 A résztvevőkkel kapcsolatos eredmények	124
4.3 A spektátorok	127
4.4 A spektátorokra vonatkozó eredmények	130
4.5 Diszkusszió	132
5. Kipillantás	133
6. Összefoglalás	134
7. Köszönetnyilvánítás	135
8. Függelék	135
Nukleon-eloszlás a mag egy résztérfogatában	135
9. Irodalom	140

BEVEZETÉS

A nagy tömegszámú atommagok gyorsítása új helyzetet teremtett a magfizikában. Nehéz magok ütközését először a kozmikus sugárzás segítségével figyelték meg, több, mint harminc évvel ezelőtt [1]. A vizsgálatok akkor válhattak rendszeressé, amikor sikerült nehéz atomokat viszonylag sok elektronjuktól megfosztani (nehéz ionok) és ezzel alkalmassá tenni őket a gyorsításra. Ily módon kísérletileg új helyzet alakult ki, amelyben — az erre a célra átalakított gyorsítókon — megkezdődött az adatok gyűjtése. A nehéz ionokkal kapcsolatos mérések számának rohamos növekedése egyrészt arra vezethető vissza, hogy a részecskefizika szempontjából kiiregedő gyorsítók rendre ki-

* Érkezett 1980. jan. 7-én. Kandidátusi értekezés.

válóan alkalmasnak bizonyultak magfizikai célokra, másrészt azt az érdeklődést tükrözi, amely az egész fizika területén megnyilvánul belső szerkezettel rendelkező objektumok ütközése iránt, különösen amennyiben ez az ütközés valamilyen mikroszkopikus elmélet keretében leírható. (A strukturáltság szempontját is figyelembe véve a jelen dolgozatban nehéz ionon α -részecskét és minden annál nehezebb atommagot értünk.)

A nehéz ionok gyorsítása révén nyert mérési eredmények tehát azt a kihívást állították az elméleti magfizika elé, hogy mutasson fel olyan mikroszkopikus elméletet, amely az ütköző magokat többé-kevésbé individuális nukleonok együttesének tekintve és a nukleon-nukleon kölcsönhatásból kiindulva képes megmagyarázni a kísérleti tapasztalatokat. Mivel azonban a nehéz-ion fizika ma már rendkívül széles energia-tartományt fog át, nem várhatjuk, hogy egyetlen elmélet minden energián egyforma sikerrel írja le a jelenségeket. Viszonylag alacsony energián (ahol az átlagtér fogalma még használható) az időtől függő Hartree—Fock-módszer (TDHF) tűnik kézenfekvő jelöltnek, míg nagyon nagy energián inkább egy inkoherens nukleon-nukleon szórásokat összegező, relativisztikus, általánosított Glauber-elmélet jellegű megközelítés látszik helyénvalónak.

A nehéz-ion reakciók kísérleti vizsgálata során kitűnt az is, hogy a jelenségek nagy része bonyolultabb annál, hogy első lépésben érdemes lenne mikroszkopikus megértésükkel próbálkozni. A fenomenologikus leírás alapkérdése a problémához jól illeszkedő kollektív koordináták kiválasztása. Nyilvánvaló, hogy ezek közül csak néhányat követhetünk nyomon, ha nem akarjuk visszakapni a mikroszkopikus elmélet teljes bonyolultságát. Nagy egyszerűsödést jelent viszont, hogy a nehéz ionok méretei automatikusan kínálják a relatív mozgásnak — mint az egyik legfontosabb kollektív koordinátának — a klasszikus (vagy legalább félklasszikus) kezelését. A mérési eredményekkel való kapcsolat megteremtéséhez a fenomenologikus leírásban is szükség van a reakció bizonyos egy-részecske aspektusainak a tárgyalására. Ezekben a modellekben talán a kollektív és egy-részecske vonatkozások összjátékának a vizsgálata a legérdekesebb. Külön ki kell itt emelni azokat a számításokat [2], amelyek a relatív mozgás és az egy-részecske szabadsági fokok közötti energia-átadást a statisztikus elmélet segítségével írják le.

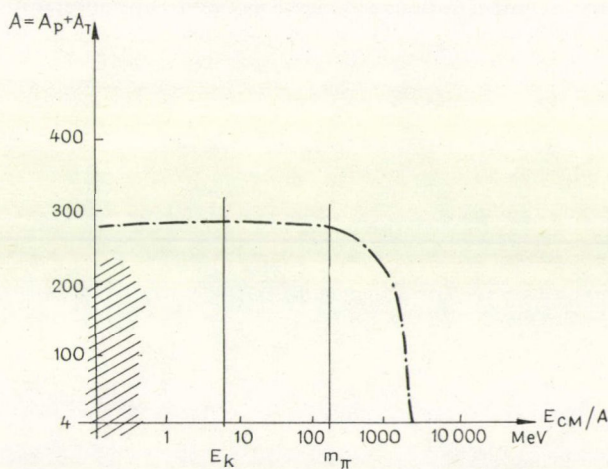
A nehéz-ion ütközésekben kísérletileg változtatható legfontosabb paraméterek az ütköző magok tömegszámai és rendszámai, a nyaláb energiája és a rendszer impulzusmomentuma, amelyet az ütközési paraméter reprezentál. Az utóbbi valójában nem állítható be önkényesen, de elvileg a reakció lefolyása alapján következtetni lehet az értékére. Nagyon nagy ütközési paraméterek (vagy a Coulomb-gátnál kisebb bombázó energiák) esetén a két mag között csak elektromágneses kölcsönhatás lehetséges, de a Rutherford-szórás mellett már ekkor is sor kerülhet Coulomb-gerjesztésre. Az ütközési paramétert csökkentve elérjük azt a határt, amikor a két mag nukleáris szempontból érinti egymást (érintkező vagy súrlódó ütközés — „grazing”). Ennél kicsit kisebb ütközési paraméterek esetén néhány nukleon átadására kerülhet sor a lövedék és a target között (transzfer reakciók). Még tovább csökkentve az ütközési paramétert nem túlságosan nagy bombázó energia mellett abba a tartományba jutunk, ahol sok nukleon adódik át az ütköző magok között: a relatív mozgás gyors fékeződése a termék-magok gerjesztődésével jár együtt, de a reakciótermékek még emlékeztetnek a lövedékre és a targetra — ezek a mélyen rugalmatlan ütközések. Nagyobb energiákon, ahol a reakció ideje kisebb, mint a mag egyes részei közötti kommunikációhoz szükséges idő, ugyanezek az ütközési paraméterek olyan folyamatokra vezetnek, amelyek-

ben nem minden nukleon vesz részt ténylegesen; a lövedéknek és a targetnak viszonylag nagy résztérfogatai lényegében zavartalanul mozognak tovább. Ezt az energia- és ütközési paraméter-tartományt a résztvevő-szemlélő (participant spectator) felosztás érvényessége jellemzi.

Az eddigiekben az olyan ütközések lehetséges kimenetelét tekintettük át, ahol az ütközési paraméter nem túl kicsi: ezek a periférikus reakciók. Mi történhet a kis ütközési paraméterrel jellemezhető (centrális) folyamatokban?

Alacsony (de a Coulomb-gát fölötti) energiákon teljes fúzió jön létre a lövedék és a target között, kialakul a közbenső (compound) mag, amely azután elveszti gerjedési energiáját és végül egyetlen nehéz reakcióterméket szolgáltat. Nagyobb energiákon az a kérdés merül föl, hogy a reakció kezdetén létrejön-e egy nagy sűrűségű és nagy energia-sűrűségű zóna — forró rész vagy „hot spot” — a két mag átfedésének a környezetében? Centrális ütközésekben még tovább növelve a nyaláb energiáját elérjük azt a tartományt, ahol a teljes rendszer alkotó elemeire robban szét. Ezt a jelenséget új részecskék (elsősorban π -mezonok) keletkezése kíséri.

A fentiekben vázlatosan áttekintettük a nehéz-ion fizika egy lehetséges csoportosítását. Nem konkretizáltuk egyelőre azokat az energia-értékeket, ahol az egyes reakció-mechanizmusok dominánsá válnak. Kisebb ütközési paraméter- és energia-léptéket választva meggyőződhetnénk arról, hogy az átmeneti tartományok rendkívül gazdagok érdekes fizikai jelenségekben. A jelen felosztás célja azonban mindössze az volt, hogy összefoglaló képet kapjunk azokról a jelenségekről, amelyekről részletesen szólnunk majd a további fejezetekben.

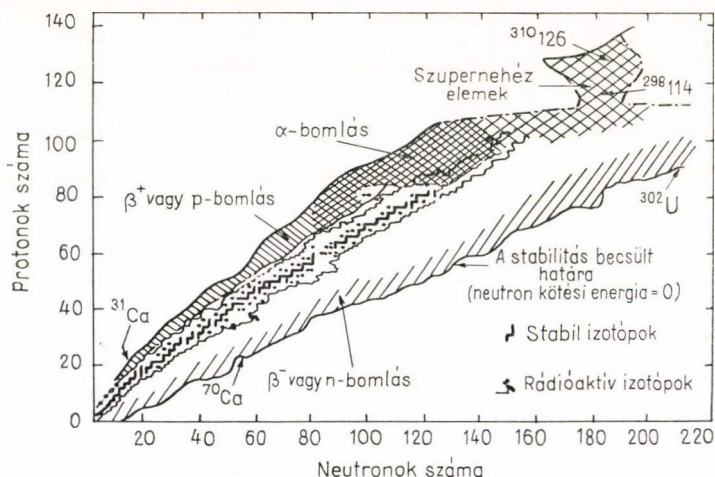


1. ábra. A nehéz-ion fizika tájékoztató „térképe”. A vízszintes tengelyen a rendelkezésre álló nukleononkénti energiát tüntettük fel a tömegközépponti rendszerben, a függőleges tengelyen az egyesített rendszer tömegszámát adtuk meg. (A_p a lövedék, A_t a target tömegszáma). A vonalkázott terület a klasszikus magfizika által elérhető tartományt jelképezi. A pont-vonal a kísérleti nehéz-ion fizika pillanatnyi határait jelzi. Feltüntetünk két fontos energiaküszöböt: a kötési energiát (E_k) és a pion-tömeget (m_π).

A dolgozat rendező elvéül a rendszerben rendelkezésre álló gerjesztési energiát választottam. Az 1. ábra a nehéz-ion fizika tájékoztató térképe a részecskénkénti energia és az egyesített rendszer tömegszámának a terében. Látjuk, hogy a klasszikus magfizika által vizsgált terület (vonalkázott tartomány) csak egy kis részét fedi le a nehéz-ion fizika (energiában logaritmikus!) térképének. A kísérleti nehéz-ion fizika által a dolgozat lezárásának időpontjában elért határt sematikus jeleztem a pontozott vonallal. Feltüntettem két fontos energiaküszöböt: az egy részecskére jutó kötési energiát ($E_k \approx 8$ MeV) és a pion-tömeget ($m_\pi \approx 140$ MeV). A következőkben az $E/A \lesssim E_k$ tartományt alacsony energiás nehéz-ion fizikának, az $E_k \lesssim E/A \lesssim m_\pi$ feltételnek eleget tevő energiákat közepesnek, az $E/A \gtrsim m_\pi$ -t pedig nagy energiás tartománynak fogom nevezni.

A főnti beosztás természetesen önkényes, hiszen más küszöbök is átlépünk az energiát növelve (pl. a maganyagbeli hangsebességnek megfelelő energia-értéket vagy a Fermi-energiát). Az itt bevezetett energia-határok a jelen dolgozat céljait szolgálják, bizonyos fokig illeszkednek a tárgyalásra kerülő jelenségekhez, amelyek kiragadott példaként illusztrálják az egy-részecske és kollektív szabadsági fokok összjátékát a különböző energia-tartományokban.

Összefoglalóan megállapíthatjuk, hogy a nehéz-ion fizika nagy tömegszámú atommagok ütközéseivel foglalkozik. A bombázó nyaláb energiája néhány MeV/nukleontól napjainkban néhány GeV/nukleonig terjed. Az ebben az energia-tartományban föllépő jelenségeket az elmélet olyan modellekkel igyekszik leírni, amelyek vagy tisztán egy-részecske jellegűek, vagy a reakció valamely kollektív aspektusát emelik ki, vagy statisztikusan írják le az egyensúly felé vezető folyamatokat — esetleg ezen elemek kombinációi. Valamennyi modellnek vannak problémái; mindegyik csak korlátozott érvénnyel alkalmazható és használatát elsősorban a belőle származtatott eredményeknek a tapasztalattal való egyezése igazolja *a posteriori*.



2. ábra. Magtérkép. A fekete négyzetek a természetben létező stabil magokat jelölik. A hozzájuk legközelebbi határvonalakon belül a magreakciókban felfedezett izotópok foglalnak helyet. A külső vonalak a stabilitás mai ismereteink alapján becsült határai [3].

A nehéz-ion fizika egyik fő reménye, hogy a fenti modellek segítségével sikerül leírni azon változatos kísérleti tapasztalatok nagy részét, amelyeket — a hagyományos magfizikához viszonyítva — energiában és tömegben rendkívül kiterjedt területen szerzünk. Egy másik, igen fontos várakozás, hogy mindezek mellett sikerül egzotikus jelenségeket (például pion-kondenzáció, sűrűség-izomerek, lökéshullámok, nukleonkvark fázisátmenet) is megfigyelni. A nehéz-ion fizika kutatásának egy harmadik motivációja akkor válik világossá, ha szemügyre vesszük a 2. ábrát. Mintegy 300 stabil magot ismerünk. Az elmúlt fél évszázadban körülbelül 1300 további radioaktív izotópot állítottak elő és tanulmányoztak. Becslések szerint [3] még mintegy 6000 új izotóp vár azonosításra. A stabilitási völgy mélyén szerzett magfizikai ismereteinket mindezekre kiterjeszteni — enyhén szólva merész általánosítás! Az a kérdés például, hogy adott számú proton hány neutront képes kötni, nyilvánvalóan fontos a magfizika számára. Ha mondjuk az derülne ki, hogy a zérus kötési energia vonala (2. ábra) máshol húzódik, mint ahol ma várjuk, az azt tükrözné, hogy baj van azokkal az elméleti módszerekkel, amelyek alapján a stabilitásra következtetünk. Ha a nehéz-ion fizika segítséget nyújt ezek tisztázásához, az már önmagában is azt jelenti, hogy új ismeretekkel gazdagított bennünket!

Természetesen a jelen dolgozattal kapcsolatban is fölvethető az egy-részecske és kollektív vonatkozásokat egyidejűleg tárgyaló modellek közös problémája: ha a rendszerben a részecskeszám megmarad, akkor a fizikai helyzethez jól illeszkedő kollektív koordináták megtalálása és bevezetése után a korábbi egy-részecske koordinátáinkkal már nem rendelkezünk szabadon, azok nem függetlenek, hiszen a rendszer szabadsági fokainak száma rögzített érték. Ezt a nehézséget legtöbbször — és ebben a munkában is — úgy kerüljük el, hogy föltételezzük, hogy a rendszer elegendően sok részecskét tartalmaz ahhoz, hogy az egyes nukleonok koordinátái *jó közelítéssel* függetlennek tekinthetők maradjanak.

A dolgozat négy fő részből áll. Az első fejezetben (energia szerinti felosztásban) rövid áttekintő képet szeretnék adni a nehéz-ion fizika néhány részterületéről, hogy a továbbiakban az itt elmondottakhoz kapcsolódhassak. Saját eredményeimet — és azok közvetlen előzményeit — a 2–4. fejezetekben közlöm. A második fejezetben egy, az alacsony energiás nehéz-ion fizikában hosszabb ideje gondot okozó kísérleti tény megmagyarázására tett javaslatot ismertetek. A javasolt mechanizmus azon alapul, hogy figyelembe vesszük a két mag között átadott egyes részecskék mozgásának a magok relatív mozgásához való csatolását a nehéz-ion ütközés korai szakaszában. A harmadik fejezetben a közepes energiák tartományával foglalkozom. Úgy tűnik, hogy ebben az (eddig kísérletileg fel nem térképezett) tartományban a nukleonok viszkózus folyadékszerű (kollektív) áramlása játszik döntő szerepet a fizikai folyamatok meghatározásában, legalábbis egy részletesen diszkutálendő időpontig (break-up), amely után az individuális részecskék sorsát (a reakció egy-részecske aspektusait) is nyomon kell követnünk a detektorokig a kollektív jellegű visszalökődési effektusok vizsgálata mellett. A negyedik fejezetben többek között néhány olyan eredményt ismertetek, amelyet a nagy energiás nehéz-ion fizikában értem el. A nagy energiás elmélet egy része új szabadsági fokok megjelenésével kapcsolatos (pionizáció), itt tárgyalásra kerülő másik része arra vonatkozik, hogy a mag alapállapotának meghatározott kollektív tulajdonságai (izospinkorrelációk) hogyan „élnek túl” a (relativisztikus) nehéz-ion ütközést és az azt követő egy-részecske típusú bomlási folyamatot (pl. nukleonok elpárolgását a gerjesztett atommagból). Az utóbbi területen végzett vizsgálataink olyan új fejlődést és kísérleti technikát alapoztak meg, amely már eddig is több, korábban nem tanul-

mányozott izotóp előállítását tette lehetővé. Ezt a tényt tekintem a jelen dolgozatban szereplő legjelentősebb eredményemnek. Az értekezés ötödik fejezetében általánosabb nézőpontból fűzők néhány megjegyzést a dolgozat tárgyához. Saját eredményeim összefoglalását a hatodik fejezet tartalmazza.

1. A nehéz-ion fizika energia szerinti felosztása

1.1. A MeV-tartomány

Az alacsony energiás nehéz-ion fizikát a „lassú” kollektív mozgás jellemzi. Becsüljük az ütközés idejét a

$$t_{\text{coll}} \approx 2 \frac{R_A + R_B}{V_{\text{rel}}} \quad (1.1)$$

kifejezéssel! (Itt R_A és R_B az ütköző magok sugarai, $v_{\text{rel}} = |v_1 - v_2|$ a két mag relatív sebessége.) $E_{\text{LAB}} \lesssim 10$ MeV/nukleon bombázó energia mellett $t_{\text{coll}} \gtrsim 300$ fm/c. ($1 \text{ fm/c} \approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-23} \text{ s}$).

Ez az idő lényegesen hosszabb, mint a Fermi-tenger tetején levő nukleonokra jellemző t_{sp} egy-részecske idő, amely alatt a majdnem a Fermi-energiával rendelkező nukleonok befutják az $L \approx 10$ fm karakterisztikus távolságot ($t_{sp} \approx 30$ fm/c). Ugyanakkor a nukleonok szabad úthossza a Pauli-tiltás miatt nagy ezeken az energiákon ($\lambda \approx 10$ fm) [4]. Ilyen körülmények között a nehéz-ion reakció egy közös, időtől függő átlagos potenciáltér segítségével írható le. Az átlagtérben többé-kevésbé függetlenül, de a tér változásához képest gyorsan mozognak a nukleonok. A domináns kölcsönhatás nem a részecskék egymással való ütközése (mint közönséges folyadékok esetén lenne), hanem a nukleonoknak az átlagtérrel való kölcsönhatása.

A fenti fizikai kép legjobb realizációját az időtől függő Hartree—Fock (TDHF) számítások jelentik [5]. Ebben a dolgozatban azonban nem követelünk önkonzisztens leírást, az egyes magokat Woods—Saxon-potenciállal reprezentáljuk. Nem túl kis magokra a potenciál gyors térbeli változásának tartománya (a magfelület) kicsi a mag térfogatához képest. Nulladik közelítésben a részecskék nem hatnak kölcsön egymással és egyenesvonalú pályán mozognak a magban (közelítőleg síkhullámok írnák le őket egy kvantált elméletben), kivéve, ha a viszonylag vékony, diffúz felületi rétegbe érnek. A lövedékre és a céltárgymagra a reakció előtt úgy gondolhatunk, mint egy-egy tartályba zárt nukleon-gázra. A nukleonok egymás hatását csak a tartály falaival reprezentált átlagtérrel ütközve érzik. Az egyes részecskéknek elegendő idejük van arra, hogy adiabatikusan kövessék a tartály-falak (potenciálfalak) mozgását. Ha a két tartály egymás közelébe kerül, akkor kölcsönhatásba lépnek. Erre a geometriai helyzetre ugyanis nem alkalmazható az a megszokott közelítés, amely szerint a rendszer teljes energiáját térfogati és (a felülettel arányos) felületi tagra osztjuk. Korrekciós tagokra van szükség, amelyek számot adnak arról az (erős) vonzásról, amelyet akkor tapasztalunk kísérletileg, ha a két magfelület távolsága összemérhetővé válik a felületek vastagságával. A két felület közelségéből származó extra potenciális energia — amelyet proximity energiának neveznek [6] — fontos szerepet játszik a nehéz-ion reakció lefolyásában. Ezt a V_p energiát sima és lassan változó távolságú felületek esetén úgy hatá-

rozták meg [6], hogy lokális kölcsönhatási energiák összegeként állították elő:

$$V_p = \int e(D) d\sigma, \quad (1.2)$$

ahol az integrálás a szemben álló felületek mentén történik; D a két felület távolsága, $e(D)$ pedig két párhuzamos, D távolságra levő felület kölcsönhatási energiája felület-egységenként. Gyakran elegendő a két felület távolságát parabolikus közelítésben megadni:

$$D = S + \frac{1}{2\bar{R}} \varrho^2, \quad (1.3)$$

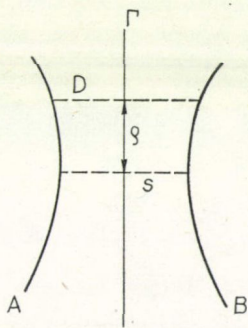
ahol s és σ definíciója a 3. ábráról olvasható le, $1/\bar{R}$ pedig az átlagos görbület. (Ha a két felület R_A és R_B sugarú gömb, akkor $1/\bar{R} = 1/R_A + 1/R_B$).

(1.2)-ből kiindulva és az $e(D)$ függvényt Thomas—Fermi-közelítésben meghatározva [6] a proximity potenciálra a

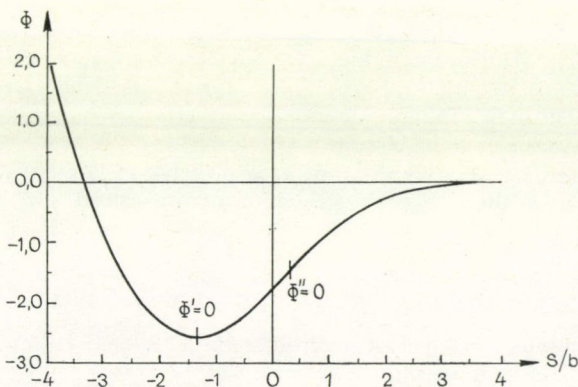
$$V_p = 4\pi\gamma\bar{R}b\Phi(S/b) \quad (1.4)$$

kifejezés adódik, ahol $b \simeq 1$ fm a magfelszín vastagsága, $\gamma \simeq 0,95$ MeV/fm² a mag felületi feszültsége vagy felületi energiája, Φ pedig egy [6]-ban táblázatba foglalt függvény, amelyet a 4. ábrán vázoltunk fel.

A fenti keretben nemcsak a két egymás közelében levő mag között föllépő potenciális energia határozható meg, de leírható nukleonoknak az egyik magból a másikba való átadása is [7]. A transzfer természetesen a relatív mozgás fékeződéséhez vezet, amit fenomenologikusan egy súrlódási tagnak a mozgásegyenletekben való szerepeltetésével szoktak figyelembe venni. Ez a disszipatív tag \dot{r} -tal arányos (r a két mag relatív helyzetvektora); a proximity-elmélet keretében számított arányossági tényezőt proximity súrlódási együtthatónak nevezik.



3. ábra. A proximity-geometria vázlata. A és B a két szembenálló magfelület, D ezek távolsága tetszőleges helyen, s pedig a köztük levő legkisebb távolság. $D=s$ -hez $\varrho=0$ tartozik.



4. ábra. A dimenziótlan Φ proximity potenciál-függvény, amely (1.4)-ben szerepel. s a két felület legkisebb távolsága, b a magfelület vastagsága.

Az alacsony energiás nehéz-ion fizika a nehéz-ion fizika kísérletekben és elméletekben egyaránt rendkívül gazdag, klasszikus ága. Ezért részletes áttekintésére itt nem vállalkozhatunk. A fentiekben néhány olyan vonatkozását elevenítettük föl, amelyre szükségünk lesz a második fejezetben, ahol egy olyan jelenséget tárgyalunk, amelyre mindeddig nem sikerült kielégítő magyarázatot adni. Megjegyzendő, hogy a kísérlet és elmélet közötti eltérés, amelyet vizsgálni fogunk, kicsi — bár szisztematikus — és így nem csökkenti annak a kijelentésnek az érvényességét, hogy az alacsony energiás nehéz-ion fizikát a kísérlet és az elmélet nagy vonalakban való egyezése jellemzi.

1.2 Közepes energiák

A $8 \text{ MeV} \lesssim E_{\text{CM}}/A \lesssim 140 \text{ MeV}$ energiatartomány (ez a tömegközépponti energiaszimmetrikus target-lövedék kombinációt feltételezve nagyjából a $30 \text{ MeV} \lesssim E_{\text{LAB}}/A_p \lesssim 500 \text{ MeV}$ intervallumnak felel meg a bombázó energiában, ahol A_p a lövedék tömegszáma) rendkívül szegény mérési eredményekben. Több kísérlet (gyorsító) van azonban a tervezés és előkészítés fázisában (például HIJAC/CERN, a francia GANIL és az amerikai Michigan State University terv), amelyek feladata kifejezetten a közepes energiák vizsgálata lesz nehéz-ion reakciókban.

A hirtelen megnövekedett érdeklődés indokolt, hiszen a nyaláb energiáját növelve ebben a tartományban lépjük át a Fermi-sebességnél, majd a maganyagbéli hangsebességnél megfelelő energiaértéket és érjük el végül a pion-küszöböt.

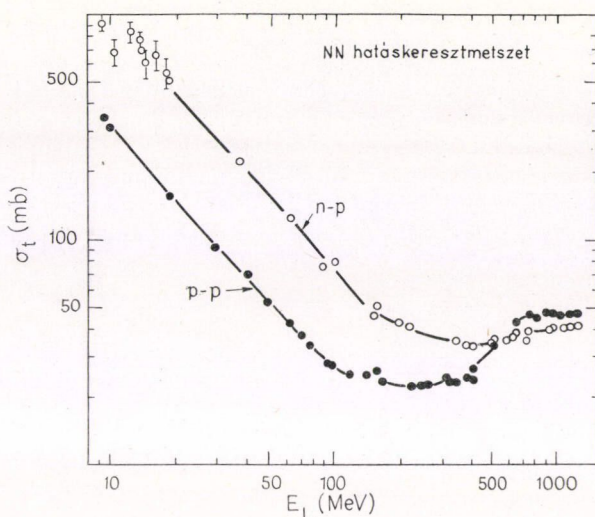
Úgy tűnik, hogy ezeken az energiákon a hidrodinamikai modellel a jelenségek kielégítő leírását szolgáltatja [8]. Más szóval a reakció lefolyásában lényeges szerepet játszik a mag anyagának kollektív áramlása. Amikor a hidrodinamikai modellel dolgozunk, akkor a reakció fejlődésének egy meghatározott pillanatáig, a szétesésig (break-up) általában csak kollektív szabadsági fokokat használunk és ebben az időpontban szemléletet változtatunk: a szétesés után individuális részecskék állnak előttünk, amelyek közül egyesek eljutnak a detektorokig.

A hidrodinamikai leírásban a rendszer minden részterefogatóról föltesszük, hogy lokális termodinamikai egyensúlyban van. Ehhez viszonylag nagy számú részecskére, elegendő időre és a rendszer méreteihez képest kis átlagos szabad úthosszra van szükség.

Az átlagos szabad úthossz q sűrűségű maganyagban, ha a gerjesztési energia elég nagy ahhoz, hogy a Pauli-elv tiltó hatása már nem érvényesül

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_{NN} \cdot q}, \quad (1.5)$$

ahol σ_{NN} a teljes nukleon-nukleon hatáskeresztmetszet. Az 5. ábrán a teljes nukleon-nukleon hatáskeresztmetszetet látjuk 1 GeV beeső (laboratóriumi) energiáig [9]. Ha az ábra alapján a szokásos átlagos $\sigma_{NN} \approx 30 \text{ mb}$ értéket vesszük, vagy ha alulról becsülve $\sigma_{NN} \gtrsim 20 \text{ mb}$ -t használunk, akkor $q_0 = 0,17 \text{ fm}^{-3}$ normál magsűrűség mellett $\lambda \approx 2 \text{ fm}$, illetve $\lambda \lesssim 3 \text{ fm}$ adódik. Az így kapott átlagos szabad úthosszat kell összehasonlítani a magfizikai rendszer tipikus méreteivel, $L \approx 10 \text{ fm}$. Ha elfogadjuk, hogy a vizsgált reakciókban a sűrűség a normál sűrűség kétszeresére is nőhet, akkor a fenténél kedvezőbb a helyzet. Egyéb kollektív jelenségek is a szabad úthossz csökkentésének irányában hatnak [10].



5. ábra. A teljes nukleon-nukleon hatáskeresztmetszet a beeső laboratóriumi energia függvényében [9]

A karakterisztikus időkkel kapcsolatban részletes elemzések állnak rendelkezésre [2, 11, 12]. Optimista becslés szerint [11] a termalizációhoz szükséges idő 500 MeV/nukleon bombázó energia alatt 4–6 fm/c; óvatosabb modellek [2] a lokális egyensúly kialakulását $t_{eq} \approx 10$ fm/c alatt tartják reálisnak. Weidenmüller és munkatársai azt is hangsúlyozzák, hogy a különféle becslésekben megadott numerikus értékek csak nagyon durva tájékozódásra alkalmasak — tényleges számadatokat csak konkrét modell megvalósításával lehet kapni.

A lokális egyensúly kialakulásához szükséges időt az (1.1)-ben definiált t_{coll} ütközési idővel kell összehasonlítani. t_{coll} a bombázó energiát növelve csökken, tipikus értékei a vizsgált energiaintervallumban 30–60 fm/c körül vannak. (Olyan nehéz-ion ütközésekben, amelyekben kialakul a compound rendszer — amelyek teljes fúzióra vezetnek — természetesen $t_{coll} \rightarrow \infty$.)

A szereplő részecskék száma nem igényel részletes diszkussziót. A rendelkezésünkre álló nukleonok maximális száma is csak ≈ 400 . Ezek szerint megállapíthatjuk, hogy a kis szabad úthosszra, hosszú időre és nagyszámú részecskére vonatkozó feltételek legfeljebb marginálisan teljesülnek. Figyelemre méltó azonban, hogy a klaszikus magfizika több olyan meglepetéssel szolgált, hogy a feltételek gyenge teljesülése esetén is az elmélet kiváló (a kísérletekkel jól egyező) eredményekre vezetett.

Ha tehát elfogadjuk, hogy nem ésszerűtlen a fent vázolt körülmények között a hidrodinamikai modell alkalmazása, akkor megvizsgálhatjuk e modell következményeit. Megjegyezzük még, hogy a szükséges feltételek minden bizonnyal jobban teljesülnek centrális, mint periférikus ütközésekre. Ezért a harmadik fejezetben egy jól meghatározott fizikai helyzetre — centrális, aszimmetrikus ütközésekre — alkalmazunk egydimenziós hidrodinamikát.

1.3 Relativisztikus energiák

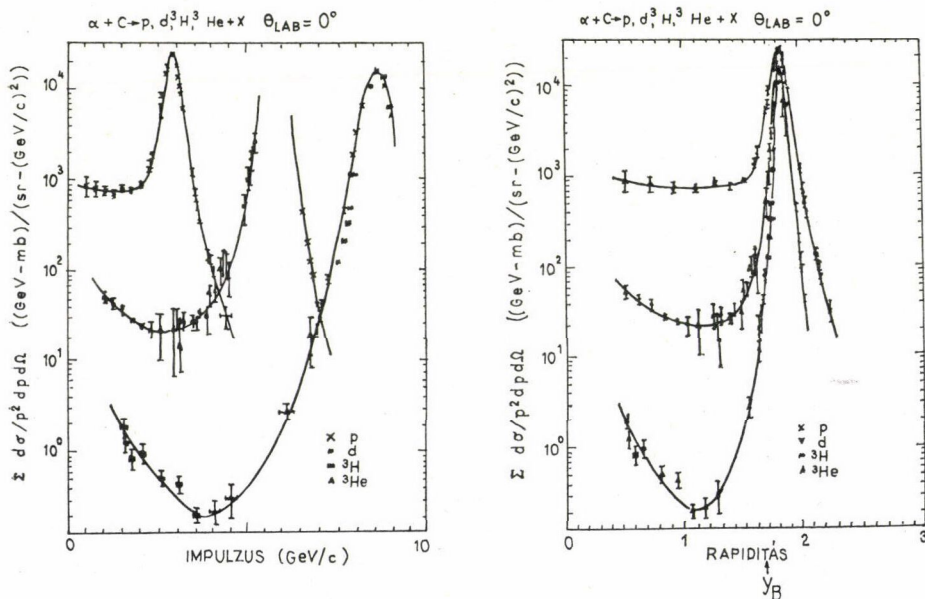
Relativisztikus nehéz-ion ütközésekben nyert tipikus spektrumok láthatók a 6. és 7. ábrán. A 6. ábra Anderson eredményeit mutatja [13], aki protonokat, deuteronokat, tritonokat és ^3He -t mért $\theta_{\text{LAB}}=0^\circ$ szögben a $^4\text{He}+^{12}\text{C}$ reakcióban $E_{\text{LAB}}=2,1$ GeV/nukleon energián. Valamennyi spektrumban éles maximumot talált egy bizonyos impulzus-értéknél. Relativisztikus energiákon azonban az eredmények bemutatására az impulzus-változó helyett célszerűbb a relativisztikusan additív rapiditást használni. A rapiditás definíció szerint

$$y_{\parallel} = \frac{1}{2} \ln \frac{E+p_{\parallel}}{E-p_{\parallel}}, \quad y_{\perp} = \frac{p_{\perp}}{m}, \quad (1.6)$$

ahol E a szóban forgó m tömegű részecske teljes energiája, p_{\parallel} a longitudinális, p_{\perp} pedig a transzverzális impulzusa.

Ha az adatokat a rapiditás (y_{\parallel}) függvényében ábrázoljuk, azt látjuk, hogy valamennyi spektrumban ugyanannál a rapiditás-értéknél található a csúcs, s ez az érték majdnem megegyezik a nyaláb rapiditásával. Kézenfekvő ezt úgy értelmezni, hogy a $\theta_{\text{LAB}}=0^\circ$ szögben becsapódó reakciótermékek döntő hányada a bombázó magból származik: a bombázó nehéz-ion egy része (geometriaileg) nem került érdemi kapcsolatba a tarrgettel és majdnem zavartalanul haladt tovább.

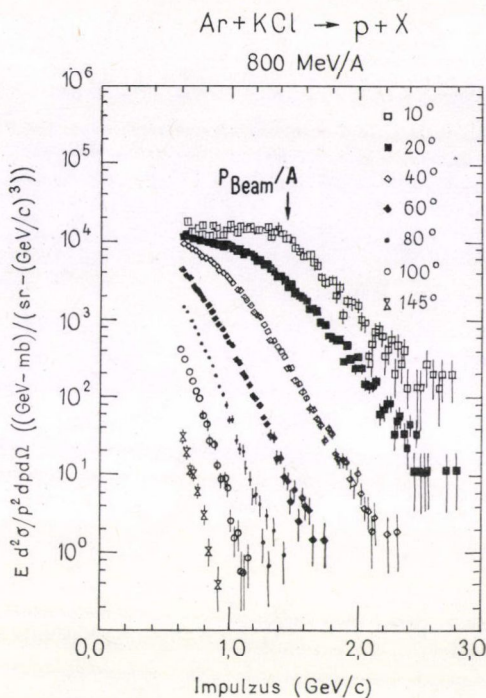
Nagy szögben a spektrumok egészen más képet mutatnak. A 7. ábrán nagy szögben ($10^\circ \leq \theta_{\text{LAB}} \leq 145^\circ$) felvett [14] inkluzív proton-spektrumokat látunk az $\text{Ar}+\text{KCl}$ reakcióra $E_{\text{LAB}}=800$ MeV/nukleon energián. (Nagamiya és munkatársai



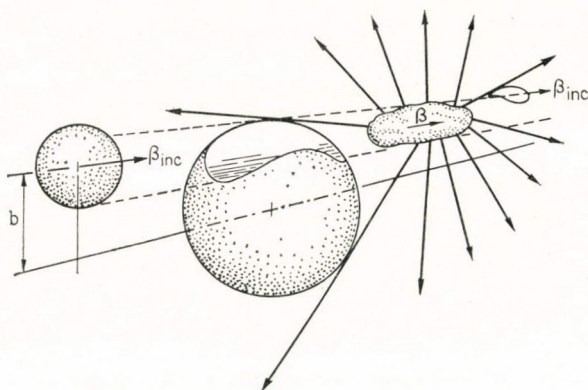
6. ábra. A $^4\text{He}+^{12}\text{C}$ reakció ($E_{\text{LAB}}=2,1$ GeV/nukleon) termékeinek spektruma $\theta_{\text{LAB}}=0^\circ$ szögben a laboratóriumi impulzus (bal oldalon) illetve a rapiditás (jobb oldalon) függvényében. y_B a nyaláb rapiditása. Az ábra forrása a [13] dolgozat.

tehát egyetlen protont mértek és nem törődtek azzal, hogy ezenkívül mi lehet az a reakcióban: $\text{Ar} + \text{KCl} \rightarrow p + X$, ahol X „akármilyen”. Ezek a spektrumok lényegében nem mutatnak semmiféle szerkezetet, az impulzusnak nagyon sima függvényei.

A fenti két megfigyelés az ütközés geometriájára a bevezetésben már említett résztvevő-szemlélő képet sugallja [15]. A geometriát a 8. ábrán vázoltuk sematikusan [16]. A résztvevő-szemlélő képben egyenes vonalú trajektorákat tételezünk fel (azaz a két mag, mint egész, relatív mozgásában elhanyagoljuk a Coulomb-kölcsönhatás szerepét). Ilyen feltevés mellett sok szempontból célszerű a nyaláb irányára merőleges síkot (az xy -síkot) kisebb-nagyobb részekre osztani. Éles magfelületeket föltételezve találunk olyan tartományokat az xy -síokban, ahol nincs átfedés a lövedék és a target vetülete között. A két magnak ezekbe a tartományokba eső részeire (amelyeket szemlélőknek vagy spektátoroknak nevezünk), föltesszük, hogy az ütközés után többé-kevésbé zavartalanul folytatják útjukat. (A spektátor kifejezés kétféle értelemben is használatos az irodalomban: egyrészt a fent vázolt geometriában levő góttér fogatok egészét értik rajta — 1. a 8. ábrát —, másrészt az ezekbe a térfogatokba foglalt nukleonok jelzőjéül szolgál.) Ugyanakkor az átfedő tartományban levő nukleonok vehemens folyamatokban vesznek részt, igen nagy energiájú ütközések mennek végbe közöttük, amelyeket az erős kölcsönhatás kormányoz. Új részecskék keletkezhetnek, hadrokémiai átalakulások mennek végbe, esetleg termodinamikai és/vagy kémiai egyensúly alakul ki. A folyamatok végső eredményeként a fragmentumok széles szögtartományba emittálódnak. Magától értetődik, hogy ezzel a nagy energiasűrűségű anyagdarabbal, amelyet összefoglalóan tűzfelhőnek fogunk nevezni, modellek egész sora foglalkozik [15—18]. (Azért választottuk a tűzfelhő elnevezést, mert ez a fenti modellekben használt és konkrétabb tartalommal rendelkező kifejezések egyikének sem közvetlen fordítása. A tűzfelhő valamennyi fölsorolt modellnek laza, általános megjelölése.) Világos az is, hogy a tűzfelhő és a szemlélők között nincs éles határfelület, a spektátorok is gerjesztődnek, majd további nukleonokat emittálnak. Esetenként azonban rendkívül hasznos lehet az „éles kés” közelítés: annak a feltételezése, hogy a geometriai felületek tisztán szétválasztják a résztvevőket és a szemlélőket. Nyilvánvaló az itt használt fogalmaknak az alacsonyabb energiára vonatkozó „forró rész” elképzeléssel való kapcsolata is.



7. ábra. Nagy szögekben mért proton-spektrumok az $\text{Ar} + \text{KCl}$ reakcióra $E_{\text{LAB}} = 800$ MeV/nukleon bombázó energián. P_{BEAM}/A a nyaláb részecskékénti impulzusa [14].



8. ábra. A résztvevő-szemlélő modell sematikus vázlata.

A b ütközési paraméterrel és $\beta_{inc} = \frac{v_{inc}}{c}$ sebességgel be-
eső lövedék egy része zavartalanul továbbhalad, másik
része a targetból „kivágott” maganyag-darabbal tűzfelhő-
vé olvad egybe ($\beta < \beta_{inc}$).

Relativisztikus energiákon jól használható kísérleti előírás áll rendelkezésünkre a centrális reakciók kiválasztására. Centrális eseményekben csillagszerű robbanást várunk; az emittált részecskék száma sokkal nagyobb és szögeloszlása lényegesen közelebb áll a gömbszimmetrikushoz, mint periférikus ütközések esetén. Általában egyszerűen a nagy multiplicitású eseményeket — tehát azokat, amelyekben például egy buborékkamra-felvételen az ütközési ponttól sok nyom („kar”) indul ki — tekintik centrálisnak. A 9. ábrán ily módon kiválasztott centrális reakciókból nyert adatokat mutatunk be [14]. Az ábra $E_{LAB} = 800$ MeV/nukleon energiájú Ar-nyalábnak KCl targeten való centrális ütközéséből származó proton- és pion-spektrumokat mutat $\theta_{CM} = 90^\circ$ -os szögben az energia függvényében. Érdeemes megfigyelni, hogy kis energiákon a protonok invariáns hatáskeresztmetszete lefelé, míg a π^- -oké (esetleg) fölfelé tér el a logaritmikus skálán egyenessel ábrázolható Boltzmann-eloszlás görbétől. Természetesen a Boltzmann-eloszlásban föllép egy paraméter („hőmérséklet”), amely az egyenesek meredekségét határozza meg. Számértéke a negatív pionokra kisebb ($kT \approx 60$ MeV), mint a protonokra ($kT \approx 80$ MeV).

A 10a ábrán az $^{40}\text{Ar} + ^{40}\text{Ca}$ reakcióban $E_{LAB} = 1,05$ GeV/nukleon energián mért invariáns π^+ -hatáskeresztmetszetek kontúrvonalai láthatók $y_{||}$ és $y_{\perp} = p_{\perp}/m_{\pi}$ terében [19]. A (b) ábrán a szerzők a $p + p$ reakcióban $E_{LAB} = 730$ MeV energián kapott invariáns hatáskeresztmetszetet tüntették föl. Az összehasonlítás felhívja a figyelmet arra az érdekes tényre, hogy a nehéz-ion reakcióban kapott π^+ spektrum $\bar{y}_{||} = \frac{y_P + y_T}{2}$, $p_{\perp} \approx 0,4 m_{\pi}$ -nél csúcsosodik, míg a proton-proton ütközésből származó eloszlás nem mutat hasonló vonásokat. (Éppen ellenkezőleg: csúcsai a target és a lövedék rapiditásának közelében találhatók.) Azt is megfigyelték, hogy az alacsony energiás ($p \lesssim m_{\pi}$) pionok spektrumának ez a 90° körüli maximuma (a tömegközépponti rendszerben) lényegében független a multiplicitástól. Úgy tűnik, hogy ez a relativisztikus nehéz-ion reakciók egy specifikus tulajdonsága, amely nem magyarázható meg, ha a reakciót

egyszerűen nukleon-nukleon ütközések szuperpozíciójának képzeljük. Az alacsony energiás pionok spektrumának másik megfigyelt különleges vonása, hogy $\theta_{\text{CM}}=0^\circ$ -nál a π^- -hatáskeresztmetszetnek maximuma van a lövedék sebességénél, míg a π^+ -hatáskeresztmetszet minimumot mutat. Ezt a Ne+NaF rendszerben $E_{\text{LAB}}=0,4$ GeV/ nukleon energián végzett mérések mutatják [20]. $p=0$ körül a π^- -ok száma körülbelül háromszorosa a π^+ -ok számának. Ezek a tények éles ellentmondásban állnak a nagy impulzusú tartományban tapasztaltakkal, ahol egyenlő számban mérnek pozitív és negatív pionokat [4].

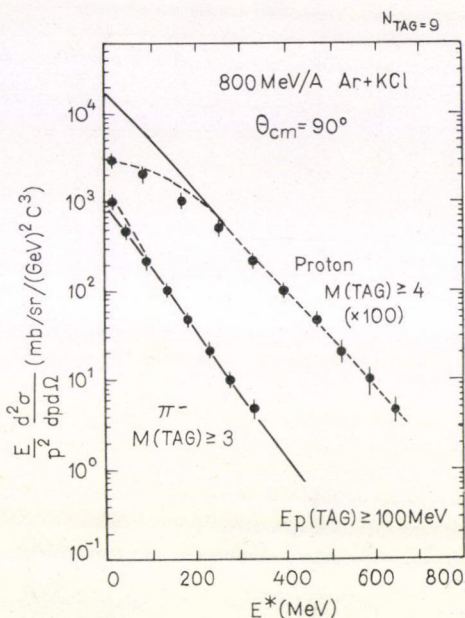
A relativisztikus nehéz-ion fizika területén igen nagy számú és sok részletre kiterjedő mérési eredmény gyűlt össze. Ezek kimerítő ismertetése vagy akár csak áttekintése is lehetetlen a jelen dolgozat keretei között. Úgy érzem azonban, hogy az a néhány kísérleti tény, amit itt kiemeltem, karakterisztikus, és kulcsszerepet tölt be a szóban forgó területen.

2. A MeV-tartomány

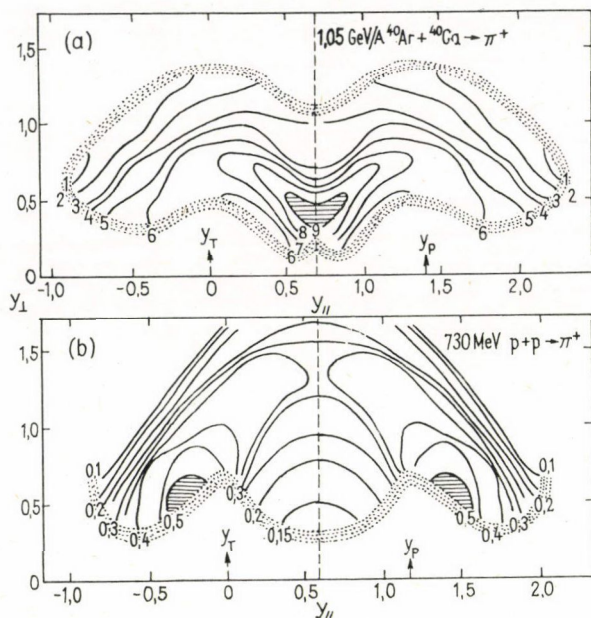
2.1 A párolgási spektrumok mellett megfigyelt kemény komponens

A Coulomb-gát fölötti energiákon történő nehéz-ion ütközéseket rendszert nukleonok vagy más könnyű részecskék (d , t , ^3He , α , ...) emissziója kíséri. Az emittált nukleonok energiaspektruma a compound reakciókból ismert párolgási spektrumon kívül egy nagy-energiás komponenst is tartalmaz [21]. A „kemény komponenst” az irodalomban eddig úgy írták le, hogy a spektrum párolgási részére (amelyet $kT \lesssim 2$ MeV hőmérséklet-paraméter jellemez) egy újabb, lényegesen nagyobb (≈ 7 MeV) hőmérsékletű eloszlást szuperponáltak. Ez az eljárás elsősorban azért nem kielégítő, mert semmilyen fizikai érv nem indokolja, hogy az emittáló rendszert két különböző hőmérsékletű részrendszerre osszuk. Úgy tűnik, nagyon erőltetett lenne, ha a jelenségről alkotott képünket ilyen értelemben próbálnánk módosítani.

Ezzel szemben a kollektív- és egy-részecske szabadsági fokok egyidejű figyelembe vétele — mint a jelen fejezetben megmutatom — már egy klasszikus elmélet keretei között is természetes módon ad számot az alacsony energiás nehéz-ion reakciókban észlelt neutron-spektrum kemény komponensének jelentős részéről. (Meg kell jegyezni, hogy a szóban forgó kemény komponens viszonylag kis hatáskeresztmetszetet reprezentál a spektrum alacsony hőmérsékletű része mellett. Azt mondhatjuk, hogy a kísérlet nagy vonalakban megegyezik az elmélettel, az eltérés azonban annyira szisztematikus, hogy ténye eddig figyelembe nem vett fizikai jelenségre utal.)



9. ábra. Proton és pion energiaspektrumok nagy multiplicitású Ar+KCl, $E_{\text{LAB}}=800$ MeV/nukleon eseményekre $\theta_{\text{CM}}=90^\circ$ szögben. (A [14] munkából.)



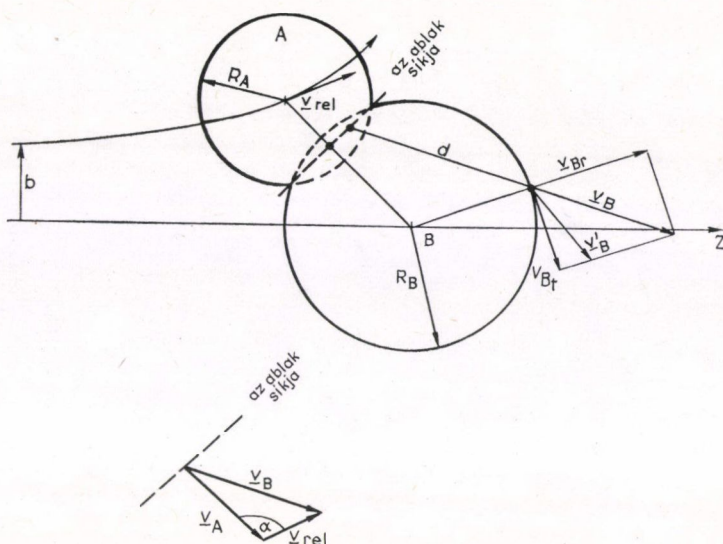
10. ábra. Invariáns π^+ -hatáskeresztmetszetek kontúrvonalai (a) az $^{40}\text{Ar} + ^{40}\text{Ca}$ reakcióra $E_{\text{LAB}} = 1.05$ GeV/nukleon energián, (b) a $p + p$ reakcióra $E_{\text{LAB}} = 730$ MeV energián. A maximális kontúrokon belüli területet vonalkázással, a mérések határait árnyékolt kontúrokkal jelölték [19].

Hasonló kemény komponenst korábban is tapasztaltak egyes párolgási spektrumok mellett. Protonokkal és alfa-részecskékkal kiváltott magreakciók esetén a bomló mag részecske-spektrumának nagy-energiás farkát „pre-equilibrium” bomlásként értelmezték [22]. Az elnevezés arra utal, hogy a kérdéses nagy energiájú nukleonok a reakciónak abból a fázisából származnak, amikor még nem alakult ki a rendszerben a (szokásos párolgási spektrumhoz vezető) hőmérsékleti egyensúly. Most nehéz-ion ütközésekre alkalmazzuk ezt a gondolatot. Kutatócsoportunk ezzel kapcsolatos eredményeit a [23] munkák tartalmazzák. Hasonló mechanizmust vizsgált Robel is [24].

2.2 A PEP-modell

Amikor a két mag egymás közelébe kerül, a köztük levő potenciállal fokozatosan (de gyorsan) csökken: a lövedék és a céltárgymag között kinyílik az „ablak”. Nukleonok léphetnek át az egyik magból a másikba. (A donort a továbbiakban A -val, a kiszemelt nukleont felvevő magot B -vel jelöljük, 11. ábra.) Az átadott nukleon sebessége a B -hez rögzített koordináta-rendszerben

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_{\text{rel}} + \mathbf{V}_A, \quad (2.1)$$



11. ábra. A PEP-geometria. A Z tengely a nyaláb tengelye, b az ütközési paraméter. V_A az átadandó nukleon sebessége A -ban, V_B az átadott nukleon sebessége B -ben, V_{rel} a két nehéz-ion relatív sebessége. Az r index a radiális komponensre, t a tangenciális komponensre utal.

ahol V_A a szóban forgó nukleon sebessége a donor rendszerében, V_{rel} pedig a két mag relatív sebessége. Egyszerűség kedvéért föltételezzük, hogy a transzferre akkor kerül sor, amikor a két magot reprezentáló potenciálok már összeolvadtak; egyetlen közös „tartály” alakult ki, amelyben állandó az egyrészecske-potenciál. (Ez a Coulomb- és a szimmetria-tagok elhanyagolásával egyenértékű, amelyek természetesen különbözhetnek a két magban.) Az átadott részecske kinetikus energiája a B rendszerben

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2} m_p V_B^2 = \varepsilon_A + \varepsilon_{rel} + 2 \sqrt{\varepsilon_A \varepsilon_{rel}} \cos \alpha, \quad (2.2)$$

ahol m_p a nukleon-tömeg, $\varepsilon_A = \frac{1}{2} m_p V_A^2$, $\varepsilon_{rel} = \frac{1}{2} m_p V_{rel}^2$, α pedig a V_A és V_{rel} vektorok szöge. Kedvező esetben (ha $\cos \alpha \approx 1$) az átadott nukleon a (2.2)-ben fellépő kereszttag miatt nagy energiával rendelkezhet a B rendszerben. Ezt az egy-részecske energiát természetesen a donor kollektív visszalökődése (a relatív mozgás fékeződése) árán nyertük. Az impulzusmegmaradás következtében a transzfer után a relatív sebesség

$$V'_{rel} \approx V_{rel} - \frac{V_A}{A-1}, \quad (2.3)$$

ahol V_{rel} a transzfer előtti relatív sebesség. A jelen modellben a fenti visszalökődést átlagos értelemben, a relatív mozgás fékeződésének (a súrlódásnak) a proximity képben való leírása révén vesszük figyelembe. Részletesebb elméletben a relatív mozgást minden transzfer után (2.3) szerint kellene módosítani. Nyilvánvaló azonban, hogy

fenomenologikus elméletünk is a fizikailag kézenfekvő eredményre vezet: nagy energiájú nukleonok átadása csak a reakció korai szakaszában, közvetlenül az ablak ki nyílása után lehetséges — később a relatív mozgás lefékeződik és így $\varepsilon_B \simeq \varepsilon_A$.

Az átadott nagy energiájú nukleonok a reakció által még nem túlságosan megzavart — „hideg” — B magban haladnak tovább. (Ezek a gyors részecskék az ütközés első hírnökei a B mag távolabbi részei számára.) Az átadott nukleonok itt abszorbeálódhatnak, de ha ez nem következik be és eléri a B mag túlsó felületét, akkor megtörténhet, hogy energiájuk

$$\varepsilon_B > U + V, \quad (2.4)$$

ahol U (az állandónak föltételezett) egyrészecske-potenciál, V pedig a magfelszínen levő potenciálját (V neutronokra zérus, protonokra a Coulomb-gát). Ebben az esetben a kérdéses nukleon kilép a mag potenciálteréből. Az ilyen nukleonokat a „promptly emitted particle” angol kifejezésből betűszót alkotva PEP-nek nevezzük. Modellünk erről a rövidítésről kapta elnevezését. (Használatos még a Fermi-jet kifejezés is.)

Hogy a PEP-hatáskeresztmetszetet kiszámítsuk, a donorbeli sebességeloszlásból indulunk ki, amelyet zérus hőmérsékletű Fermi-eloszlással közelítünk:

$$p(v_A) = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{v_A^2}{v_F^3}, \quad \text{ha } v_A \leq v_F, \quad (2.5)$$

ahol v_F a Fermi-sebesség. Egy PEP kinetikus energiája, amikor a rendszerből emittálódik

$$\varepsilon'_B = \varepsilon_B - U - V. \quad (2.6)$$

A PEP-szögeloszlás meghatározásához észre kell vennünk, hogy a \mathbf{v}_B és \mathbf{v}'_B sebességek általában különbözőek (11. ábra). A nukleon a B mag gömbszimmetrikus potenciálterében mozog, ezért impulzusmomentuma és így sebességének tangenciális komponense (a B középpontjába helyezett koordinátarendszerben) állandó, radiális sebessége viszont az energiamegmaradás követelményének megfelelően lecsökken, mikor kilép a B magot reprezentáló potenciálgödörből. Ez egyrészt a (2.4)-nél szigorúbb

$$\frac{1}{2} m_p v_{B_r}^2 > U + V \quad (2.7)$$

PEP-feltételre vezet, másrészt meghatározza a rendszer által emittált PEP pályáját, hiszen

$$v'_{B_t} = v_{B_t}, \quad (2.8)$$

ahol az r index a radiális, t a tangenciális komponensre utal.

A PEP kibocsátás valószínűsége adott b ütközési paraméter mellett

$$p_{\text{PEP}}(b) = \int dt \int d\Gamma \int d\mathbf{v}_A p(\mathbf{v}_A) n(\mathbf{v}_B) e^{-d/\lambda}, \quad (2.9)$$

ahol $n(\mathbf{v}_B)$ az ablakon áthaladó nukleonok fluxusa, d az a távolság, amit a kérdéses nukleon megtesz a B magban (11. ábra), λ a szabad úthossz (így $e^{-d/\lambda}$ az abszorpciós faktor). Az integrálok a sebességeloszlásra, az ablak keresztmetszetére és az időre vonatkoznak. (Adott t időhöz a nehéz-ionok meghatározott helyzete tartozik trajektóriájuk mentén, ez viszont az ablak síkját rögzíti. Az „ablak” kifejezést itt csak a szemléletesség kedvéért használjuk, a két mag között lecsökkent potenciálgátra utalunk

vele. Az ablak keresztmetszetére vonatkozó integrálás a 3. ábrán szereplő proximity geometriában a Γ síkon történik, lényegében a q változó szerint. Az ablak geometriája és maga a nehéz-ion trajektória — amely mentén az idő szerinti integrált végezzük — az ütközési paramétertől függ.) A λ szabad úthosszt a [25]-ben adott módon határoztuk meg az optikai potenciál (energiafüggő) képzetes részéből, amelyet a (szintén [25]-beli) kísérleti adatokhoz illesztett görbéből nyertünk.

A teljes PEP-hatáskeresztmetszet

$$\sigma_t = 2\pi \int_0^{b_g} b db p_{\text{PEP}}(b), \quad (2.10)$$

ahol b_g a maximális ütközési paraméter, amely mellett létrejön a reakció (grazing). A teljes PEP-hatáskeresztmetszet — a bevezetésben tárgyalt reakció-mechanismusoknak megfelelően — két tagból tevődik össze: egy része olyan, PEP, amely compound reakciót kísér, másik része mélyen rugalmatlan nehéz-ion szórás mellett jelenik meg:

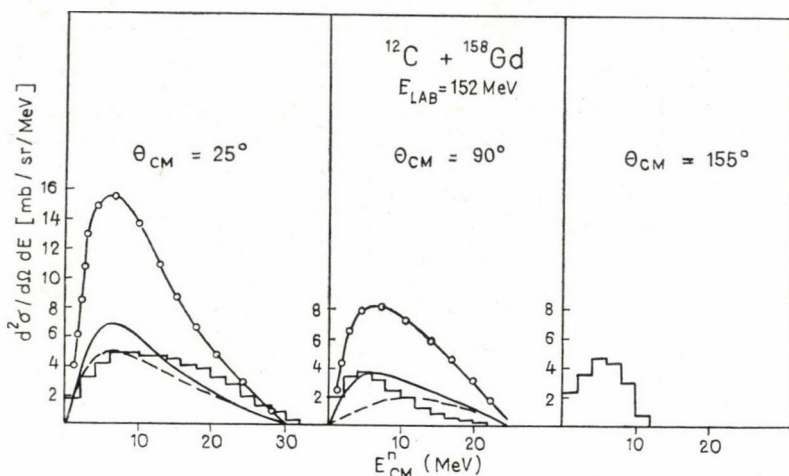
$$\sigma_t = \sigma_{\text{CF}} + \sigma_{\text{DI}}, \quad (2.11)$$

ahol σ_{CF} a teljes fúzióhoz tartozó, σ_{DI} pedig a mélyen rugalmatlan ütközésekből származó PEP-hatáskeresztmetszetet jelöli. Általában $\sigma_{\text{DI}} \ll \sigma_{\text{CF}}$, mert (2.3)-beli $\cos \alpha \ll 1$ a mélyen rugalmatlan ütközéseket jellemző nagy ütközési paraméterek esetén.

A PEP-hatáskeresztmetszet nagyon érzékeny a nehéz-ion ütközés dinamikájára. (Ez természetes, hiszen (2.1) szerint a PEP-kibocsátásért a relatív sebesség felelős, amely gyorsan változik abban az időintervallumban, amelyben nyitva van az ablak a két mag között.) A mozgásegyenleteket numerikusan oldottuk meg és a bennük szereplő kölcsönhatási tagban figyelembe vettük az (1.4) proximity potenciált [6], a Coulomb-potenciált (a [26] által meghatározott közelítésben) és egy i -tal arányos disszipatív tagot (a súrlódást), a proximity súrlódási együtthatóval [7]. A (2.9)-ben szereplő idő szerinti integrált az így meghatározott trajektória mentén tett lépésekkel végeztük el. Mivel általában $V_{\text{rel}} \ll V_B$, minden lépésben rögzítettnek tekintettük a nehéz-ion geometriát arra az időre, amíg az átadott nukleon az ablaktól eljut a B magot reprezentáló potenciálgödör túlsó faláig. Továbbá, mivel az érdeklődésünkre számot tartó nukleonok (esetleges PEP-ek) kinetikus energiája nagy (≈ 60 MeV) a B mag belsejében, első közelítésként föltételeztük azt is, hogy ezek a részecskék klasszikus trajektóriát követnek. A (2.9)-ben szereplő (az idő szerinti integrálást leszámítva még mindig öt dimenziós) további integrálást Monte Carlo technikával végeztük el.

2.3 Eredmények; összehasonlítás a kísérlettel

A $^{12}\text{C} + ^{158}\text{Gd}$ reakcióra $E_{\text{lab}} = 152$ MeV bombázó energia mellett részletes mérési eredmények állnak rendelkezésünkre [21]. Modellünk következményeit az ebben a kísérletben kapott neutron-spektrumokkal hasonlítjuk össze. A 12. ábrán a differenciális hatáskeresztmetszetet tüntettük föl a kilépő neutron energiájának a függvényében a tömegközépponti rendszerben három különböző szögben ($\theta_{\text{CM}} = 25^\circ, 90^\circ$ és 155°). Az ábrán a folytonos vonal reprezentálja a kísérleti eredményt, amelynek hibahatárait (a szaggatott és a körökkel megjelölt vonal) becsléssel állapítottuk meg. A folytonos vonal a mért spektrumok kemény komponense. A spektrum egyensúlyi részét jellemző hőmérséklet azonban nem határozható meg nagy biztonsággal a kí-



12. ábra. PEP-eloszlások (neutronokra) 3 különböző tömegközépponti szög esetén a $^{12}\text{C} + ^{158}\text{Gd}$ reakcióban $E_{\text{LAB}} = 152$ MeV energián. A hisztogram a számított eloszlás, a folytonos vonal a mérési eredmény [21]. A mérési eredménynek és hibahatárainak (szaggatott és körökkel jelzett vonal) részletes meghatározási módját lásd a szövegben.

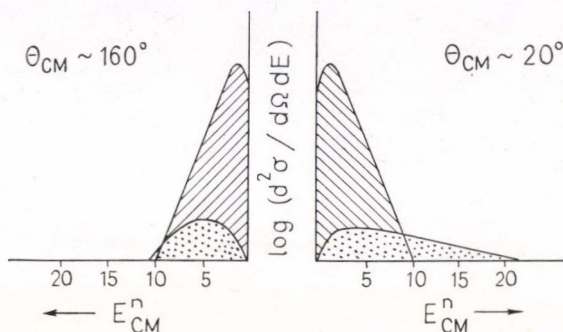
sérleti adatokból. A hőmérséklet-értékeket kissé megváltoztatva a szaggatott vonalhoz jutunk. Ugyanakkor, mivel a mért reakciócsatornák nem merítik ki a teljes hatáskeresztmetszetet, a nem mért csatornákra is átlagosan a vizsgáltakéval azonos PEP-produkciót feltételezve kapjuk a mérési eredmények felső hibahatárát. A hibahatárokat azért tüntettük föl, hogy felhívjuk a figyelmet a mérés kiértékelésében meglevő bizonytalanságra. A 12. ábrán szereplő hisztogram a (Monte Carlo számítás eredményeként adódó) elméleti PEP energia-eloszlás. A $\theta_{\text{CM}} = 25^\circ$ -os spektrum nagy energiás része jól egyezik a mérési eredménnyel, míg $\theta_{\text{CM}} = 90^\circ$ -nál — bár a spektrum alakja kielégítő — túl kevés nagy energiás PEP-et kapunk. Ez az eltérés érthető, mert nagy energiás PEP elsősorban olyan átadott nukleonból lehet, amely a B mag középső részén halad keresztül és ezeket a trajektóriákat a (2.8) feltétel még tovább fókuszálja a kis szögekbe. Egyéb lehetséges mechanizmusok (pl. egy izotróp módon emitáló forró rész [27], amelyet azonban maguk a nehéz ionok árnyékolnak) $\theta_{\text{CM}} = 90^\circ$ szögben adhatnak nagyobb hatáskeresztmetszetet.

Adott nehéz-ion ütközésben természetesen két PEP-jet léphet föl: a lövedékből a targetnek átadott és a targetből kilépő, illetve a targetből származó és a lövedéken áthaladó nukleonok nyalábja. Ez a tény rendkívül fontos kísérletileg. Vegyük észre ugyanis, hogy (2.1) és (2.8) segítségével a PEP-sebességet az eddigiekben mindig ahhoz a maghoz képest számítottuk ki, amelyben a transzfer történt. A mérési eredményekkel való összehasonlításhoz arra volt szükség, hogy áttérjünk a tömegközépponti rendszerre.

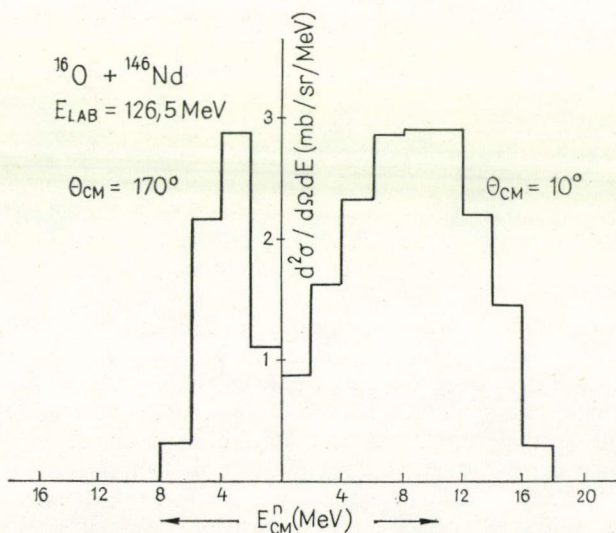
Ez a kétféle PEP-re a

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{v}'_B)_{\text{CM}} &= \mathbf{v}'_B + (\mathbf{v}_B)_{\text{CM}} \\ (\mathbf{v}'_A)_{\text{CM}} &= \mathbf{v}'_A + (\mathbf{v}_A)_{\text{CM}} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

összefüggések szerint történik, ahol $(v_A)_{CM}$ és $(v_B)_{CM}$ az A és B magok sebessége a tömegközépponti rendszerben. Mivel e sebességek abszolút értékeinek hányadosa fordítva arányos a magok tömegeinek hányadosával, a PEP-spektrum aszimmetrikus lesz a tömegközépponti rendszerben, ha $m_A \neq m_B$. (A szimmetriától való eltérés annál nagyobb, minél aszimmetrikusabb a lövedék-target kombináció.) Ez a tény ellentétben áll a compound mag párolgási spektrumának tulajdonságaival, amely a kialakult hőmérsékleti egyensúly következtében szimmetrikus $\theta_{CM} = 90^\circ$ körül.



13. ábra. Sematikus párolgási- és PEP-neutron-spektrumok könnyű + nehéz rendszerben. A vonalkázott terület a párolgási járulékot, a pontozott tartomány a PEP-járulékot reprezentálja.



14. ábra. Számított PEP energia-eloszlás a $^{16}\text{O} + ^{146}\text{Nd}$ reakcióra $E_{LAB} = 126,5$ MeV energián, a kibocsátott neutron energiájában 2 MeV-es lépésekkel. Az ábra jól mutatja a várt aszimmetriát.

Most tehát abban a helyzetben vagyunk, hogy döntő kísérletet javasolhatunk modellünk helyességének az ellenőrzésére. Tekintsünk ugyanis egy compound típusú (teljes fúzióval végződő) nehéz-ion reakciót! A kísérlet célja a differenciális PEP-hatáskeresztmetszetben mutatkozó aszimmetria mérése. (A mérés nehézsége, hogy ez az eltérés a részecske-spektrumok nagy-energiás részén jelentkezik, ahol a hatáskeresztmetszet kicsi.) A legegyszerűbb eljárásnak az tűnik, ha két, egymást 180° -ra kiegészítő szögben mérünk. A várt PEP energia-eloszlásokat sematikusán a 13. ábra, egy konkrét rendszerre kiszámítva pedig a 14. ábra mutatja. Mindkét ábrán jól látható az aszimmetria, amely elsősorban a nagyenergiás farokban jelentkezik. (Alacsonyabb energián a PEP-eket elnyomja a szokásos párolgási spektrum nagyságrendekkel nagyobb hatáskeresztmetszete, l. a 13. ábrát!)

Mérési eredmények egyelőre nem állnak rendelkezésre, csak tervezett kísérletek vannak [28]. Ha a mért adatokban aszimmetria mutatkozik majd, akkor legalábbis biztosak lehetünk abban, hogy ezen részecskék kibocsátásának idején még nem alakult ki termikus egyensúly. A 13. és 14. ábra előrejelzésével való kvalitatív egyezés pedig nagy mértékben valószínűsítene a most javasolt konkrét nem-egyensúlyi mechanizmust.

2.4 Diskusszió

A fentiekben ismertetett modellünk, véleményem szerint, a lehető legegyszerűbb — de azért bizonyos kvantitatív célokra is alkalmas — megvalósítása annak az ötletnek, hogy kapcsoljuk össze kollektív- és egy-részecske aspektusok vizsgálatát alacsony energiás nehéz-ion reakciókban. Legkézenfekvőbb volt ezt megtenni a mag-mag dinamika és az egy-részecske kinematika (2.1) szerinti együttes kezelésével.

Modellünk fenomenologikus: igyekeztünk maximálisan kihasználni minden olyan ismeretet, amely a nehéz-ion fizikában (és általában a magfizikában) már sokszorosan hasznosnak bizonyult. Ezen az alapon rögzítettük a modell-paramétereket is. Meg kívánom azonban jegyezni, hogy a PEP-produkció — érthető módon — meglehetősen érzékeny a Fermi-energia, a potenciálmélység és az átlagos szabad úthossz értékeire. Külön ki kell itt emelni eredményeinknek a relatív mozgás leírásában használt súrlódási együtthatóra való érzékenységét. A súrlódási együttható átlagosan ad számot az energia-disszipációról — más szóval átlagosan veszi figyelembe azt a folyamatot, amelynek során energia megy át a kiszemelt kollektív szabadsági fokról (a relatív mozgásról) az összes többire. Tartalmazza tehát a (2.3) típusú folyamatok eredményét is és ebben az értelemben a fenomenologikus leírás keretein belül használata a jelen modellben kielégítő és automatikusan tartalmazza, hogy a PEP energiáját a relatív mozgás lassulása árán nyertük. Más kérdés, hogy a konkrétan használt súrlódási együttható — a gömbszerűnek tekintett magok közötti proximity súrlódás — viszonylag gyengén fékezi a relatív mozgást. Mivel a relatív mozgás nemcsak a [7]-ben figyelembe vett módon fékeződik, hanem csatolódik egy sor más kollektív módushoz is (a magfelület rezeg, deformált stb.), a jelen modellben a csillapítás (disszipáció) minden bizonnyal túl kicsi. Tudomásom szerint azonban egyelőre nem létezik a proximity súrlódásnak a mag deformációját kvantitatíve figyelembe vevő leírása. Erősebb súrlódás természetesen a számított PEP-hatáskeresztmetszet csökkenéséhez vezetne.

3. Közepes energiák

3.1 Hidrodinamika

Ebben a részben a centrális, aszimmetrikus nehéz-ion ütközésekre alkalmazzuk a [29] dolgozatokban kifejlesztett egydimenziós hidrodinamikai leírást. A beszédmód egyszerűsítése érdekében könnyű lövedék nehéz céltárgymaggal való ütközését tárgyaljuk. ($A_p \ll A_T$, ahol A_p a lövedék, A_T a target tömegszáma.) Nehéz lövedék és könnyű target leírása pontosan ugyanígy történhet a lövedék koordinátarendszerében.

A $30 \text{ MeV} \lesssim E_{\text{LAB}}/A_p \lesssim 500 \text{ MeV}$ energia-tartományban a centrális, aszimmetrikus reakciókra vonatkozó egyik lehetséges fizikai kép szerint [27] a reakció kezdeti szakaszában lokális termodinamikai egyensúly alakul ki a két magnak az ütközés által közvetlenül érintett tartományában, miközben a magfolyadék távolabbi részei még lényegében nem vettek tudomást az ütközésről. Az így létrejött nagy sűrűségű és nagy energiasűrűségű forró rész („hot spot”) azonban — a nagyenergiás tűzfelhővel ellentétben — nem különül el az őt körülvevő „hideg” magfolyadéktól, hanem abban mozogva egyre több nukleont olvaszt magába és lehül.

A jelen vizsgálat elsődleges célja annak megállapítása, hogy az egydimenziós hidrodinamikai modell alátámasztja-e a forró részre vonatkozó fenti elképzelést. Modelünk — egydimenziós jellegénél fogva — természetesen csak nagyon durva képet adhat a forró rész kialakulásáról, amelyet egy két- vagy háromdimenziós számolás esetleg le is rombolhat.

Tekintsünk tehát nem túl nagy ütközési paramétereket

$$b < R_T - R_p, \quad (3.1)$$

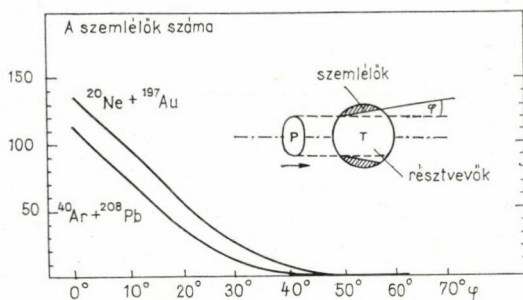
(ahol R_T a target, R_p a bombázó mag sugara) és aszimmetrikus rendszereket (pl. ^{16}O ütközik ^{208}Pb -cal). Ha fölteszük, hogy a forró rész transzverzális expanziója nem lényegesen gyorsabb, mint a targeten való áthatolásának sebessége, akkor azt mondhatjuk, hogy a folyamatban részt vevő nukleonok egy Φ nyílásszögű kúp belsejében helyezkednek el. A többi nukleon nem vesz részt közvetlenül a reakcióban (szemlélők). Φ értéke szabja meg a résztvevők és a spektátorok számát (15. ábra). A hidrodinamikai számítást egy olyan (\bar{R} sugarú) hipotetikus csőre vonatkozóan végeztük el, amelynek a targettel való metszete a kívánt számú spektátort produkálja (16. ábra).

A relativisztikus hidrodinamika mozgásegyenleteit a T_i^k energia-impulzus-tenzor által jellemzett rendszer energiájának és impulzusának megmaradását kifejező

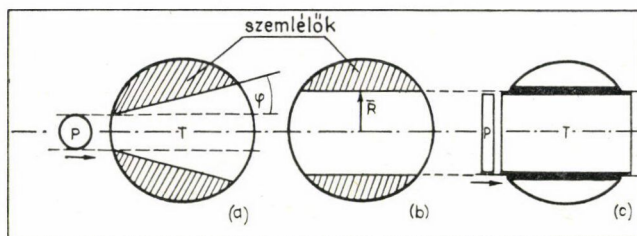
$$\frac{\partial T_i^k}{\partial X^k} = 0 \quad (3.2)$$

összefüggés tartalmazza, ahol T_i^k a folyadékmozgás négyes energia-impulzus-tenzora [30] (a kétszer előforduló k indexre összegezés értendő). (3.2)-ből kiindulva és elhanyagolva a hővezetést az egydimenziós esetre a mozgásegyenletek (a kontinuitási egyenlet hozzávételével) [29] az

$$\left. \begin{aligned} \dot{N} &= -N \operatorname{div} \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{M}} &= -\mathbf{M} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{grad} \pi \\ \dot{E} &= -E \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{div} (\pi \mathbf{v}) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$



15. ábra. A spektátorok száma Φ függvényében. Az inzert Φ definícióját mutatja.



16. ábra. Az egydimenziós modell bevezetésének sémája. A spektátorok száma (a)-ban és (b)-ben egyenlő; ez meghatározza $\bar{R}(\Phi)$ -t. A hidrodinamikában a (c)-beli P és T -vel dolgozunk.

alakra hozhatók, ahol

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}}, & \mathbf{M} &= (\varepsilon + \pi) \frac{v}{1-v^2} \\ E &= \frac{\varepsilon + \pi v^2}{1-v^2}, & \pi &= p + \eta \frac{\dot{\rho}}{\rho \sqrt{1-v^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

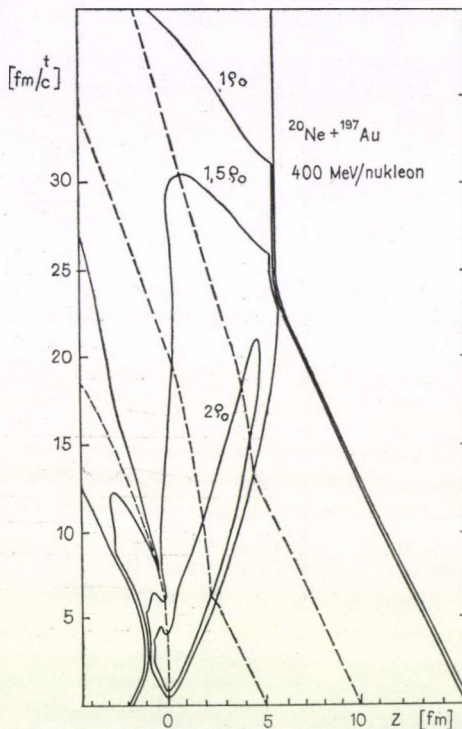
és a $\sigma \equiv \delta_t + v$ grad az együtt mozgó deriváltat jelenti. (3.4)-ben ρ a nukleonsűrűség, ε a (nyugalmi energiát is magába foglaló) energiasűrűség, p a nyomás, η a súrlódási együttható és v a vizsgált folyadékelem sebessége a választott koordináta-rendszerben. (A $c=1$ egységrendszert használjuk.)

A (3.3) összefüggések első sora a kontinuitási egyenlet, a második és harmadik sor a Navier—Stokes egyenlet relativisztikus általánosításának tekinthető. (Kvalitatíve azt mondhatjuk, hogy relativisztikusan az \mathbf{M} impulzus-jellegű mennyiségre vonatkozó három egyenlet mellett egy negyedik is adódik az E energiára.) A (3.3) egyenleteket a [29] dolgozatokban ismertetett közelítésben és az ottani numerikus módszerrel oldottuk meg. Eredményeinket a [31] munka tartalmazza. Itt a $^{20}\text{Ne} + ^{197}\text{Au}$ rendszerre $E_{\text{LAB}} = 400$ MeV/nukleon bombázó energián végzett számítások eredményét mutatjuk be. Ezt foglalja össze a 17. ábra a kétdimenziós tér-időben. (Azt a koordináta-rendszert használjuk, amelyben a lövedék és a target egyenlő sebességgel közeledik egymáshoz — mean velocity system.) Ha a forró részt azzal a tartománnyal azo-

nosítjuk, amelyben a nukleonsűrűség nagyobb, mint a ρ_0 normál maganyag-sűrűség kétszerese, akkor a 17. ábráról leolvashatjuk, hogy a „hot spot” egyre csökkenő sebességgel hatol be a targetbe, miközben kezdetben a target és a lövedék anyagának egyre nagyobb részét olvasztja magába. A szimmetria a lövedék teljes beolvadásáig tart, majd a forró rész lassan eltűnik a target anyagában anélkül, hogy teljesen áthatolna rajta. Ugyanezt a folyamatot kissé

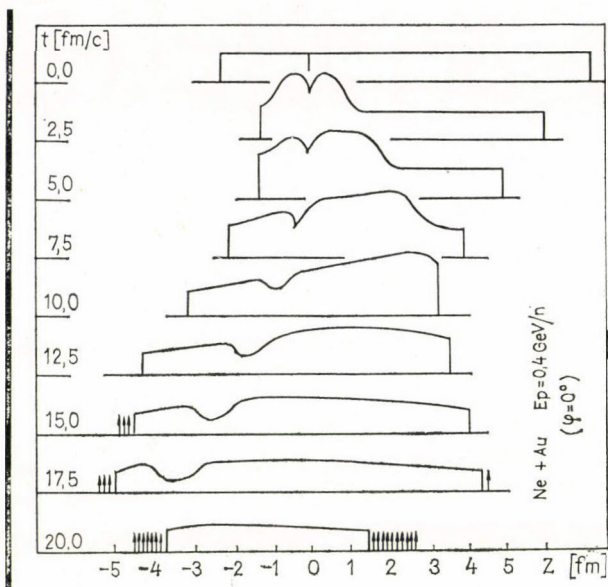
szokványosabb módon (a sűrűségprofil időbeli fejlődésével) ábrázoltuk a 18. ábrán. (A sűrűségprofilban a két mag határfelületén jelentkező bemélyedés a modellünkben használt nem realiztikus határfeltételek következménye.) A 18. ábrán $t = 15$ fm/c-ig nem látunk újdonságot a 17. ábrához képest. Az itt megjelenő nyílak azokat a folyadékkelelemeket reprezentálják, amelyek az utolsó ábrázolt időpont óta eleget tettek a szétesési feltételnek ($\rho < 0,75 \rho_0$ vagy a nyomás $p < 0$). Arról van ugyanis szó, hogy a hidrodinamikai áramlás során a sűrűség a magfolyadék szélein fokozatosan csökken és egy adott időpontban az anyag olyan híg állapotát ériük el, amikor a kölcsönhatás már nem képes arra, hogy biztosítsa a hidrodinamikai leírás alkalmazhatóságát. Úgy tekintettük, hogy ez a helyzet akkor következik be, ha a sűrűség a maganyag-sűrűség háromnegyed részére csökken. A hidrodinamikai leírás akkor is elveszti fizikai jelentését, ha a nyomás negatívvá válik. Azt az időpontot, amikor a fenti feltételek valamelyike először teljesül, szétesésnek (break-upnak) nevezzük. A szétesés pillanatában változtatjuk meg szemléletünket és térünk át a kollektív szabadsági fokokról az egyes részecskék nyomon követésére: a falak által képviselt határfeltétel eltűnik és a szóban forgó folyadékkelem tetszőleges irányban szabadon „fölrobbanhat” a nukleonok termikus sebessége következtében. Ily módon egydimenziós modellünk alkalmazásával tesszük egyrészecske-eloszlások, hatáskeresztmetszetek becslésére. (A fenti eljárás hasonló a [32]-ben megadotthoz.) A szétesés után a spektátorokat is figyelembe vesszük: természetesen a reakció befolyásolja ezeket a nukleonokat is. Gerjesztésüket azonban másodrendű effektusnak tekintjük és átlagosan a $kT_s = 6$ MeV hőmérséklettel írjuk le [33]. Ez a gerjesztés értelmezhető a spektátortérfogatok nagy felületi energiájával is.

A fent vázolt módon számított differenciális proton-eloszlásokat tüntettük föl a 19. ábrán a $^{20}\text{Ne} + ^{197}\text{Au}$ reakcióra $E_{\text{LAB}} = 400$ MeV/nukleon bombázó energián.



17. ábra. A sűrűségeloszlás kontúr-diagramja a kétdimenziós tér-időben a $^{20}\text{Ne} + ^{197}\text{Au}$ reakcióra $E_{\text{LAB}} = 400$ MeV/nukleon energián. A forró részt (l. a szöveget) a legbelső kontúrvonallal határolt — a kétszeres maganyag-sűrűségnél nagyobb sűrűségű — tartománnyal azonosítjuk. A szaggatott vonalak a folyadékcellák áramvonalait reprezentálják.

A kísérleti pontok még nem véglegesek; egy kiértékelés alatt álló mérés [34] előzetes eredményei. Az elméleti görbéket önkényesen normáltuk. A számításainkban alacsony energián mutató csúcsot a spektátorok okozták és talán ugyanez az eredete a kísérleti pontokban alacsony energián fellépő maximumnak. A kísérlet és az elmélet összehasonlítása csak 90° -os szögben szolgál katasztrofális eredménnyel. Ezt azonban modellünk egydimenziós természete magyarázza. (Világos, hogy nagy szükség van három-, de legalább kétdimenziós számításokra.)

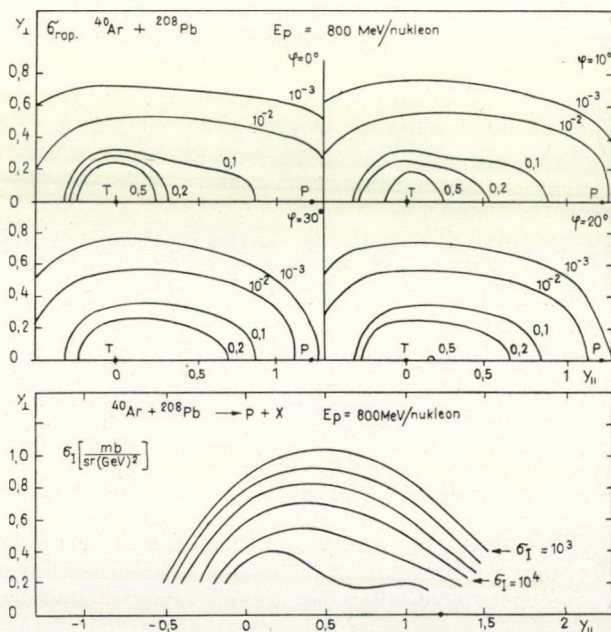
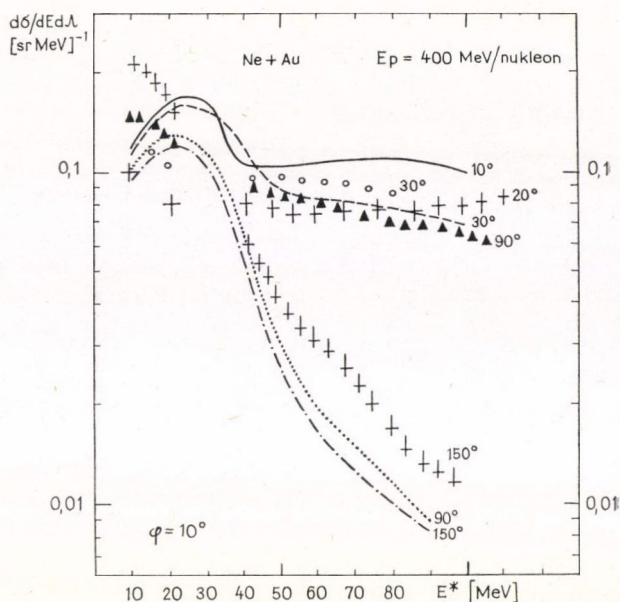


18. ábra. A sűrűségprofil időbeli fejlődése a 17. ábrán is bemutatott reakcióra. A nyilak azokat a folyadékelemeket reprezentálják, amelyek az utolsó ábrázolt időpont óta tetek eleget a szétesési feltételnek. A sűrűségprofilban a két mag határán jelentkező bemélyedés a modellünkben használt — nem realisztikus — határfeltételek következménye.

A 20. ábrán számított és mért [35] rapiditás-spektrumokat látunk az $^{40}\text{Ar} + ^{208}\text{Pb}$ ütközésre $E_{\text{LAB}} = 800$ MeV/nukleon energián. (Ez az energia a tömegközépponti rendszerben $E_{\text{CM/A}} = 108,2$ MeV-nek felel meg.) A kontúrvonalak az invariáns hatás-keresztmetszet azonos értékeihez tartoznak. (Az elméleti görbéken önkényes egységekben.) Megjegyzendő, hogy a kísérleti adatok nem csak centrális eseményeket tartalmaznak, tehát nem hasonlíthatók össze közvetlenül számításaink eredményével. (Ezt tükrözi a kísérleti görbéken a lövedék rapiditása körül mutató csúcs — a lövedékből származó spektátorok járuléka.)

A kísérleti spektrumon megfigyelhetjük, hogy a rapiditástérkép nem az $y_{\parallel} = 0$ target-rapiditás körül csúcsosodik, hanem attól kissé eltolva. Ez a tény a target maradékának visszalökődésére mutat. A target-visszalökődést az eddigiekben elhanyagoltuk, mert bár a szétesés pillanatáig csak kollektív szabadsági fokokkal dolgoztunk,

19. ábra. Differenciális proton-eloszlások a centrális $^{20}\text{Ne} + ^{197}\text{Au}$ reakcióra $E_{\text{LAB}} = 400$ MeV/nukleon energián. A számított görbéket önkényesen normáltuk. A számításokban alacsony energián megjelenő csúcs a $kT_s = 6$ MeV hőmérséklettel jellemzett spektátorok járuléka.



20. ábra. Rapiditás kontúrvonalak az $^{40}\text{Ar} + ^{208}\text{Pb}$ ütközésre $E_{\text{LAB}} = 800$ MeV/nukleon energián. A számítások eredményeit Φ függvényében mutatjuk be, önkényes egységekben. Az alsó, kísérleti ábra a periférikus reakciók járulékát is tartalmazza.

a break-up után kizárólag egy-részecske szabadsági fokokat vettünk figyelembe. Ez a szemléletváltás nyilvánvalóan túl éles és túlságosan durva közelítése a fizikai helyzetnek. A következőkben a target maradékának visszalökődését is leíró sematikus modellünket ismertetem.

3.2 A visszalökődés szerepe

A 3.1 részben tárgyalt centrális reakciókban nem magától értetődő, hogy a targetnek viszonylag nagy tömegszámú része visszamarad. Hiszen a forró rész által képviselt zavar végül is az egész magra kiterjed és a rendszer elegendő gerjesztési energia esetén teljes egészében felrobbanhat. Ezért ezt a jelenséget az előző részben elhanyagoltuk. Ha azonban a target tömegszáma — és így hőkapacitása — elég nagy, akkor elegendő idő elteltével a hőmérséklet kellően lecsökkenhet ahhoz, hogy a nukleonok egy része target-maradékot alkotva együtt maradjon. Ez a target-maradék (amely gerjesztett állapotban van és a későbbiekben további nukleonokat párologtat el) általában résztvevő és spektátor-nukleonokat egyaránt tartalmaz. Kollektív mozgása — a visszalökődés nagysága és iránya — értékes információt szolgáltat a reakció-mechanizmusról.

Ha a fent leírt target-maradék kialakul is centrális reakciókban (erre utal a 20. ábra kísérleti rapiditástérképe csúcsának $y_{||}=0$ -tól való eltolódása), kollektív sebessége minden bizonnyal kicsi, hiszen például emulziós mérésekben a target-maradék általában nem hagy látható nyomot. Mégis rendkívül fontos, hogy egy más típusú (például részecske-detektoros) kísérletben információt szerezzünk a target-maradék visszalökődéséről. A kollektív visszalökődési sebesség iránya ugyanis (a nyalábbal együtt) közelítőleg definiálja a reakciósíkot. Mivel a vizsgált reakciótípusban (közel centrális, aszimmetrikus ütközések) a lövedéknek nincs maradéka, ez az egyetlen könnyű lehetőség a reakciósík kísérleti meghatározására. Ezért a CERN-ben 1980-ban beinduló, úgynevezett HIJAC-kísérletben (^{12}C nyaláb $E_{\text{LAB}}=86$ MeV/nukleon energián különböző targeteken) javaslatunk alapján a nehéz maradékok mérésére is sor kerül [36].

Megjegyzem itt, hogy a használt modellek nemcsak a közepes energiákon, hanem kis és nagy energián is elhanyagolják a visszalökődési effektusokat leíró kollektív szabadsági fokokat. Ezt a (2.3)-mal kapcsolatos érvelése alapján teszik. (Mi is így járunk el a jelen dolgozat 2. fejezetében.) Ugyanakkor azokban a relativisztikus modellekben, amelyek a nyalábra merőleges sikot valamilyen értelemben differenciális cellákra osztják [16], a tömegszám az egyes cellákban kicsi is lehet. Ebben a fizikai helyzetben igen fontos korrekciót jelenthet a visszalökődés figyelembe vétele. A most tárgyalandó sematikus modell kiterjeszthető ezekre az esetekre.

3.3 Sematikus modell aszimmetrikus, centrális reakciókra

Tegyük föl, hogy az aszimmetrikus, közel centrális ($b < R_T - R_p$) nehéz-ion reakció (15. és 16. ábra) közepes energiákon kétfázisú folyamatként írható le:

1. A két mag kölcsönhatásba lépését követően először lokális termodinamikai egyensúly („hot spot”) alakul ki abban a tartományban, ahol a lövedék és a target köz-

vetlenül érintkezik; a magfolyadéknak ez a sűrű és magas hőmérsékletű része v_h sebességgel mozog a target távolabbi, még meg nem zavart részeihez viszonyítva.

2. A forró rész nukleonokat emittál, ezek egy része abszorbeálódik a target-maradékban, és mozgásba hozza azt.

Modellünkben egyetlen szabad paraméter van, azoknak a nukleonoknak az α száma, amelyek a targetból beleolvadnak a forró részbe. A modell α függvényében adja meg a targetmaradék visszalökődésének v_r sebességét. Mivel a centrális reakciókra szorítkozunk, valamennyi szereplő vektor a z -tengely (a nyaláb) irányába esik; ez egydimenzióssá egyszerűsíti a problémát. A $b \neq 0$ -ra való kiterjesztés további feltételeket igényel, de csak ez adhat majd teljes választ a 3.2 részben felvetett kérdésekre.

A reakció első fázisának leírására csak az energia- és impulzusmegmaradást használjuk. Feltéve hogy a teljes rendelkezésre álló energia a forró rész, mint egész kollektív mozgásának és a benne levő nukleonok Fermi-mozgásának az energiájává alakul át, azt kapjuk, hogy az átlagos statisztikus sebesség

$$\overline{v^2} = \frac{A_p a}{(A_p + a)^2} v_0^2, \quad (3.5)$$

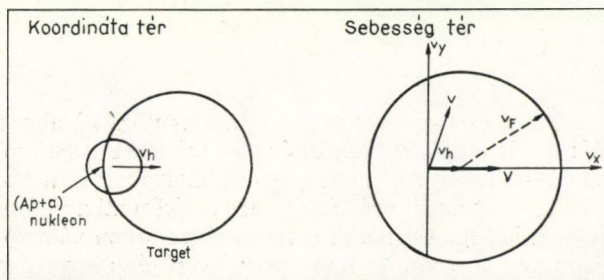
ahol $v_0 = \sqrt{\frac{2E_{\text{LAB}}}{m_p A_p}}$ a bombázó sebesség és — mint korábban is — A_p a lövedék tömegszáma, a pedig a forró részben a targetból részt vevő nukleonok száma. További egyszerűsítésként fölteszük azt is, hogy az így kapott v^2 zérus hőmérsékletű Fermi-eloszlásnak felel meg. (Ez az egyszerűsítő feltevés nem szükséges. A felhasználása nélküli és nem-centrális reakciókra is kiterjesztett elmélet kidolgozása folyamatban van [37].) A közelítés nagy előnye, hogy ily módon élesen definiált v^2 Fermi-sebességet kapunk, aminek nagy hasznát vesszük a jelen kvalitatív becslésekben.

Felhasználva, hogy zérus hőmérsékletű Fermi-eloszlásra [6]

$$\overline{v^n} = \frac{3}{n+3} v_F^n, \quad (3.6)$$

(ahol $\overline{v^n}$ a sebesség n -edik hatványának átlagát jelenti), azt kapjuk, hogy

$$v_F = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{A_p a}{(A_p + a)^2}} v_0. \quad (3.7)$$



21. ábra. A forró rész a sematikus modellben: a targetból α részecske vesz részt a sűrű, magas hőmérsékletű tartomány kialakításában. A sebességtérben v_h -val eltolt Fermi-gömb reprezentálja a forró részt.

A reakció második fázisában ezt a v_F Fermi-sebességet használjuk föl a v_h kollektív sebességgel mozgó forró rész bomlásának leírására. Más szóval fizikai képünk azonos a 3.1 részben alkalmazottal a lövedék teljes beolvadásáig, azután viszont azt vizsgáljuk, hogy hogyan löki meg a bomló forró rész a target-maradékot, mint egészet.

A második fázisban a v_h sebességgel mozgó forró részt egy ezzel a sebességértékkel eltolt Fermi-gömb reprezentálja a sebességtérben (21. ábra). A forró rész valamennyi olyan nukleonjáról, amely a target-maradék felé mozog ($v_x > 0$), fölteszük, hogy abszorbeálódik is a target-maradékban. Ezek szerint a forró rész nukleonjainak a target maradékában abszorbeálódó része

$$f = \frac{\text{Abszorbeált térfogat}}{\text{Fermi-gömb térfogata}} = \frac{\int_{v_x > 0} d\tau}{\int_{\text{Fermi-gömb}} d\tau}, \quad (3.8)$$

ahol az integrál a forró részbeli sebességekre terjesztendő ki. A target-maradék A_{TR} tömegszáma

$$A_{TR} = A_T - a + (A_p + a) \cdot f. \quad (3.9)$$

Könnyű kiszámítani a visszalökődés sebességét is: először az abszorbeált nukleonok V átlagsebességét határozzuk meg:

$$V \int_{v_x > 0} d\tau = \int_{v_x > 0} v d\tau, \quad (3.10)$$

amiből a v_R visszalökődési sebessége

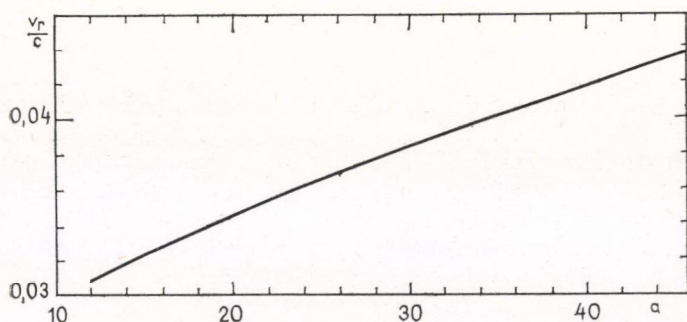
$$(A_p + a) \cdot f \cdot V = A_{TR} \cdot v_R. \quad (3.11)$$

A 22. ábrán a visszalökődési sebességet mutatjuk be α függvényében a $^{12}\text{C} + ^{208}\text{Pb}$ reakcióra $E_{\text{LAB}} = 86$ MeV/nukleon energián. A kollektív sebesség α lassan növekvő függvénye az $12 \lesssim \alpha \lesssim 50$ intervallumban. (Addig beszélünk forró részről, amíg a gerjesztési energia nagyobb legalább a kötési energiánál. Ez adja az α -intervallum felső határát. Másrészt világos hogy $\alpha > A_p$.)

Látjuk, hogy a visszalökődés sebességének maximális értéke $v_r \lesssim 0,045$ c.

3.4 Diskusszió

A forró rész abban az energia-tartományban alakulhat ki, ahol az ütközés már elég gyorsan zajlik: a két mag közvetlenül érintett (részben átfedő) résztérfogataiból való energia-kiáramlás — amelyet a maganyag meghatározott hővezetési együtthatója kormányoz — kisebb, mint az ütközés által ebbe a térfogatba pumpált energia. (Ez a feltétel természetesen időegységenként, a forró rész időben változó térfogatára értendő: a viszonylag nagy sűrűségű és nagy energiasűrűségű anyagdarab adott ideig, meghatározott tartományban létezik.) Annak az energia-tartománynak a felső határát, amelyben a forró rész létrejöhet, kvalitatíve azzal az energiával jelölhetnénk meg, amelyen túl a hidrodinamikai leírást értelmetlennek tekintjük ($E_{\text{LAB}}/A_p \lesssim 500$ MeV). Az energiát tovább növelve azonban a forró rész szerepkörét átveszi egy rokon foga-



22. ábra. A target-maradék modellünkben számított visszalökődési sebessége α függvényében a $^{12}\text{C} + ^{208}\text{Pb}$ reakcióra $E_{\text{LAB}} = 86$ MeV/nukleon energián.

lom, a tűzfelhő. Ennek értelmezéséről és az elnevezés által összefoglalt modellekről bőven lesz még szó a 4. fejezetben. Itt csak azt jegyzem meg, hogy a tűzfelhő geometriailag abban különbözik a forró résztől, hogy az előbbi határozottan elkülönül a spektátoroktól már a reakció kezdetén (8. ábra), míg a forró rész — mint láttuk — az őt körülvevő hideg maganyaggal való kölcsönhatás során hűl le.

A 3.3 részben olyan sematikus modellt vezettem be, amelynek első fázisában föltételeztem a forró rész kialakulását. (Nagyobb sűrűségű és energiasűrűségű zóna kialakulására a 3.1 részben ismertetett hidrodinamikai számításaink adtak indikációt.) A modell második fázisában a forró rész fölrobbanását igyekeztem nyomon követni, figyelembe véve a belőle emittált nukleonoknak a target maradékában való abszorpcióját, ami a visszalökődési sebesség meghatározását is lehetővé tette. A modell első fázisa tehát a nehéz-ion reakciók egy kollektív aspektusát ragadja meg, a második fázisban egy-részecske szabadsági fokok nyomon követése révén ismét egy kollektív szabadsági fokhoz, a target maradékának visszalökődéséhez jutunk el.

Az egy-részecske és kollektív szabadsági fokok egyidejű figyelembe vételével kapcsolatban sok más kérdés is fölmerül közepes energiákon. Felvethető például a következő probléma: az $E_{\text{CM}}/A \lesssim 140$ MeV energiákon keletkező pionok hatáskeresztmetszete megmagyarázható-e teljes egészében a nukleonok Fermi-mozgásával (az egyes magoknak megfelelő Fermi-tengerek részecske-lyuk gerjesztéseit is figyelembe véve)? Ha nem, az azt jelentené, hogy kollektív módusok is kelthetnek pionokat és ezzel ismét bizonyítaná a kollektív szabadsági fokok rendkívüli fontosságát a most vizsgált energia-tartományban.

Egy másik fontos, ugyancsak a pionokkal kapcsolatos kérdés, hogy vajon a keletkező pionok hány százaléka abszorbeálódik a hideg maganyagban, amelyen át kell haladnia, mielőtt eléri a detektorokat? Mivel ez a jelenség, amelyet pion-árnyékolásnak is neveznek, egyrészt szoros kapcsolatban áll a reakcióban szereplő nukleonok résztvevő szemlélt felosztásával, másrészt a pion-produkció nagyenergiás (relativisztikus) ütközésekben válik igen jelentőssé, a most fölvetett problémát a 4. fejezetben, a relativisztikus nehéz-ion reakciókba kapcsolódva tárgyalom. Ezekben az ütközésekben tovább bonyolítja a helyzetet az a tény, hogy a pionok keletkezésével a rendszerben nagyszámú új szabadsági fok jelenik meg.

4. Relativisztikus energiák

Amint azt az 1.3 részben láttuk, az $E_{CM}/A \gtrsim m_\pi$ energiákon célszerű a nukleonokat két csoportra — résztvevőkre és szemlélőkre — osztani. (A spektátor elnevezés az egyes szemlélő nukleonokra és a 8. ábrán látható egész „levágott” térfogatokra egyaránt utalhat.) Mivel a résztvevők és a spektátorok térben is elkülönülnek és a lezajló fizikai folyamatok is alapvetően különböznek a két csoportban, a relativisztikus nehéz-ion fizikát ennek a helyzetnek megfelelően felosztva tárgyalom. Először a résztvevőkkel — a ténylegesen kölcsönhatásba lépő nukleonokkal — foglalkozom. A spektátorok sorsát külön vizsgálom majd a 4.3 részben.

4.1 A tűzfelhő

Ebben a részben elsősorban a tűzfelhő fejlődésére koncentrálunk, ezért megtehetjük, hogy kialakulásának (begyűjtésének) a leírására a lehető legegyszerűbb modellt használjuk. Így járnak el [18] szerzői. A 4.1 részben az ő gondolatmenetüket követjük. Szimmetrikus, centrális ütközést tekintünk, és elhanyagoljuk a Fermi-mozgást. A geometriai kép a következő: a két nehéz iont reprezentáló gömb a relatív mozgás sebességével először teljes átfedésbe kerül — miközben az időben változó átfedési tartományban (ahol a nukleon-sűrűség a normál maganyag-sűrűség kétszerese) hadrokémiai átalakulások mennek végbe —, majd az így definiált reakció-tartály gömbszimmetrikus módon tágul a szétesés bekövetkezéséig (expanziós szakasz). A két gömböt kezdetben hideg nukleon-gáz tölti meg, amelynek részecskéi csak a relatív mozgás kollektív (rendezett) sebességével bírnak. Amint azonban a két mag érintkezésbe kerül, a nukleonok között rugalmas és rugalmatlan ütközések mennek végbe. Ez azzal a következménnyel jár, hogy a reakció-tartályban egyrészt meleg (rendezetlen sebességgel is bíró) nukleonok, másrészt egyéb hadronok jelennek meg. Elegendően sok ütközés után termodinamikai, később esetleg kémiai egyensúly alakul ki a forró gázban, amelynek komponensei nukleonok (N), delta-rezonanciák (Δ), pionok (π) és ρ -mezonok (ρ).

A figyelembe vett folyamatok:

$$\left. \begin{array}{lll} N_0 N_0 \rightarrow NN, & N_0 N \rightarrow NN, & NN \leftrightarrow N\Delta \\ N_0 N_0 \rightarrow N\Delta, & N_0 N \rightarrow N\Delta, & \Delta \leftrightarrow N\pi \\ N_0 \pi \rightarrow N\pi, & \rho & \leftrightarrow \pi\pi \end{array} \right\}, \quad (4.1)$$

ahol N_0 a kezdetben meglevő (hideg) nukleonokat jelöli. A modell több komponensű ideális, relativisztikus Boltzmann-gázként kezeli a tűzfelhőt. A gáz termodinamikai egyensúlyban van, de nincs kémiai egyensúlyban. Ez azt jelenti, hogy olyan típusú csatolt differenciál-egyenletek írják le, amelyek valamely hadron sűrűségének a reakció-térfogatban való változását egyrészt a térfogat változására, másrészt ütközési tagokra vezetik vissza. A térfogat változását először az átfedési tartomány növekedése, majd az expanszió okozza. A teljesség kedvéért a részletek mellőzésével idézem itt, hogy [18] szerzői az expansziót [38] alapján a sugár

$$R(t) = \frac{R_0}{t_0} (t^2 + t_0^2)^{1/2}, \quad (4.2)$$

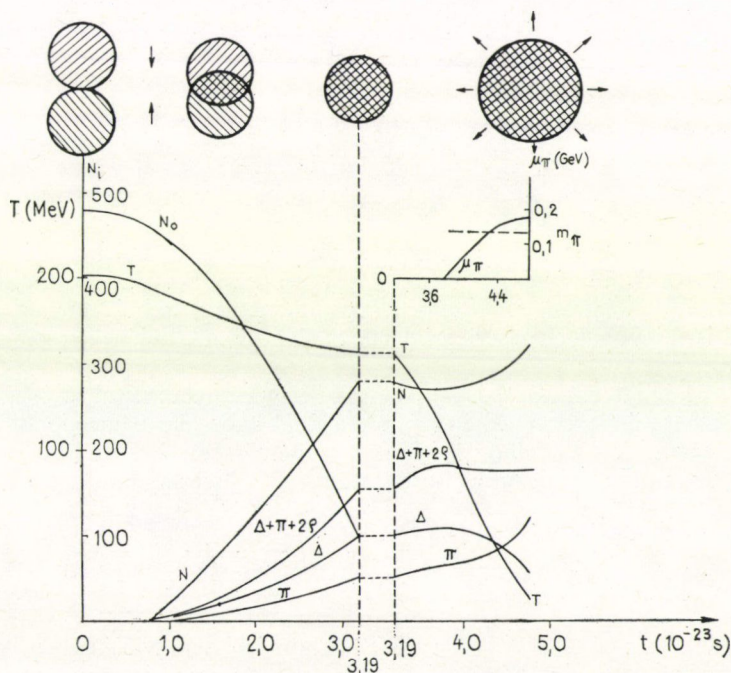
növekedésével írják le (R_0 az eredeti magsugár, t_0 az az időpont, amikor a teljes átfedés bekövetkezik).

Idézem azt a tényt is, hogy [18]-ban a hidrodinamikai áramlással kapcsolatos energia

$$E_{\text{hyd}}(t) = E_{\text{tot}} \frac{t^2}{t^2 + t_0^2}, \quad (4.3)$$

ahol E_{tot} a táguló gáztömb teljes kinetikus energiává transzformálható energiatartalma. Ez az energia a szétesés pillanatában [39]-cel is összhangban) E_{tot} -nak mintegy 45 %-a. A relativisztikus energia-tartományban is elmondhatjuk tehát, hogy a kollektív folyás együtt jelenik meg a reakcióterfogat belsejében mozgó egyes részecskék dinamikus egyensúlyával (egy-részecske aspektus). A sugár és a hidrodinamikai energia időfüggésének (4.2), illetve (4.3) konkrét alakja a jelen dolgozat szempontjából lényegtelen és nem játszik szerepet a továbbiakban.

A [18] modell azt az egyszerűsítő feltevést is tartalmazza, hogy két hideg nukleonnak egyetlen ütközése elég a termikus egyensúly eléréséhez. (Más szóval csak hideg és T hőmérséklettel jellemzett meleg nukleon fázist különböztet meg.) Ez természetesen túlságosan durva közelítés, megjegyzendő azonban, hogy pl. [40] szerint 3–4 ütközés már elegendő a termalizációhoz.



23. ábra. Az $U+U$ reakció dinamikája $E_{\text{LAB}}=2,1$ GeV/nukleon energián [18]. A hőmérséklet és az egyes hadronok száma az idő függvényében a begyűjtési ($t < 3,19 \cdot 10^{-23}$ s) és a tágulási szakaszban. Az inzert a pionok kémiai potenciáljának változását mutatja a Boltzmann-közelítésben (lásd a szövegben).

A fent vázolt modell egy jellegzetes eredményét mutatja a 23. ábra. Látjuk, hogy a kémiai egyensúly eléréséhez szükséges idő a reakcióidő nagyságrendjébe esik. Ez megkérdőjelezhetővé teszi a [17] modellekből nyert részecske-spektrumokat, amelyek a termodinamikai és kémiai egyensúly feltételezésén alapulnak.

Az ábra az ismertett modell egy hiányosságára is felhívja a figyelmet. A jobb felső sarokban a pionoknak a Boltzmann-gáz közelítésben kiszámított kémiai potenciálját (μ_π) látjuk, amely egy meghatározott t időben eléri a piontömeget:

$$\mu_\pi = m_\pi. \quad (4.4)$$

Ebben a pontban energia-befektetés nélkül keletkezhetnének pionok és a görbe a továbbibban Boltzmann-gáz közelítésben is érvényét veszti. A szinguláris pont elérése azonban — mint a következő részben látni fogjuk — annak a ténynek a következménye, hogy a szerzők a pionokra is Boltzmann-statisztikát alkalmaztak. A Boltzmann-közelítés kielégítő lehet a tágulás kezdeti szakaszában, amikor sok forró pion van jelen, de semmi esetre sem alkalmazható a fázisátalakulás közelében. Ez a vizsgálat is fölhívta azonban a figyelmet arra az érdekes kérdésre, hogy keletkezik-e pion-kondenzátum nehéz-ion reakciókban?

A most összefoglalt modell továbbfejlesztése (a Fermi-mozgás figyelembe vétele, közbenső lépés beiktatása a termalizáció folyamatába, kiterjesztés nem-gömbszimmetrikus expanzióra és nem-centrális ütközésekre) folyamatban van [41]. A legfontosabb finomítás azonban a pion-kondenzációval kapcsolatos. Az erre vonatkozó eredményeinket a következő részben közlöm.

4.2 A résztvevőkkel kapcsolatos eredmények

Megvizsgáltuk Bose—Einstein kondenzátum létrejöttének lehetőségét relativisztikus nehéz-ion reakciókban keletkező pionokra [42]. A vizsgált térfogat véges (kicsiny) volta miatt természetesen nem történhet valódi fázisátalakulás a rendszerben. Elég alacsony hőmérsékleten azonban szerephez jutnak a Bose-statisztika olyan vonásai, amelyek végtelen rendszerben fázisátmenetnek felelnének meg. Foglalkoztunk azzal is, hogy milyen kísérleti következményekben ölténének testet a bozon-tulajdonságok.

A hadrokémiai reakciókkal kapcsolatban elfogadjuk az előző részben ismertett modell [18] feltevéseit, csak a kémiai potenciállal kapcsolatos meggondolásokon kívánunk változtatni. A tűzfelhő V térfogata, T hőmérséklete és az általa tartalmazott pionok N_π száma a relativisztikus Bose-statisztika [43] szerint az

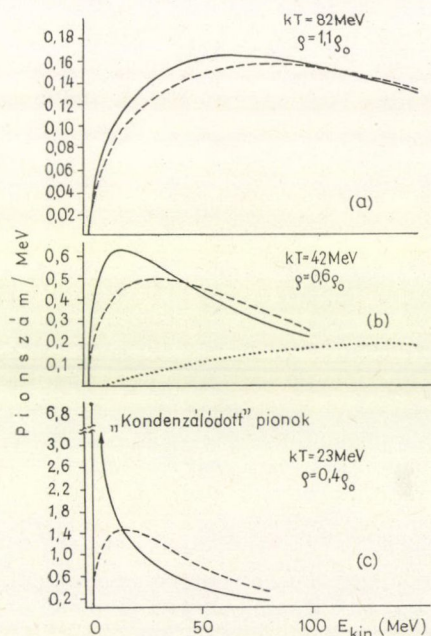
$$N_\pi = \frac{d}{e^{\frac{m_\pi c^2 - \mu_\pi}{kT}} - 1} + \frac{Vd}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3p}{e^{\frac{\sqrt{m_\pi^2 c^4 + p^2 c^2} - \mu_\pi}{kT}} - 1} \quad (4.5)$$

egyenlőségnek tesz eleget. (Itt kT a tűzfelhő hőmérséklete MeV-ekben, $m_\pi c^2$ a pion nyugalmi energiája és $d = (2S+1) \cdot (2I+1) = 3$ a pion spin-izospin degenerációs indexe.) Mivel a jelen esetben a V térfogat kicsi, a jobboldal első tagjával minden hőmérsékleten explicite figyelembe vettük a zérus kinetikus energiájú részecskék járulékát. Ez a szokásos statisztikus fizikában V makroszkopikus mérete miatt szükségtelen.

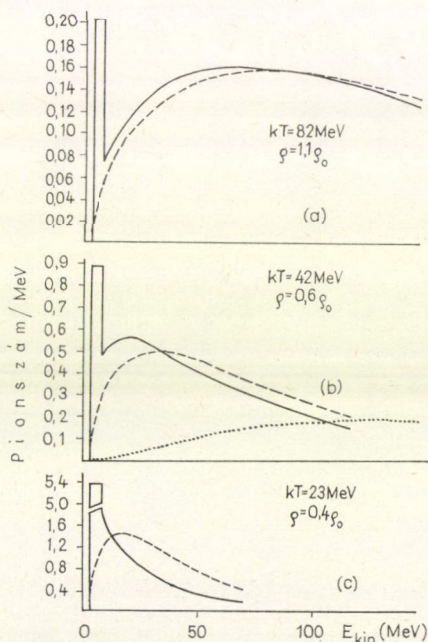
(4.5) implicit egyenlet a μ_π kémiai potenciálra. A kémiai potenciál ismeretében a pionok energiaeloszlását a tűzfelhő nyugalmi rendszerében

$$dn(E) = \begin{cases} \frac{d}{e^{\frac{m_\pi c^2 - \mu_\pi}{kT}} - 1}, & \text{ha } E = m_\pi c^2 \\ \frac{4\pi V d}{(2\pi\hbar c)^3} \frac{E \sqrt{E^2 - m_\pi^2 c^4}}{e^{\frac{E - \mu_\pi}{kT}} - 1} dE, & \text{ha } E > m_\pi c^2 \end{cases} \quad (4.6)$$

adja meg. Itt $E = \sqrt{m_\pi^2 c^4 + p^2 c^2}$ a részecske teljes energiája. Ezt az eloszlást ábrázoltuk a pion kinetikus energiájának ($E_{\text{kin}} = E - m_\pi c^2$) a függvényében az $^{238}\text{U} + ^{238}\text{U}$ reakcióra $E_{\text{LAB}} = 1,4$ GeV/nukleon energián a 24. és 25. ábrán. Az (a), (b), (c) részek a tágulás különböző szakaszait jellemző különböző kT hőmérsékleteknek felelnek meg. A 24. ábrán a kritikus hőmérséklet fölött nem vettük figyelembe a zérus kinetikus energiájú tag járulékát. Ezt a tagot („kondenzátum”) csak a kritikus hőmérséklet alatt tüntettük föl, ahol viszont a spektrum folytonos részét $\mu_\pi = m_\pi c^2$ -tel számoltuk. (Makroszkopikus térfogatok esetén ez a szokásos eljárás.) A 25. ábra minden hőmérsék-



24. ábra. Pion-spektrumok az $^{238}\text{U} + ^{238}\text{U}$ reakcióban $E_{\text{LAB}} = 1,4$ GeV/nukleon bombázó energián a tágulás különböző szakaszaiban. A folytonos vonal a Bose-, a szaggatott a Boltzmann-eloszlás. A break-up körüli (b) ábrán a delták járuléka is szerepel.
 $\rho_0 = 0,17 \text{ fm}^{-3}$.



25. ábra. Ugyanaz, mint a 24. ábrán, de most minden hőmérsékleten figyelembe vettük a zérus kinetikus energiájú tag járulékát 5 MeV-es intervallumban elkenve.

leten tartalmazza a zérus kinetikus energiájú tag járulékát. Látható, hogy nukleáris méretű V térfogatok esetén ez a tag soha nem elhanyagolható. (Hogy ne kerüljünk el-lentmondásba a határozatlansági relációval, a 25. ábrán a 0–5 MeV intervallumban egyenletesen elkenve rajzoltuk föl a zérus kinetikus energiájú pionok járulékát.) Ösz-szehasonlítás kedvéért feltüntettük a megfelelő Boltzmann-eloszlásokat is. Magas hő-mérsékleten a két eloszlás nagyon hasonló, a hőmérsékletet csökkentve azonban egyre nyilvánvalóbban jelentkezik a Bose-statisztika hatása: a Boltzmann-eloszláshoz képest nagyobb az alacsony energiás pionok száma (különösen szembeötlő a zérus kinetikus energiájú állapot betöltöttsége) és a Bose-eloszlás meredekebben esik közvetlenül a spektrum maximuma után.

A kísérletileg megfigyelt pion-spektrum szükségképpen az eloszlásnak a szétesés körüli tulajdonságait tükrözi. A szétesés a reakciónak körülbelül abban a fázisában várható [44], amelyet az ábrák (b) részei mutatnak. Ezért itt föltüntetettük a delta-rezo-nanciák bomlásából származó pionok járulékát is (pontozott vonal), amely csökkenti a Bose- és a Boltzmann-eloszlás közötti különbséget a spektrum nagy-energiás ré-szén.

A kísérletileg megfigyelt pion-spektrum centrális reakciókban (9. ábra) kvalita-tíve éppen úgy tér el a naiv várakozástól (Boltzmann-eloszlás), ahogyan azt a Bose-statisztika következményeinek megfelelő figyelembevétele alapján várjuk és a 25/b ábrán ábrázoltuk. A kísérletben egyrészt (még nem szignifikáns) többlet mutatkozik alacsony energiás pionokból a Boltzmann-típusú várakozáshoz képest, másrészt a lát-szólagos pion-hőmérséklet alacsonyabb a nukleonokénál. Ez utóbbi tényt az teszi érthetővé, hogy a 9. ábrán a pionokra Boltzmann-eloszlást erőszakoltak; a Boltz-mann-eloszlás alacsonyabb hőmérsékletet tükröz, mint a megfelelő (fizikailag magá-tól értetődő) Bose-eloszlás.

Meg kell azonban jegyezni, hogy modellünk — jelenlegi formájában — egyforma többletet jósol a kisenergiás π^+ , π^- és π^0 -akból. Ez nincs összhangban az 1.3 részben ismertetett kísérleti tényekkel. Továbbá a modell egyelőre nem képes megmagyarázni az $^{40}\text{Ar} + ^{40}\text{Ca}$ reakcióban $p_{\perp} \neq 0$ értéknél jelentkező hatáskeresztmetszet-csúcsot sem. Következő lépésként figyelembe kell vennünk a Coulomb-korrekciókat. Létezik olyan elképzelés [45], amely valamennyi fenti tényt egységesen Coulomb-effektusokkal igyekszik magyarázni. E számítások eredményei biztatóak; a bennük alkalmazott fi-zikai kép megítéléséhez olyan mérések szükségesek, amelyek π^+ és π^- spektrumokat határoznak meg ugyanabban a reakcióban. Megjegyzendő az is, hogy modellünk csak a pionokkal foglalkozik, és hasonló módon a protonok eloszlásának a Boltz-mann-eloszlástól való eltérése (9. ábra) nem magyarázható. *Siemens és Rasmussen* [39] arra tesz kísérletet, hogy mind a pionok, mind a protonok eloszlását csak hid-rodinamikai alapon magyarázza meg. A Coulomb-korrekciók mellett a jövőben fi-gyelembe kell vennünk az általuk tárgyalt effektusokat is.

A pionok keletkezésével járó nehéz-ion reakciók egy másik vonatkozását vizsgál-tuk [46]-ban. Ebben a munkában a pionok keletkezését a lehető legegyszerűbb módon kívántuk leírni és arra voltunk kíváncsiak, hogy a keletkező pionok hány százaléka abszorbeálódik a rendszerben, és hány százaléka éri el a detektorokat. Az abszorpció mechanizmusaként a

$$\pi N \rightarrow \Delta, \quad \Delta N \rightarrow NN \quad (4.7)$$

folyamatot tételeztük fel. Egyszerű feltevésekkel élve a b ütközési paraméterrel jellem-zett reakció geometriájára, Monte Carlo számítások eredményeként azt kaptuk, hogy

a keletkező pionoknak átlagosan mintegy 60%-a abszorbeálódik a hideg maganyagban, amelyen át kell haladnia, hogy elhagyja a rendszert. (Hasonló eredményre vezetett *Bertsch* becslése is [47].) Ennek a ténynek azért van különös jelentősége, mert a tűzfelhővel foglalkozó modellek közös problémája, hogy lényegesen több pionot szolgáltatnak, mint amennyit sikerült kísérletileg megfigyelni. [46]-ban megmutattuk, hogy ezért a diszkrepanciáért — legalább részben — a pionok abszorpciója felelős. Az abszorpció lényegében azokban a tartományokban történik, amelyeket a korábban szemléltőknek nevezett nukleonok töltenek ki. A spektátorokkal kapcsolatos vizsgálatainkról és eredményeinkről a [48] dolgozatokban számolunk be munkatársaimmal. A következő részben röviden összefoglalom a nagy energiás nehéz-ion reakciókban a szemléltők sorsának nyomon követésére kidolgozott modellünket, majd a 4.4 részben ismertetem a modell segítségével kapott eredményeinket.

4.3 A spektátorok

Tekintsünk periférikus reakciókat:

$$|R_A - R_B| \lesssim b \lesssim R_A + R_B, \quad (4.8)$$

és az egyszerűség kedvéért használjuk most az „éles kés”-modellt! Tételezzük föl tehát, hogy a relativisztikus nehéz-ion reakció első fázisa olyan rövid idő alatt zajlik le, amely lényegesen kisebb a rendszer valamennyi karakterisztikus idejénél (például annál a kommunikációs időnél, amely alatt bármely zavar — mondjuk a Fermi-sebességgel vagy a maganyagbeli hangsebességgel — mélyen behatolhat a kölcsönhatásba lépő magokba). Feltevésünk éles határfelületekre vezet a résztvevők és a szemléltők között. Más szóval a nagyon gyors levágással mintegy mintát veszünk a — feltehetőleg alapállapotban levő — targetből, illetve lövedékből. A target- (illetve a lövedék-) spektátor azonban nem figyelhető meg közvetlenül, mint maradékmag. Hiszen például a 8. ábrán látjuk, hogy a spektátor-térfogatok felülete lényegesen nagyobb, mint az ugyanakkora anyagmennyiséget tartalmazó gömbé. A megfelelő felületi energia önmagában is olyan nagy, hogy az további bomlásra vezet. Az így keletkezett másodlagos termékek találhatók meg kísérletileg.

A mért tömeg- és töltéseloszlások meghatározásához tehát a levágott és nem egyensúlyi alakban visszamaradt maganyag-darabokból (elsődleges maradékmagok) kell az elméletnek kiindulnia: Az „éles kés”-modellben adott az atommag (pl. target) egy v résztérfogata, amelyet t^* időpillanatban levágunk a rendszerből. Első kérdésünk: mi annak a valószínűsége, hogy — a t^* időpontban pillanatfelvételt készítve — a v résztérfogatban pontosan n neutron és z protont találunk? Természetesen könnyű megmondani a neutron- és protonszám átlagát:

$$\left. \begin{aligned} \bar{n} &= v \varrho_n \\ \bar{z} &= v \varrho_p \end{aligned} \right\}, \quad (4.9)$$

ahol ϱ_n és ϱ_p az átlagos neutron- és protonszűrűséget jelenti. A fontos kérdés azonban az, hogy mekkorák az átlagtól való eltérések? Hiszen ha nagy eltérések is lehetségesek, akkor mód van például arra, hogy a ^{48}Ca -ból hirtelen nyolc protont levágva ^{40}Mg -et állítsunk elő, amelyet a neutron kötési energiák alapján a magnézium neutronokban leggazdagabb lehetséges izotópjának tartanak, de amelyet (és néhány nála sokkal ke-

vésbé neutron-dús magnézium-izotópot) eddig még nem sikerült létrehozni és tanulmányozni.

Jelöljük az elsődleges maradékmagok izotóp-eloszlását a v térfogatban $P^v(n, z)$ -vel! Adott v mellett ismerjük az \bar{n} és \bar{z} átlagértéket (4.9) és meg kívánjuk határozni a σ_n^2 és σ_z^2 szórásnégyzeteket. Térjünk át az

$$\left. \begin{aligned} a &= n + z \\ t_3 &= \frac{1}{2}(n - z) \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

új változókra! Nyilvánvaló, hogy ha naiv klasszikus független-részecske modellt alkalmazunk [49], az binomiális eloszlásra vezet, amelyet nem túl kis és nem túl nagy $\beta = \frac{v}{V}$ esetén (V az egész mag térfogata) Poisson-eloszlással közelíthetünk és a tömegszámban mutatkozó σ_a szórással

$$\sigma_a = \sqrt{vq} = \sqrt{\frac{v}{V} \cdot A}, \quad (4.11)$$

ahol $q = q_n + q_p$. Világos azonban az is, hogy a szimmetria-potenciál (izospin-potenciál) megakadályozza, hogy a rendszerben lokálisan nagy különbségek alakuljanak ki a neutron- és a protonszűrűség között és így olyan helyzet jöhetne létre, amelyet a ^{48}Ca — ^{40}Mg példával jeleztem. A target alapállapota nem független részecskékből áll, hanem ebben az értelemben egyfajta izospon-korreláció jellemzi. Ezért az izospin harmadik komponensében (lényegében a neutrons szám és a protonszám különbségében) mutatkozó σ_{t_3} szórással a naiv független-részecske modell biztosan nem alkalmazható. A szórásnégyzetek meghatározásával a jelen dolgozat függelékében foglalkozom részletesen. Itt csak a

$$\sigma_{t_3}^v \simeq 0.24 \sigma_a^v, \quad (4.12)$$

közelítő egyenlőséget idézem (F. 28).

Most két kérdést kell megvizsgálnunk:

1. Milyen lehetőségek vannak ezek után neutronokban gazdag magok előállítására a tárgyalt módszerrel?
2. Milyen mértékben „élük túl” a (4.12)-ben összefoglalt korrelációk a bomlást; mit mondhatunk a target alapállapotáról a megfigyelt másodlagos maradékmagok tömeg- és töltés-eloszlása alapján?

Hogy ezekre a kérdésekre válaszolni tudjunk, meg kell még határoznunk a szemléltők energiáját. A spektátor-térfogatok a klasszikus magfizikában szokatlan alakúak. Felületük lényegesen nagyobb, mint az azonos térfogatú gömb felülete. A felületi feszültség $\gamma \simeq 1 \text{ MeV/fm}^2$ [6] értékével számolva az extra felületből megkapjuk azt az E_{\min} minimális gerjesztési energiát, amellyel a spektátor (mint egész — a mag egy rész-térfogata) biztosan rendelkezik. Természetesen, mivel a résztvevők és a szemléltők közötti vágási felület valójában nem éles, a levágás során további, dinamikus gerjesztési energia is átadódik a spektátoroknak. Voltaképp a gerjesztési energiák egész eloszlásával állunk szemben. Jelöljük az átlagos gerjesztési energiát \bar{E} -sal, a szórást σ_E -vel. \bar{E} és σ_E értékét az [50]-beli módszerrel határoztuk meg. Végül az átlagértékek és a szórássok ismeretében az elsődleges maradékmagok sok véletlen változótól függő eloszlását a -ban, t_3 -ban és az E^* gerjesztési energiában Gauss-eloszlással közelítettük.

A tömeg- és töltéseloszlás adott b ütközési paraméter és E_{beam} bombázó energia mellett:

$$f_{b,E_{\text{beam}}}^{\text{prim}}(a, t_3) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_{t_3}} e^{-\frac{(a-\bar{a})^2}{2\sigma_a^2} - \frac{(t_3-\bar{t}_3)^2}{2\sigma_{t_3}^2}}, \quad (4.13)$$

ahol \bar{a} és \bar{t}_3 az átlagértékeket jelenti. Természetesen a v résztérfogaton keresztül a (4.13) eloszlás valamennyi paramétere függ a reakció b ütközési paraméterétől. Ezt a függést a jobboldalon nem írtuk ki, csak a baloldalon tüntettük föl emlékeztetőül az E_{beam} bombázó energiával együtt. Az energia-eloszlást is figyelembe véve:

$$g_{b,E_{\text{beam}}}^{\text{prim}}(a, t_3, E^*) = f_{b,E_{\text{beam}}}^{\text{prim}}(a, t_3) \cdot N \cdot e^{-\frac{(E^*-E)^2}{2\sigma_E^2}}, \quad E^* \equiv E_{\text{min}}, \quad (4.14)$$

ahol N normálási együttható. $g_{b,E_{\text{beam}}}^{\text{prim}}(a, t_3, E^*)$ tehát annak a valószínűségét jelenti, hogy b ütközési paraméter és E_{beam} bombázó energia mellett a spektátor-térfogatban egy a tömegszámú, t_3 izospinkomponensű és E^* gerjesztési energiájú magot találunk.

A (4.14) eloszlású elsődleges maradékmagok részecskebomlással vagy hasadással vesztek el gerjesztési energiájukat és hozzáak létre a (kísérletileg megfigyelhető) végtermékeket. Ezt a bomlást általában bonyolult nyomon követni, mert igen sok izotóp bomlik különböző és szokatlanul nagy gerjesztési energiával, ami sok lépésre és elágazásra vezet a bomlási láncban. Jelentős különbség van a könnyű és nehéz spektátorok bomlásában. Míg az előbbieket hasonló valószínűséggel bomlanak proton-, neutron- és alfa-kibocsátással, az utóbbiaknál a neutron-bomlás dominál. Vizsgálatainkban ez utóbbiakra szorítkozunk. Itt viszont fontos bomlási módus a hasadás is. Ez azonban olyan tömeg-eloszlásra vezet, amely elkülönül a részecske-bomlás révén kapott izotópoktól. Ezért azzal a közelítéssel élünk, hogy a hasadást csak mint veszteséget vettük figyelembe az elágazási arányoknak megfelelően. A bomlási láncban, amelyet követtünk, csak neutron- vagy proton-bomlást engedtünk meg a következő feltételek szerint:

$$\begin{aligned} &\text{neutron-bomlás, ha } S_n \leq S_p + V_p \} \\ &\text{proton-bomlás, ha } S_n > S_p + V_p \} \end{aligned} \quad (4.15)$$

ahol S_n és S_p neutron, illetve proton szeparációs energiák, V_p a Coulomb-gátat jelöli (protonokra). Föltettük, hogy a bomlás minden leány-magban csak a legvalószínűbb energia-értékre vezet, amely kiindulásul szolgál a következő lépésben. Elhanyagoltuk a bomló magok impulzusmomentumát is. Ezekkel az egyszerűsítésekkel elértük, hogy a nagyszámú bomló rendszer vizsgálatát ésszerű számítógép-idő alatt lehessen elvégezni. Az adott ütközési paraméter melletti (ütközési paraméterben differenciális) hatáskeresztmetszet ezek után

$$\frac{d\sigma}{db}(b, n_f, z_f) = 2\pi b f_{b,E_{\text{beam}}}^{\text{second}}(n_f, z_f), \quad (4.16)$$

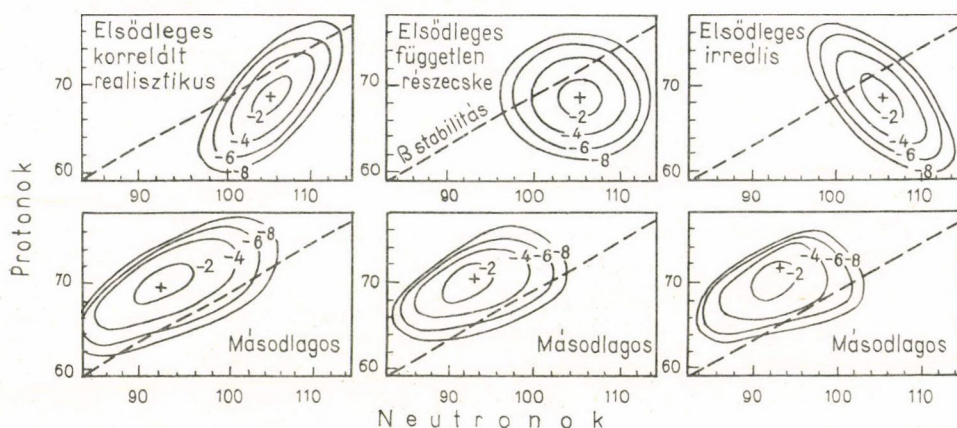
ahol

$$f_{b,E_{\text{beam}}}^{\text{second}}(n_f, z_f) = \sum_{a_i t_{3i}} \int dE^* g_{b,E_{\text{beam}}}^{\text{prim}}(a_i, t_{3i}, E^*) \cdot D(a_i t_{3i} E^* \rightarrow n_f z_f). \quad (4.17)$$

Itt $D(a_i, t_{3i}, E^* \rightarrow n_f, z_f)$ annak a valószínűségét jelenti, hogy az E^* gerjesztési energiájú elsődleges maradékmag bomlási láncja az (n_f, z_f) magban ér véget.

4.4 A spektátorokra vonatkozó eredmények

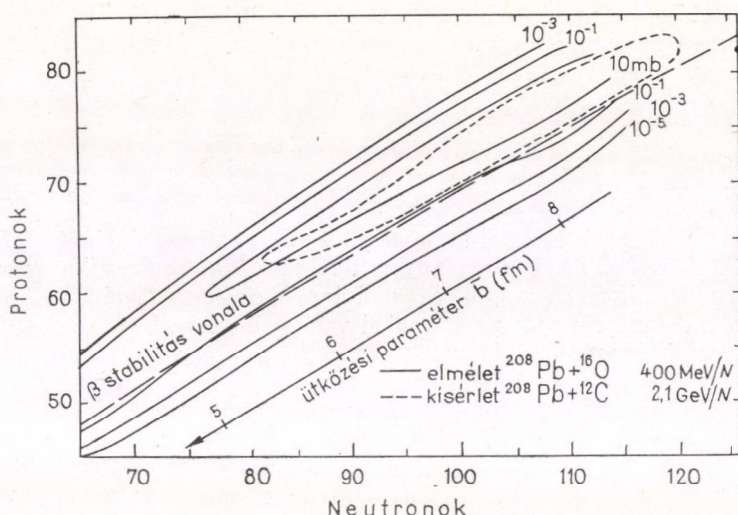
A 26. ábra számított elsődleges és másodlagos maradékmag-eloszlásokat ((4.13) és (4.17)) mutat az $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ reakcióra $b = 7$ fm ütközési paraméter mellett. A baloldali ábrán az alapállapotú korreláció figyelembevételével számított (realisztikus) eloszlások láthatók. Középen a független részecske-modell eredményeit helyeztük el, és az összehasonlítás kedvéért feltüntettünk egy irreális elsődleges maradékmag-eloszlást is az ábra jobb szélén. (Az eloszlás akkor lenne ilyen, ha az izospin-potenciál megnövelné lokális neutron-proton sűrűségkülönbségek kialakulásának valószínűségét a magban.) Az ^{208}Pb alapállapotában meglevő izospin-korreláció (lásd a függelék) az $N = Z$ vonal mentén megnyúlt elsődleges eloszlásra vezet. Az eloszlás jellege részben megmarad a bomlás után is (alsó ábrák).



26. ábra. Elsődleges és másodlagos maradékmag-eloszlások kontúr-vonalai az $N-Z$ magtérképen.

A vizsgált reakció: $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$, $E_{\text{LAB}} = 400$ MeV-nukleon, $b = 7$ fm ütközési paraméter mellett. A kontúrvonalakat a relatív valószínűség önkényes egységeiben mért logaritmusával jelöltük meg.

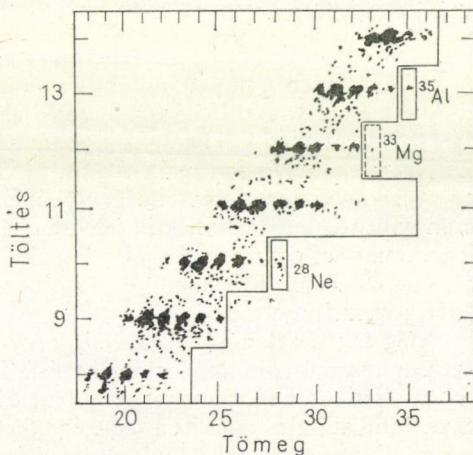
A 27. ábrán az ütközési paraméterre integrált teljes hatáskeresztmetszeteket adjuk meg és hasonlítjuk össze a kísérleti adatokkal [51]. (A szemlélők vizsgálatában nem játszik különösebb szerepet a nyaláb energiája: ha egyszer abban az energiatartományban vagyunk, ahol a résztvevőszemlélő kép alkalmazható, akkor a spektátorokra vonatkozó eredmények csak kevésbé érzékenyek a bombázó energiára, sőt arra is, hogy milyen magot használunk „kés”-ként — csak az a partner fontos, amelyből származó spektátorokat detektálni kívánjuk.) Azt is föltüntettük az ábrán, hogy az átlagos \bar{b} ütközési paraméter milyen kapcsolatban van a keletkezett másodlagos spektátor tömegével. (Az ütközési paraméter-szelekció rendkívül fontos kísérleti célkitűzés. Most közölt vizsgálataink egyik mellékterméke, hogy a keletkezett másodlagos spektátorok radiokémiai analízise meglehetősen szűk határok közé szorítja annak a reakciónak a lehetséges ütközési paraméterét, amelyből származnak.) Látjuk, hogy a statisztikus legerjesztődés és az ütközési paraméterre való integrálás nagymértékben vissza-„fókuszálja” az eloszlást a stabilitási völgybe; a kísérleti hatáskeresztmetszettel



27. ábra. A végső (másodlagos) target-maradékok hatáskeresztmetszet-kontúrjai ^{208}Pb target esetén. Feltüntetjük az ütközési paraméter és a spektártömeg kapcsolatát. Szaggatott vonallal jelöltük a kísérletileg talált 10 mb-os kontúrvonalat [51].

való egyezés jónak mondható, bár a modell valamivel kisebb valószínűséggel jósolja neutronokban gazdag magok keletkezését az ólom-spektátorból, mint a mérések mutatják. Megjegyzem, hogy modellünket publikálása óta továbbfejlesztették [52]. A pontosabb számítások azonban nem változtatnak lényegesen a közölt eredményeken.

Tekintsünk azonban most nehezebb lövedékeket — esetleg olyan izotópokat, amelyek már maguk is neutronokban gazdagok (pl. ^{48}Ca) — és vizsgáljuk a lövedékspektátor maradékát! (Ennek az eljárásnak az az egyik előnye, hogy ha a nyaláb energiája elég nagy, akkor a másodlagos maradékanyagot közel 0° -os szögben, majdnem a nyalábbal megegyező energián produkálja, így az további kísérleti célokra felhasználható [3]. Az eredeti ötletnek ez a kissé módosított változata kísérletileg alkalmasnak bizonyult korábban nem vizsgált, neutronokban gazdag magok előállítására. A 28. ábrán azt látjuk, hogy



28. ábra. $E_{\text{LAB}}=213$ MeV-nukleon energiájú ^{40}Ar nyalábból keletkező lövedék-spektátorok. A Ne, a Mg és az Al esetén sikerült az eddig vizsgáltaknál neutronokban gazdagabb izotópokat előállítani.

$E_{\text{LAB}} = 213 \text{ MeV/nukleon}$ energiájú ^{40}Ar nyalábbal sikerült az ismert magok határfrontját egy egységgel előbbre tolni a neutronokban gazdag izotópok felé a Ne, a Mg és az Al esetében [53]. A tervezett ^{48}Ca nyalábtól további hasonló eseteket remélhetünk.

4.5 Diskusszió

A stabilitás határához közeli atommagok kutatása olyan témának tűnik, amely kiválóan vizsgálható a meglevő és tervezett relativisztikus nehéz-ion gyorsítókkal. A stabilitási vonaltól távoli magok előállítására az eddigi leghatékonyabb módszer nehéz magoknak nagyenergiás protonokkal való bombázása volt [54]. A relativisztikus nehéz ionoktól azonban neutronokban lényegesen gazdagabb izotópok előállítását várjuk. Egy olyan mag felfedezése és tulajdonságainak tanulmányozása, mint amilyen például a ^{70}Ca (20 proton + 50 neutron), legalább olyan drámai esemény lehet, mint a lökéshullámok vagy a pion-kondenzátum detektálása nehéz-ion reakciókban.

A neutronokban gazdag magok előállíthatósága nagyenergiás nehéz-ion reakciókban azon múlik, hogy milyen valószínűséggel találunk bizonyos $n > \bar{n}$ számú neutron a magnak abban a v résztérfogatában, amelyből a spektátor kialakul. Ha sokszor elvégezzük a nagyenergiás lövedékekkel való „mintavételt”, akkor a ténylegesen kapott n neutronszám egy eloszlását mérjük a (4.9)-beli átlagos \bar{n} körül a σ_n^2 szórásnégyzettel. A neutronszám \bar{n} körüli fluktuációjáért az a tény felelős, hogy a mag valódi alapállapota nem a korrelálatlan alapállapot, hanem abba magasabban gerjesztett konfigurációk is belekeverednek [55] (a részleteket lásd a függelékben). A sűrűség- és izospin-fluktuációkat a függelékben egy egyszerű hidrodinamikai modell segítségével írtuk le, ahol az eredmények multipol sorfejtés alakjában adódtak. (F.16) és (F.22) vezető tagja a dipol óriásrezonancia járuléka. Ez mint a neutronfolyadékhoz a protonfolyadékhoz képest való kollektív vibrációja (polarizációs módus) tehető szemléletessé. Végső soron tehát arról van szó, hogy a nagyenergiás reakciók karakterisztikus ideje (a levágás ideje) sokkal rövidebb, mint a kollektív dipól-oszcillációt jellemző periódusidő. Ezért áll módunkban az átlagtól eltérő neutron-, illetve proton-számot mérni a spektátorban. Más szóval a neutronokban gazdag magok előállítását és az alapállapoti korrelációk relativisztikus nehéz-ion reakciókban való megfigyelését a magszerkezet (dinamika) egy kollektív vonatkozása tette lehetővé. És mindkét dolog annyiban vált lehetségessé, amennyiben ennek a kollektív jelenségnek a következményei „túléltek” a versenyt olyan tipikusan egyrészecske-jelenségekkel, mint egyes nukleonok eltávozása a magból. (Az elpárolgó nukleonok egyenként viszik magukkal a spektátor-maradék kollektív gerjesztési energiáját.)

Még egyszer hangsúlyozni kell, hogy a jelen dolgozatban nem vizsgáljuk a statisztikus fizikai fogalmak alkalmazhatóságának feltételeit. Elfogadjuk érvényességüket a relativisztikus nehéz-ion reakciókban és arra az álláspontra helyezkedünk, hogy használatukat indokolja, ha a segítségükkel kapott elméleti eredmények megegyeznek a kísérleti tapasztalattal. Megjegyzem még, hogy a hőmérséklet fogalma a klasszikus magfizikában is rendkívül hasznosnak bizonyult.

5. Kipillantás

A nehéz-ion reakciók leírásában a legkisebb energiáktól a ma vizsgált legnagyobbakig fontos szerepet tölt be a kollektív- és egy-részecske szabadsági fokok összjátéka. Ezt a tényt a MeV-tartományban úgy demonstráltuk, hogy megmutattuk, hogy a magok relatív mozgásának és a belső nukleon-mozgásnak a csatolása révén részben leírható a kísérleti részecske-spektrumokban megfigyelt kemény komponens. Közepes energián rámutattunk arra, hogy a reakció egy-részecske aspektusai mellett feltétlenül tekintetbe kell venni olyan kollektív jelenségeket, mint a target és a lövedék maradékának visszalökődése vagy a magfolyadék hidrodinamikai áramlása. Nagy energiákon már az inkluzív egy-részecske eloszlások leírása is igényli bizonyos kollektív vonatkozások figyelembevételét, pedig ezek elsősorban a tűzfelhővel hozhatók kapcsolatba. Másrészt neutronokban gazdag magok keletkezésének lehetőségére egyenesen a spektátorok kollektív tulajdonságainak a vizsgálata hívta fel a figyelmet. Ezek a tulajdonságok részben „túlélők” nukleonok elpárolgását a gerjesztett spektátor-térfogatokból.

A kollektív és egy-részecske aspektusok egyidejű szem előtt tartása tehát gyümölcsözőnek bizonyult. Nem vezetett azonban matematikailag szigorú modellekhez. Szeretném hangsúlyozni, hogy a jelen dolgozatban nem is ez volt a célom. A kísérletekhez sokkal közelebbi gondolatkörben mozogtam és igyekeztem olyan fenomenológikus modelleket alkotni, amelyek — eddigi ismereteinket felhasználva — kvalitatíve megragadják a tapasztalat fő vonásait. Erre a módszerre sikerült olyan jóslatokat is alapítani, amelyeket a mérések később igazoltak. A neutronokban gazdag magok előállíthatóságának előrejelzése azt mutatja, hogy a fent vázolt eljárás nem haszontalan.

Ugyanakkor természetes az az igény, hogy fejlesszük tovább a használt primitív modelleket. Érvelésünk több pontján alkalmaztunk például klasszikus képet a bonyolultabb kvantummechanikai leírás helyett. Felvetődik, hogy például a PEP-problémát hogyan kell megfogalmazni a kvantum-szinten? Képzeliük el, hogy $t=0$ időben egy mozgó potenciálgödör egyik fala hirtelen eltűnik és a gödör egy másik, álló potenciállal egyesül! Mi történik az egyes gödröket betöltő részecskéket leíró hullámfüggvényekkel? Érdemes megjegyezni, hogy a spektátorok „levágása” a fentihez hasonló problémával modellezhető kvantummechanikailag: mi történik, ha $t=0$ -ban hirtelen levágjuk egy potenciálgödör valamely résztérfogatát? A jelen dolgozatban ilyen és ezekhez hasonló kérdésekkel nem foglalkozunk. Azt reméljük, hogy a kvantum-szinten is megmaradnak az itt használt klasszikus képek fő fizikai vonásai, s a kvantummechanikai leírás ezekhez ad majd korrekciókat. Ez a remény jogosít klasszikus fogalmaink használatára.

Másrészt a jelenlegi (részben klasszikus) modellek hibáik és hiányosságaiuk ellenére néhány esetben kielégítő eredményekre vezettek. Nem szabad elfelejtenünk, hogy a klasszikus magfizikában egy szögeloszlás vagy egy interferencia-minimum leírását az elmélet sikereként könyveltük el! Ha a nehéz-ion fizikában ugyanilyen típusú eredményt csalódással fogadunk vagy triviálisnak tekintünk, annak csak az lehet az oka, hogy egzotikus jelenségek felfedezéséhez is fűzünk némi reményt. Remélt különleges jelenségek például — amelyekre azonban a mérések még nem szolgáltatottak egyértelmű bizonyítékot —, a sűrűségizomerek, a pion-kondenzáció különböző változatai, a lökéshullámok vagy a kvarkfázis megjelenése. Egy valóban egzotikus kísérleti eredmény a centauro-esemény [57], amelynek a kiváló tálalás [58] szenzáció-jelleget kölcsönzött. A kozmikus sugárzás tanulmányozása során emulzióban észlelt rendkívül nagy energiájú ütközésről van szó, amelynek a hadron-multipllicitása $\gtrsim 100$, de sem-

milyen jel nem mutat arra, hogy a hadronok emisszióját semleges pionok kibocsátása kísérte volna. (A beeső objektum energiáját 10^6 GeV-re becsülik [57].) Az egyik javasolt magyarázat [58] szerint az eseményt egy kvarkfázisban levő, nagyon összenyomott maganyag-darab váltotta ki, amelynek a sűrűsége a normál maganyagsűrűség 30–100-szorosa lenne!

Lehetséges, hogy ez a magyarázat nem bizonyul kielégítőnek, de tipikus a nehéz-ion fizikában abban az értelemben, hogy a maganyag (hadronanyag) viselkedésére alapoz újszerű (a klasszikus magfizikában megszokottól eltérő) körülmények között. Valóban, nehéz-ionok ütközését vizsgálva mindinkább abba a helyzetbe kerülünk, hogy új típusú információkat szerezhethetünk az atommag anyagáról. Túllépünk a mag-szerkezet és a gerjesztési energiák vizsgálatán (amelyekért lényegében az atommag héjszerkezete felelős) és azon az állapoton, amikor a maganyagra, mint „anyagfajtára” jellemző tulajdonságok közül csak egyet — a nukleononkénti kötési energiát — ismerünk részletesen. Mint láttuk, a nehéz-ion reakciók lefolyását nagyban befolyásolja többek között a maganyag kompresszibilitása, viszkozitása, a maganyagban fellépő különféle fluktuációk, esetleg fázisátalakulások, vagy például egy nukleon átlagos szabad úthossza a maganyagban. Ezek a tulajdonságok természetesen a vizsgált maganyag-darab hőmérsékletétől függenek. Azt is mondhatjuk, hogy a nehéz-ion fizikában zérustól lényegesen különböző hőmérsékleteken vizsgáljuk a maganyagot.

A felsorolt tulajdonságok között vannak olyanok, amelyek tisztán a maganyag viselkedésének kollektív aspektusaival kapcsolatosak (pl. viszkozitás), mások egyszerre jellemzők a médiumra és a benne mozgó részecskére (pl. átlagos szabad úthossz). Ismét látjuk tehát, hogy a nehéz-ion reakciók kollektív és egy-részecske aspektusai egyaránt fontosak. Leglényegesebb közös vonásuk azonban, hogy segítségükkel már azt vizsgáljuk, ami a magszerkezet mögött van: a mag anyagának alapvető tulajdonságait.

6. Összefoglalás

Befejezésül összefoglalom a jelen dolgozatban szereplő saját eredményeimet. Az alacsony energiás tartományban ilyennek tekintem a PEP-modell részletes kidolgozását: a belső nukleon-mozgásnak a magok relatív mozgásához való csatolása révén sikerült megmagyarázni az egyes nehéz-ion reakciókban a párolgási spektrumok mellett megfigyelt kemény komponens jelentős részének eredetét (105–112. oldal, 12. ábra). Munkatársaimmal javasoltunk egy olyan kísérletet is, amelynek segítségével a PEP-modell helyessége alátámasztható (114. oldal, 13–14. ábra).

A közepes energiákon *Csernai Lászlóval* együttműködve megvizsgáltam egy forró rész keletkezésének a lehetőségét aszimmetrikus, centrális reakciókban; arra a következtetésre jutottunk, hogy ez a reakció-mechanizmus lehetséges (115–118. oldal, 18–20. ábra). Fölhívtam a figyelmet a visszalökődési effektusok fontosságára nehéz-ion reakciókban; munkatársaimmal tett javaslatunk alapján a nehéz, visszalökött maradék-magok mérését is tervezzük a CERN-beli HIJAC-kísérletben (118. oldal). Sematikus modellt javasoltam aszimmetrikus, centrális reakciókra, amely alkalmas a visszalökődési sebesség becslésére (121. oldal, 22. ábra).

Relativisztikus energiákon a résztvevőket (tehát a lövedék és a target átfedési tartományában tartózkodó, a reakcióban ténylegesen szerepet játszó nukleonokat) vizsgálva elsőként hangsúlyoztuk — *Zimányi Józseffel* és *Bo Jakobssonnal* — a pionokra alkalmazott Bose-statisztika néhány következményét, amelyek kvalitatíve megegyez-

nek a kísérleti eredményekkel (124—129. oldal, 25. illetve 9. ábra). Egy másik kutatócsoport tagjaként megmutattam, hogy a pionküszöbnél nem sokkal nagyobb bombázó energiákon a keletkező pionoknak mintegy 60%-a abszorbeálódik a rendszerben (130. oldal). A spektátorok sorsának nyomon követésére olyan modellt dolgoztam ki, amelynek következményei jól egyeznek a tapasztalattal (130—132. oldal, 27. ábra). Ezen belül elsőként mutattam rá arra, hogy nehéz-ion reakciókkal esetleg kimérhetők az alapállapotú izospin-korrelációk. Munkatársaimmal — *Jakob Bondorffal* és *Ole Bent Nielssennel* — javasoltam, hogy használjanak nehéz-ion reakciókat neutronokban gazdag magok előállítására (131—132. oldal). A módszer, amelyet elsőként írtunk le — kissé módosítva — alkalmasnak bizonyult erre a célra (131. oldal, 28. ábra). Mint a bevezetésben említettem, ezt a tényt tartom az értekezésben szereplő legfontosabb eredményemnek.

7. Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt tanszékvezetőmnek, *dr. Nagy Károly* professzor úrnak szeretnék köszönetet mondani, akinek az ELTE Elméleti Fizikai Tanszékén sikerült olyan kiváló légkört biztosítania, amelyben az oktatómunka mellett — sok hasonlóval együtt — ez a dolgozat is elkészülhetett.

Kiemelt köszönet illeti *dr. Németh Juditot*, aki a magfizikában utamra indított, azért a kitartó érdeklődésért és sok diszkusszióért, amellyel egész munkámat végigkísérte; külön köszönöm a kézirat gondos átolvasását és hasznos tanácsait.

A magfizika minden várakozást felülmúló módon „kollektív” tudományként fejlődik — a nehéz-ion fizikát ma nem egyének, hanem elsősorban csoportok űzik világszerte; e tény okainak és kísérőjelenségeinek elemzése külön tanulmányt érdemel. Ide csak annyi tartozik, hogy én is különféle kutatócsoportok tagjaként fejtettem ki azt a tevékenységet, amelynek eredményeit ebben a dolgozatban összefoglaltam. Minden formalitáson túl őszinte örömmel tölt el, hogy köszönetet mondhatok munkatársaimnak:

Zimányi Józsefnek, *Csernai Lászlónak* és *Lukács Bélának* a Központi Fizikai Kutatóintézetben;

Jakob Bondorfnak, *Jadunath Denek* és *Asko Karvinennek* a Niels Bohr Intézetben, valamint *Bo Jakobsonnak* és *Jøren Randrupnak*, a NORDITA munkatársainak.

Köszönettel tartozom továbbá számos kollégámnak itthon és külföldön, ötletekért, magyarázatokért és értékes beszélgetésekért. Oly sokan vannak, hogy nevüket itt föl nem sorolhatom, s csak abban bízom, hogy velem együtt mindannyian úgy vélik, hogy „Ez jó mulatság, férfimunka volt”.

8. Függelék

Nukleon-eloszlás a mag egy résztérfogatában

Tekintsük az alapállapotú A_ZX atommagot! Képzeljük el, hogy egy meghatározott t_0 időpontban „pillanatfelvételt” készítünk a mag valamely v résztérfogatáról! Jelöljük annak valószínűségét, hogy a v résztérfogatban pontosan n neutron és z proton található, $P^v(n, z)$ -vel! A jelen függelékben a $P^v(n, z)$ eloszlással foglalkozunk.

Vezessük be az

$$\left. \begin{aligned} a &= n + z \\ t_3 &= \frac{1}{2}(n - z) \end{aligned} \right\} \quad (\text{F.1})$$

új változókat! Ha a rendszer teljes hullámfüggvénye a t_0 időpillanatban $\psi(x \dots x_A; t_0)$, akkor annak a valószínűsége, hogy a v résztérfogatban α nukleont talál-

lunk

$$p^v(a) = \binom{A}{a} \int_v dx_1 \dots dx_a \int_{V-v} dx_{a+1} \dots dx_A |\psi(x_1 \dots x_A; t_0)|^2, \quad (\text{F.2})$$

ahol V az egész mag térfogatát jelenti. (x_i -vel az i -edik nukleon valamennyi változóját jelöltük összefoglalóan.) Mivel $\psi(x_1 \dots x_A; t)$ általában nem áll rendelkezésünkre, a $P^v(a)$ eloszlás jellemzésére megelégszünk az

$$\bar{a}^v = \sum_{a=1}^A a P^v(a) \quad (\text{F.3})$$

átlagérték és a

$$\sigma_a^2 = \sum_{a=1}^A (a - \bar{a}^v)^2 P^v(a) \quad (\text{F.4})$$

szórásnégyzet meghatározásával. Elsősorban arra vagyunk kíváncsiak, hogy mekkora az eloszlás σ_a^2 félérték-szélessége, vagy más szóval, hogy mekkora eltérések lehetségesek az

$$\bar{a}^v = v \cdot \varrho \quad (\text{F.5})$$

átlagértéktől, ahol ϱ az átlagos maganyag-sűrűség.

A keresett szórásnégyzet természetesen attól függ, hogy milyen modellel írjuk le a magot. A legegyszerűbb klasszikus független részecske modellben (binomiális eloszlás)

$$\sigma_a^2 = A \cdot \beta \cdot (1 - \beta), \quad (\text{F.6})$$

ahol $\beta = \frac{v}{V}$ annak a valószínűsége, hogy valamelyik nukleon a v térfogatban tartózkodik. Az atommag azonban fermionok rendszere, ahol a Pauli-elv drasztikusan csökkenti az átlagérték körüli fluktuációkat. Ezt *Bertsch és Borysowicz* [56] Fermi-gáz hullámfüggvényeket használva mutatták meg. \perp élhosszú, kocka alakú dobozt tekintettek periodikus határfeltételekkel. Ekkor az egyrészecske-hullámfüggvények

$$\Phi_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{\perp^{3/2}} e^{ik_j \cdot \mathbf{r}} - \frac{\perp}{2} \equiv r_x, r_y, r_z \equiv \frac{\perp}{2} \quad (\text{F.7})$$

alakúak, ahol

$$k_j = \frac{2\pi}{\perp} (n_x^j, n_y^j, n_z^j) \quad (\text{F.8})$$

és az n_x, n_y, n_z kvantumszámok a Fermi-gáz alapállapotában kielégítik az

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \equiv n_F^2 \quad (\text{F.9})$$

egyenlőtlenséget. ($k_F = \frac{2\pi}{\perp} n_F$ a Fermi-hullámszám.)

Bevezetve a v résztérfogat-beli \hat{a}^v részecskeszám-operátort és egyszerű résztérfogatot (a $z > 0$ féltérrel) választva

$$\sigma_a^2 = \langle \hat{a}^{v^2} \rangle - \langle \hat{a}^v \rangle^2 \quad (\text{F.10})$$

kiértékelhető [56] és egységnyi nagyságrendű tagokat elhanyagolva a

$$\sigma_a^{v^2} \simeq \frac{1}{3\pi} \left(\frac{3A}{4\pi} \right)^{2/3} \ln \left(\frac{3A}{4\pi} \right) \quad (F.11)$$

eredményt szolgáltatja. A kapott

$$\sigma_a^v \sim A^{1/3} (\ln A)^{1/2} \quad (F.12)$$

függés éles ellentétben áll a naiv klasszikus független részecske modellből (F.6) szerint adódó

$$\sigma_a^v \sim A^{1/2} \quad (F.13)$$

következtetéssel. Látjuk tehát a Fermi-rendszereknek azt az általános tulajdonságát, hogy bennük a fluktuációk lényegesen kisebbek, mint azt klasszikusan várnánk.

A fentiekben [56] alapján vázolt gondolatmenet azonban nem mond semmit a $t_3 = \frac{1}{2}(n-z)$ változóban fellépő fluktuációkról. Ugyanakkor számunkra ez a szabadsági fok a legfontosabb, hiszen az izotóposzlás t_3 -beli szélessége tartalmaz információt arról, hogy milyen mértékben térhet el a v térfogatban fellépő n/z arány a stabilitási vonalat jellemző értéktől. σ_{t_3} meghatározására az [55]-ben szereplő egyszerű hidrodinamikai modellt használjuk.

Vezessük be a

$$\begin{aligned} \delta \varrho_0(\mathbf{r}, t) &= \delta(\varrho_n(\mathbf{r}, t) + \varrho_p(\mathbf{r}, t)) \\ \delta \varrho_1(\mathbf{r}, t) &= \delta(\varrho_n(\mathbf{r}, t) - \varrho_p(\mathbf{r}, t)) \end{aligned} \quad (F.14)$$

fluktuációs sűrűségeket! (Itt ϱ_n , illetve ϱ_p a helytől és időtől függő neutron-, illetve proton-sűrűséget jelenti.) Tehát $\delta \varrho_1$ például a neutron- és proton-sűrűség különbségében fellépő fluktuációkat, vagy más szóval a neutron-folyadéknek a proton-folyadékhoz viszonyított mozgását (polarizációs módusok) írja le. [55] tartalmazza a $\delta \varrho_0$ -ra, illetve $\delta \varrho_1$ -re vonatkozó hullámegyenletek megoldásait. Például a

$$\nabla^2 \delta \varrho_1 - \frac{1}{u_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta \varrho_1 = 0 \quad (F.15)$$

egyenlet általános megoldását a

$$\delta \varrho_1(\mathbf{r}, t) = \varrho_0 \sum_{\lambda n} (-)^{\lambda} (2\lambda + 1) j_{\lambda}(k_{n\lambda} r) \cdot \{Y_{\lambda}(\theta, \Phi) \cdot \alpha_{n\lambda}(t)\}_0 \quad (F.16)$$

multipol sor szolgáltatja.

A határfeltétel

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} j_{\lambda}(k_{n\lambda} r) \right|_{r=R} = 0 \quad (F.17)$$

alakú. (F.15)-ben $u_s = \sqrt{\frac{b_{\text{sym}}}{m_p}}$, ahol b_{sym} a kötési energia képletben is fellépő szimmetria-energia együttható. (F.16)-ban $\varrho_0 = 0,17 \text{ fm}^{-3}$ a maganyag sűrűsége, λ a multipol rend, $k_{n\lambda}$ a hullámszám, j_{λ} és Y_{λ} Bessel-függvényeket, illetve gömbfüggvényeket jelöl, $\{ \}_0$ az impulzusmomentum-csatolást fejezi ki (zérus eredővé). Az (F.17) határfeltételi egyenlet azt tükrözi, hogy $\delta \varrho_1$ -nek el kell tűnnie az $r=R$ magfelületen

(a felület rögzített). Végül az $\alpha_{n\lambda}$ operátor kifejezhető a $c_{n\lambda}^+$ és $c_{n\lambda}$ bozon-keltő és -el-tüntető operátorokkal

$$\alpha_{n\lambda} = (\alpha_0)_{n\lambda} (c_{n\lambda}^+ + c_{n\lambda}), \quad (\text{F.18})$$

ahol

$$(\alpha_0)_{n\lambda} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{n\lambda}}{2C_{n\lambda}}} \quad (\text{F.19})$$

az $n\lambda$ módus zéruspontri amplitúdója a módus $\hbar\omega_{n\lambda}$ energiájával és $C_{n\lambda}$ „rugóállandó-jával” kifejezve.

Definiáljuk most a $\tilde{q}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ nem-lokális térbeli fluktuációs sűrűséget a

$$\tilde{q}_1^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \tilde{o} | \delta q_1(\mathbf{r}, t) \delta q_1(\mathbf{r}', t) | \tilde{o} \rangle \quad (\text{F.20})$$

összefüggéssel, ahol $|\tilde{o}\rangle$ a mag (korrelációkat is tartalmazó) alapállapota [55]. (F.20)-at tetszőleges v résztérfogatra átlagolva megkapjuk a q_1 -beli eloszlás

$$\sigma_{q_1}^v = \left\{ \frac{1}{v^2} \int_v \tilde{q}_1^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3r d^3r' \right\}^{1/2} \quad (\text{F.21})$$

szelességét.

(F.20)-at (F.21)-be helyettesítve némi operátor-algebra elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$\sigma_{q_1}^{v^2} = q_0^2 \sum_{n,\lambda,\mu} \cdot \frac{\hbar\omega_{n\lambda}}{2C_{n\lambda}v^2} \iint_v j_\lambda(k_{n\lambda}r) j_\lambda(k_{n\lambda}r') Y_{\lambda\mu}''(\theta, \varphi) Y_{\lambda\mu}''(\theta', \varphi') d^3r d^3r'. \quad (\text{F.22})$$

Teljesen hasonlóan járhatunk el a teljes sűrűségben föllépő fluktuációk esetén is. Az egyetlen különbség, hogy a δq_0 fluktuációkat leíró kompressziós módusok a

$$j_\lambda(k'_{n\lambda}r)|_{r=R} = 0 \quad (\text{F.23})$$

határfeltételnek tesznek eleget. Felhasználva még, hogy [55]

$$C_{n\lambda} = q_0 b_{\text{sym}} \int_0^R j_\lambda^2(k_{n\lambda}r) r^2 dr \quad (\text{F.24})$$

azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \sigma_q^v &= k_q q_0 A^{-2/3} \\ \sigma_{q_1}^v &= k_q q_0 A^{-2/3} \end{aligned} \right\} \quad (\text{F.25})$$

ahol bevezettük a k_p és k_{p1} arányossági tényezőket.

k_q -ra és k_{q1} -re vonatkozó eredményeinket néhány geometriailag egyszerű esetre az 1. táblázatban foglaltuk össze. Azt várjuk, hogy az (F.22) típusú sorok egy meghatározott AN -ig konvergálnak. AN -et az határozza meg, hogy az ennél alacsonyabb rendű multipólusoknak megfelelő hullámhossz nagyobb, mint valamilyen karakterisztikus fizikai levágáshoz tartozó hossz (például a nukleon-nukleon távolság). Valóban, $\lambda_{\text{max}}=9$ -ig a sorok konvergensenk bizonyulnak.

Adott σ_q^v és $\sigma_{q_1}^v$ esetén a

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a^v &= v \sigma_q \\ \sigma_{t_3}^v &= \frac{1}{2} v \sigma_{q_1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{F.26})$$

összefüggések segítségével könnyen megkaphatjuk az eloszlások szélességét az (F.1) változókbán.

Eredményünk szerint

$$\sigma_a^v \sim \frac{1}{\sqrt{b_{\text{comp}}}} A^{1/3}, \quad \sigma_{t_3}^v \sim \frac{1}{\sqrt{b_{\text{sym}}}} A^{1/3}. \quad (\text{F.27})$$

A $b_{\text{sym}} \simeq 50$ MeV, $b_{\text{comp}} \simeq 15$ MeV értékeket használjuk [55].

(F.27)-et (F.12)-vel és (F.13)-mal összehasonlítva látjuk, hogy az általunk használt kollektív modell olyan σ_a^v -t szolgáltat, amelynek A -függése közbelső a Fermi-gáz modell és a naiv klasszikus független részecske modell között, de a Fermi-gáz modellhez áll közelebb.

1. TÁBLÁZAT:

Az (F.25)-ben szereplő k_e és k_{e_1} állandók, valamint a $\sigma_a/\sigma_{t_3} = 2k_e/k_{e_1}$ arány különböző v résztérfogatokra. λ_{max} és n_{max} az (F.22) sor legnagyobb indexű figyelembe vett tagjait jelöli.

1. táblázat

Integrációs határok						v/V	λ_{max}	n_{max}	k_e	k_{e_1}	$2\sigma_e/\sigma_{e_1}$ vagy σ_a/σ_{t_3}
r_1	r_2	θ_1	θ_2	Φ_1	Φ_2						
O	R	O	π	O	π	$\frac{1}{2}$	3	5	1,192	0,475	5,02
							5	5	1,227	0,491	4,92
							9	9	1,116	0,534	4,18
							9	13	1,194	0,536	4,45
$\frac{1}{2}$ R	R	O	π	O	π	$\frac{7}{16}$	9	13	1,139	0,520	4,38
O	R	O	π	O	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{4}$	9	13	1,033	0,493	4,20
$\frac{1}{2}$ R	R	O	π	O	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{7}{32}$	9	13	0,987	0,468	4,22
O	R	O	$\frac{1}{2}\pi$	O	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{8}$	9	13	0,747	0,372	4,02
$\frac{1}{2}$ R	R	O	$\frac{1}{2}\pi$	O	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{7}{64}$	9	13	0,697	0,347	4,02

A tetszőleges ütközési paraméter mellett kialakuló tényleges spektátor-térfogatokra meglehetősen nehéz feladat az (F.22) integrálok kiértékelése. Mivel az izospinkorrelációk és a neutronokban gazdag magok előállítására szempontjából számunkra a $\sigma_a^v/\sigma_{t_3}^v$ arány a legfontosabb, a számításokban σ_a^v -t a független részecske modell alapján becsteltük, majd az 1. táblázatban szereplő legkisebb résztérfogat adataiból következ

$$\sigma_{t_3}^v \simeq 0,24\sigma_a^v \quad (\text{F.28})$$

összefüggést használtuk.

IRODALOM

1. P. Freier, E. J. Lofgren, E. P. Ney and F. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **74**, 1818, 1948.
2. H. A. Weidenmüller, Proc. of NATO advanced Study Institute of Theoretical Methods in Medium-Energy and Heavy Ion Physics, Madison, Wisconsin, 1978.
H. A. Weidenmüller, Heidelberg-preprint MPI H—1978—V 29.
D. Agassi, C. M. Ko and H. A. Weidenmüller, Heidelberg-preprint MPI H—1977—V 31.
3. D. K. Scott, LBL-report 8931, 1979.
4. S. E. Koonin, Proc. of the International School of Nuclear Physics, Erice, Italy, 1979.
5. P. Bonche, S. E. Koonin and J. W. Negele, *Phys. Rev.* **C13** 1226, 1976.
H. Focard, S. E. Koonin and M. S. Weiss, *Phys. Rev.* **C17**, 1682, 1978.
6. J. P. Blocki, J. Randrup, W. J. Swiatecki, C. F. Tsang, *Ann. Phys.* **105**, 427, 1977.
J. P. Blocki, Y. Boneh, J. R. Nix, J. Randrup, M. Robel, A. J. Sierk, W. J. Swiatecki, *Ann. Phys.* **113**, 330, 1978.
7. S. E. Koonin and J. Randrup, *Nucl. Phys.* **A289**, 475, 1977.
J. Randrup, *Ann. Phys.* **112**, 356, 1978.
J. Randrup, *Nucl. Phys.* **A307**, 319, 1978.
8. A. A. Amsden, F. H. Harlow, J. R. Nix, *Phys. Rev.* **C15**, 2059, 1977.
9. R. M. DeVries, lecture given on the Conference "Nuclear Physics in Heavy Ion Collisions between 10 and 300 MeV/nucleon" Copenhagen, September 1979.
10. W. Scheid, H. Müller and W. Greiner, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 741, 1974.
M. Gyulassy and W. Greiner, *Ann. Phys.* **109**, 485, 1977.
11. J. Randrup, *Nucl. Phys.* **A314**, 429, 1979.
12. J. P. Bondorf, Workshop on "High resolution Heavy Ion Physics at 20—100 MeV/A", Saclay, 1978.
13. L. Anderson, LBL-report 6767, 1977.
14. S. Nagamiya, Proc. of 4th High Energy Heavy Ion Summer Study, Berkeley, 1978, LBL—7766.
15. J. D. Bowman, W. J. Swiatecki and C. F. Tsang, LBL-report 2980, 1973.
16. J. Hüfner and J. Knoll, *Nucl. Phys.* **A290**, 460, 1977.
W. D. Myers, *Nucl. Phys.* **A296**, 177, 1978.
17. A. Mekjian *Phys. Rev.* **C17**, 1051, 1978.
G. D. Westfall, J. G. Gosset, P. J. Johansen, A. M. Poskanzer, W. G. Meyer, H. H. Gutbrod, A. Sandoval and R. Stock, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1202, 1976.
18. I. Montvay and J. Zimányi, *Nucl. Phys.* **A316**, 490, 1979.
19. K. L. Wolf, H. H. Gutbrod, W. G. Meyer, A. M. Poskanzer, A. Sandoval, R. Stock, J. Gosset, C. H. King, G. King, N. Van Sen and G. D. Westfall, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1448, 1979.
20. W. Benenson, G. Bertsch, G. M. Crawley, E. Kashy, J. A. Nolen, H. Bowman, J. G. Ingersoll, J. O. Rasmussen, J. Sullivan, M. Koike, M. Sasao, J. Peter and T. E. Ward, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 683, 1979.
21. L. Westerberg, D. G. Sarantites, D. C. Hensley, R. A. Dayras, M. L. Halbert and J. H. Barker, *Phys. Rev.* **C18**, 796, 1978.
22. J. J. Griffin, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 478, 1966.
M. Blann, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 1357, 1968.
23. J. P. Bondorf, J. N. De, A. O. T. Karvinen, G. Fáti and B. Jakobsson, *Phys. Lett.* **84B**, 162, 1979.
J. P. Bondorf, J. N. De, G. Fáti, A. O. T. Karvinen, B. Jakobsson and J. Randrup, *Nucl. Phys.*, in print.
24. M. C. Robel, Ph. D. Thesis, Lawrence Berkeley Laboratory, 1979.
25. A. Bohr and B. R. Mottelson: *Nuclear Structure*, Vol. 1. Benjamin kiadó, N. Y. 1969.
26. J. P. Bondorf, M. I. Sobel and D. Sperber, *Phys. Rep.* **15C**, 83, 1974.
27. P. A. Gottschalk and M. Weström, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1250, 1977.
P. A. Gottschalk and M. Weström, *Nucl. Phys.* **A314**, 232, 1979.
S. I. A. Garpman, D. Sperber and M. Zielinska-Pfabe, to be published.
28. J. D. Garrett, private communication,
R. Lieder, private communication,
L. Westerberg, private communication.
29. B. Lukács, KFKI-report 1978—82.
L. P. Csernai and B. Lukács, KFKI-report 1979—58.
30. L. D. Landau and E. M. Lifšic: *Hidrodinamika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979, 421. l.
31. L. P. Csernai and G. Fáti, KFKI-report 1979—66.
32. P. Danielewicz, *Nucl. Phys.* **A314**, 465, 1979.

33. D. K. Scott, LBL-report 7703, 1978.
34. H. Gutbrod *et al.*, quoted by M. Gyulassy in Proc. of EPS Topical Conf. on Large Amplitude Collective Nuclear Motions, Keszthely, 1979.
35. S. Nagamiya *et al.*, Phys. Lett. 81B, 147, 1979.
36. CERN—Copenhagen—Grenoble—Lund Proposal CERN/PSCC/78—8.
37. J. P. Bondorf, L. P. Csernai, G. Fái and B. Lukács, in preparation.
38. J. P. Bondorf, S. I. A. Garpman and J. Zimányi, Nucl. Phys. A296, 1978 320, f.
39. P. J. Siemens and J. O. Rasmussen, Phys. Rev. Lett. 42, 880, 1979.
40. J. Hüfner, Proc. of 4th High Energy Heavy Ion Summer Study, Berkeley, 1978., LBL—7766.
41. J. Zimányi, B. Lukács and G. Fái, to be published J. Zimányi, B. Lukács, G. Fái and J. P. Bondorf, in preparation.
42. J. Zimányi, G. Fái and B. Jakobsson, Phys. Rev. Lett., 43, 1705, 1979.
43. L. D. Landau and E. Lifshitz: Statistical Physics, Pergamon Press, London—Paris, 1970. 159. p.
44. R. Bond, P. S. Johansen, S. E. Koonin and S. I. A. Garpman, Phys. Lett. 71B, 43, 1977.
45. K. G. Libbrecht and S. E. Koonin, Phys. Rev. Lett. to be published.
S. E. Koonin, lecture given on the Conference "Nuclear Physics in Heavy Ion Collisions between 10 and 300 MeV/nucleon", Copenhagen, September 1979.
46. B. Jakobsson, J. P. Bondorf and G. Fái, Phys. Lett. 82B, 35, 1979.
47. G. F. Bertsch, Phys. Rev. C15 713, 1977.
48. J. P. Bondorf, G. Fái and O. B. Nielsen, Phys. Rev. Lett. 41, 391, 1978.
J. P. Bondorf, G. Fái and O. B. Nielsen, Nucl. Phys. A312, 149, 1978.
49. J. Hüfner, K. Schäfer and B. Schürmann, Phys. Rev. C12 1888, 1975.
50. L. F. Oliveira, R. Donangelo and J. O. Rasmussen, Phys. Rev. C19, 826, 1979.
51. W. Loveland, R. J. Otto, D. J. Morrissey and G. T. Seaborg, Phys. Lett. 69B, 284, 1977.
52. D. J. Morrissey, L. F. Oliveira, J. O. Rasmussen, G. T. Seaborg, Y. Yariv and Z. Fraenkel, Phys. Rev. C18, 1267, 1979.
D. J. Morrissey, L. F. Oliveira, J. O. Rasmussen, G. T. Seaborg, Y. Yariv and Z. Fraenkel, Phys. Rev. Lett. 43, 1267, 1979.
53. T. J. M. Symons, Y. P. Viyogi, G. D. Westfall, P. Doll, D. E. Greiner, H. Faraggi, P. J. Lindström, D. K. Scott, H. J. Crawford, C. McParland, Phys. Rev. Lett. 42, 40, 1979.
54. G. W. Butler, D. G. Perry, L. P. Remsberg, A. M. Poskanzer, J. B. Natowitz and F. Plasil, Phys. Rev. Lett. 38, 1380, 1977.
55. A. Bohr and B. R. Mottelson: Nuclear Structure, Vol. 2. Benjamin Publisher N. Y. 1975.
56. G. Bertsch and J. Borysowicz, MSU-preprint, 1979.
57. Brazil—Japan Collaboration, Proc. of the Conference on Cosmic Rays and Particle Physics, Bartol, 1978.
58. J. D. Bjorken and L. D. McLerran, SLAC-preprint, 1979.

MÉRTÉKELMÉLETEK TOPOLOGIKUSAN STABIL, STATIKUS MEGOLDÁSAINAK VIZSGÁLATA*

KISS-TÓTH TIBOR

TARTALOMJEGYZÉK

I. Bevezetés	143
II. Mértékelméletek és spontán szimmetriasértés	146
1. Globális szimmetria	146
2. Mértéktranszformációk	147
3. Yang—Mills-kölcsönhatás tulajdonságai	149
4. Spontán szimmetriasértés	150
5. A mértékszimmetria spontán sértése	154
III. Mértékelméletek klasszikus megoldásai	156
1. Nem-disszipatív megoldások	156
2. Julia—Zee-korrespondencia	156
3. Topológia és a terek viselkedése a végtelenben	158
4. Öndualitás és a Bogomol'ny feltétel	158
5. Prasad—Sommerfield—Bogomol'ny megoldás	160
6. 't Hooft—Polyakov monopólus	160
IV. Statikus, tengelyszimmetrikus BPS megoldásokat leíró egyenletek	163
Az egyenletek σ -modell reprezentációja	172
V. Összefoglalás	175
Köszönetnyilvánítás	176
Irodalomjegyzék	176

I. BEVEZETÉS

A mértékelméleteket először *Yang* és *Mills* [1] vezette be 1954-ben. A céljuk egy olyan elmélet megszerkesztése volt, amelyben az erős kölcsönhatások globális izospin szimmetriája kiterjeszthető a lokális szimmetriára, ahol a téridő különböző pontjaiban megengedett az egymástól teljesen független izospin transzformáció. Akkoriban még nem volt világos, hogy a természetben észlelhető kölcsönhatások leírására ez használható-e, de a koncepció eleganciája magára vonta a fizikus világ figyelmét. Különböző okok miatt a fejlődés kezdetben nem volt valami gyors. A lokális mértékinvariancia tömegnélküli vektor-mezonok megjelenéséhez vezetett, melyek viszont nem voltak észlelhetők. A mértékelméletek renormalizálhatósága is nehézségekbe ütközött. Az első problémát 1964-ben *Higgs* [2] oldotta meg, tömeget adva a mértéktereknek, a másodikat pedig 1971-ben *G't Hooft* [3].

Amikor világos lett a töltött áramok $V-A$ szerkezete, nyilvánvalóvá vált a gyenge és az elektromágneses kölcsönhatás hasonlósága, mely e két kölcsönhatás egyesítésének a próbálkozásait idézte elő. Az egyesített elmélet csoportja csak nem

* Érkezett 1980. júl. 8. Egyetemi doktori disszertáció.

abeli lehet. *Glashow* [4] egy $SU(2) \times U(1)$ modellt szerkesztett, ahonnan hiányoztak a Higgs-terek, amelyek előidézik a spontán szimmetria-sértést. 1967-ben *Weinberg* [5] és 1968-ban *Salam* [5] tett javaslatot, amely szerint mind a fotont, mind a közbenső vektorbozont valamely lokális mértékinvariancia kiterjesztésével, Yang—Mills (YM) féle vektortérként vezették be. A közbenső vektorbozon tömegét a mértékcsoport spontán sértésével kívánták generálni, mértékcsoportnak pedig szintén az $SU(2) \times U(1)$ -et javasolták.

A kvark-modell sikerei azt a nézetet támasztják alá, hogy a hadronok összetettek. E felfogás szükségessé tette a kvark-kvark kölcsönhatásra való mechanizmus felépítését. Egy ilyen elmélet, amely a fizika mai állása szerint sikeresnek ígérkezik, az úgynevezett kvantumchromodinamika (QCD). Ez az elmélet kvarkokat és $SU(3)$ mértéktereket (gluon) tartalmaz. A mértékterek sértetlenek, tehát Higgs-terek jelenléte nem szükséges. A kvarkoknak szín-töltésük van, melyek nem létezhetnek hadronokon kívül, ami magyarázatot ad arra a tényre, hogy nem találhatók szabad kvarkok. Ezt a mechanizmust, amely a kvarkokat a hadronokban tartja, kvarkbezárás néven ismerjük. A QCD jóslatai nagy számú kísérleti adattal vannak összhangban.

A Weinberg—Salam-modell és a QCD az a két létező YM-elmélet, amelyeknek fontos fenomenológiai jelentőségük van.

Ezek az elméletek megfogalmazhatók a Feynman-féle útintegrál formalizmusban is, ami azt jelenti, hogy az összes klasszikus térkonfigurációkon vett funkcionál integrál az \exp (-hatás)-sal súlyozva. Tehát, ha mindent tudunk a klasszikus térkonfigurációkról, akkor elvben megválaszolható minden, a kvantumelmülethez tartozó kérdés is. A klasszikus terek részleges ismerete pedig legalább némi betekintést ad a kvantumelméletbe. Ezek azok az elvárások, amelyek indokolják a klasszikus YM terek kutatásait.

A klasszikus megoldások szektorának sok éven keresztül elég kis jelentőséget tulajdonítottak. A klasszikus mozgásegyenletek első megoldását a tiszta $SU(2)$ mértékelméletben *Ikeda* és *Miyachi* [6] találta meg 1962-ben.

Ez a megoldás mindössze csak a már ismert Coulomb-megoldás beágyazását jelentette magasabb mértékcsoportba. Később *Loos* [7] megmutatta, hogy ez a beágyazás alkalmazható magasabb mértékcsoportokra is.

Az első eredeti nem abeli YM megoldást *Wu* és *Yang* [8] találta meg (1968). A Wu—Yang-megoldás is, az *Ikeda*—*Miyachi*-megoldáshoz hasonlóan pontszerű, ami azt jelenti, hogy a mértékpotenciál mindenütt $1/r$ szerint csökken. A Wu—Yang-megoldás legértékesebb tulajdonsága az, hogy egy pontszerű, nem abeli mágneses monopólust ír le.

A YM-elméletek sokkal bonyolultabb statikus megoldásokat is megengednek, mint a fent említett pontszerűek. Az első ilyen típusú megoldást *Treat* [9] találta, amelyben a Coulomb-típusú potenciálon kívül rövid hatótávolságú potenciálok (e^{-Mr}) is találhatóak. Az M állandó a mértékpotenciál értéke a végtelenben. Ha $M=0$, akkor a rövid hatótávolságú potenciálok átmennek a hosszú hatótávolságúba.

Fontos lépés volt *Nielsen* és *Olesen* dolgozata [10], amely bevezeti a „klasszikus Higgs-mechanizmust” a klasszikus mértékelméletbe. Ez a mechanizmus teljesen analóg a kvantumtérelmélet Higgs-mechanizmusával, olyan értelemben, hogy a klasszikus mértékelméletekbe tömeget vezet be, mert bizonyos mértékpotenciálok szükségszerűen e^{-Mr} szerint viselkednek nagy r értékekre és véges energiára.

1974-ben *'t Hooft* [11] és *Polyakov* [11] egymástól függetlenül fedezik fel az $SU(2)$ mértékelmélet mágnesesmonopólus megoldását egy Higgs-triplettel. Ez a meg-

oldás nemszinguláris és véges energiájú, és egy kiterjedt, lokalizált mágneses töltésű és topológiailag stabil objektumot ábrázol.

E fontos tulajdonságok társulva avval a ténnyel, hogy a YM-elmélet spontán sértett, nagy érdeklődést keltenek az ilyen típusú megoldások iránt. A spontán sértett elmélet jelenléte azért fontos, mert, mint ahogy azt már említettük, feltehetően hivatott az elektromágneses és gyenge kölcsönhatás egyesítésére. A megoldások kiterjeszthetők magasabb mértékcsoportokra is.

A mai napig azonban sikertelennek bizonyultak a többmonopólusos megoldásra irányuló kísérletek. Ezért sokan kérdésessé teszik a 't Hooft—Polyakov monopólus létezését, mint fizikai, részecskeszerű objektumét. A másik probléma abból ered, hogy a nem abeli monopólusok nagyon nehezek, tömegük feltehetően néhány ezer GeV.

A munkánkban mi is a 't Hooft—Polyakov típusú többmonopólus megoldásra irányuló módszert vizsgáljuk. Általános tengelyszimmetrikus megoldásokat keresünk. Megmutatjuk, hogy ekkor a Yang [12] által definiált R mértékben felírt mértékvektor komponenseket meghatározó függvények éppen az általános relativitáselméletben közismert Ernst-egyenletek [13] általánosított alakját elégítik ki. Ha a megoldásokat a Manton-féle Ansatz [14] keretein belül keressük, akkor ezek az egyenletek egzaktul az Ernst-egyenletekre redukálódnak, amelyek az Einstein-egyenletek stacionárius tengelyszimmetrikus megoldásait írják le. Ezen egyenleteket az utóbbi időben sokan vizsgálták az irodalomban és olyan módszereket dolgoztak ki, amelyek egy ismert megoldásból újabbakat képesek generálni. Ezek a módszerek részben azon alapulnak, hogy az egyenleteknek végtelen paraméteres szimmetria csoportja van, az ún. Geroch-csoport [15]. Ez lehetővé teszi az irodalomban kidolgozott módszerek alkalmazását ezekre az egyenletekre is.

A teljesség kedvéért megemlíteném még a klasszikus megoldások további két fontos csoportját.

A négydimenziós euklidészi $SU(2)$ mértékelméletekben talált megoldások (16) az „instantonok”, vagy másképpen „pszeudorészecskék”. E megoldások főbb tulajdonságai:

- nemszingulárisak és lokalizáltak a négydimenziós euklidészi tér minden irányában az imaginárius időtengelyt is beleértve,
- önduálisak (ami azt jelenti, hogy az energiájuk értéke nulla).
- a topológikus töltésük $q=1$,
- tetszés szerinti sok instanton megoldás létezik (Witten 1977; 't Hooft 1977 c/, [17]).

A harmadik legfontosabb klasszikus megoldás az úgynevezett „meron” megoldás [18]. A meron egy pontszerű, feles topológikus töltés. A meronok szinguláris természetű megoldások, így tehát végtelen hatással rendelkeznek, továbbá nem önduálisak. Több meronos megoldások szintén ismertek.

A dolgozatunk felépítése a következő: a II. fejezetben áttekintjük a mértékelméleteket és a spontán szimmetriasértést, a III-ban pedig részletesebben foglalkozunk a monopól megoldásokkal, a IV-ben közöljük az általunk végzett konkrét számításokat.

II. MÉRTÉKELMÉLETEK ÉS SPONTÁN SZIMMETRIASÉRTÉS

1. Globális szimmetria

A térelméletnek a Lagrange-féle analitikus módszerével fogunk dolgozni. A rendszer dinamikáját az L Lagrange-függvény írja le, amely a tereknek (ψ) és ezek deriváltjának függvénye ($\partial_\mu \psi$):

$$L = L(\psi, \partial_\mu \psi). \quad (\text{II.1})$$

Ha végrehajtható egy olyan infinitezimális transzformáció, amely az L -t invariánsan hagyja és az összes téridőpontban ugyanaz, akkor globális szimmetriáról beszélünk:

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi + \delta\psi. \quad (\text{II.2})$$

Továbbá, belső szimmetriáról pedig akkor beszélünk, amikor a fent említett transzformáció nem keveri a különböző téridő tulajdonsággal rendelkező tereket.

A számunkra jelentős belső szimmetria az izotópspin vagy röviden: izospin. Az izospin bevezetését az indokolja, hogy általa bizonyos folyamatok egyszerűen szisztematizálhatók, mások kizárhatók, valamint a részecskék áttekinthető családokba rendezhetők. Történetileg a magerők töltésfüggetlensége vezetett az izospin fogalmára.

Tételezzük fel, hogy vannak izodublett tereink, amelyek vagy $1/2$ vagy 0 spinűek. A dublettekhez hozzárendelhetünk egy-egy izospinort, amely a részecskék állapotát egy absztrakt izospintérben írja le:

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}.$$

Az infinitezimális transzformáció figyelembevételével:

$$\begin{aligned} \psi' &= \psi + \delta\psi, \\ \delta\psi &= i\varepsilon^a \frac{\tau_a}{2} \psi(x), \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

ahol az ε^a infinitezimális paraméter, a τ_a -k pedig a Pauli-mátrixok, amelyek a következő felcserélési törvényeket elégítik ki:

$$\left[\frac{\tau_a}{2}, \frac{\tau_b}{2} \right] = i\varepsilon_{abc} \frac{\tau_c}{2}. \quad (\text{II.4})$$

Az ε_{abc} a Levi—Civita-szimbólum.

A Lagrange-függvény akkor izospin-invariáns, ha:

$$L(\psi') = L(\psi).$$

Ezen invariancia fennállásának következménye az izospin áram megmaradása (Noether tétel):

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha} \delta\psi_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi_\alpha} \partial_\mu (\delta\psi_\alpha) = i\varepsilon^a \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi_\alpha} \right) \left(\frac{\tau_a}{2} \right)_{\alpha\beta} \psi_\beta + \\ &+ i\varepsilon^a \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi_\alpha} \left(\frac{\tau_a}{2} \right)_{\alpha\beta} \psi_\beta \right] = 0. \end{aligned}$$

Az első tag a mozgásegyenlet megoldásaira nullával egyenlő és így az áramra a következő kifejezést kapjuk:

$$J_\mu^a = -i \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi_\alpha} \left(\frac{\tau_a}{2} \right)_{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad (\text{II.5})$$

az árammegmaradás pedig:

$$\partial^\mu J_\mu^a = 0. \quad (\text{II.6})$$

Ennek a következménye az izospintöltés megmaradása:

$$I^a = \int J_0^a(x, t) d^3x, \quad (\text{II.7})$$

$$\frac{d}{dt} I^a = \int d^3x [\partial^\mu J_\mu^a + \vec{\nabla} \tilde{J}^a] = \int d^3x \vec{\nabla} \tilde{J}^a = 0. \quad (\text{II.8})$$

A Lagrange-függvényt általában fel szoktuk bontani szabad és kölcsönható részre:

$$L = L_{sz} + L_k,$$

amelyben a szabad rész:

$$L_{sz} = \psi(i\partial - m)\psi \quad (1/2 \text{ spinű terekre}),$$

$$L_{sz} = (\partial_\mu \varphi^+)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^+ \varphi \quad (0 \text{ spinű terekre}).$$

Itt $\partial\psi = \partial_\mu \gamma^\mu \psi$, ahol a γ^μ a Dirac-mátrix. Ha az L_k nem tartalmaz derivált csatolást, ami általában így van, a J_μ^a explicit alakja kiszámítható a L_{sz} -ből, mert:

$$\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi_\alpha} = \frac{\partial L_{sz}}{\partial \partial_\mu \psi_\alpha}.$$

Így kapjuk a:

$$\begin{aligned} J_\mu^a &= \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\tau_a}{2} \psi, & (1/2 \text{ spin}), \\ J_\mu^a &= -i \left[\partial_\mu \varphi^+ \frac{\tau_a}{2} \varphi - \varphi^+ \frac{\tau_a}{2} \partial_\mu \varphi \right] \equiv -i \varphi^+ \frac{\tau_a}{2} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi, & (0 \text{ spin}) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

egyenleteket.

2. Mértéktranszformációk

A fizikában található szimmetriáknak az az alapja, hogy bizonyos mennyiségek nem mérhetők. Az izospin szimmetria, például azt foglalja magában, hogy önkényesen választhatjuk a tengelyeket az izospin térben. Tehát a protonnak a felfelé („fel”) és a neutronnak a lefelé („le”) választott izospin orientációja csupán csak konvenció.

A globális szimmetria megköveteli, hogy az egyszer kiválasztott izospin orientáció ugyanaz maradjon az összes téridő pontban. A lokális kvantumtérelméletben viszont ugyanazon pontban a különböző mennyiségek összehasonlítása játszik szerepet. Ezért szükséges az olyan elmélet megszerkesztése, amelyben a globális transzformáció

kiterjeszthető olyan transzformációkra is, amelyek eltérőek különböző téridő pontokban. Ez a következő alakban adható meg:

$$\partial\psi = i\varepsilon^a(x) \frac{\tau_a}{2} \psi(x), \quad (\text{II.10})$$

ahol az $\varepsilon(x)$ egy infinitezimális koordinátafüggvény. A mi esetünkben ez azt jelenti, hogy az izospintengely orientációja bármelyik pontban önkényesen választható.

E kiterjesztésből adódó problémákat a következő példán fogjuk vizsgálni. Adva van egy $1/2$ -spinű izodublett, amelyre az L_{sz} a következő:

$$L_{sz} = i\bar{\psi}\partial\psi - m\bar{\psi}\psi.$$

Az L_{sz} invariáns a (II.3) transzformációval szemben, de nem invariáns (II.10)-zel szemben, mert a $\partial_\mu\psi$ más módon transzformálódik, mint maga a tér, a $\bar{\psi}\partial\psi$ tag nem invariáns volta miatt:

$$\delta\partial_\mu\psi = i\varepsilon^a(x) \frac{\tau_a}{2} \partial_\mu\psi + i(\partial_\mu\varepsilon^a) \frac{\tau_a}{2} \psi,$$

$$\partial(\bar{\psi}\partial\psi) = i\partial_\mu\varepsilon^a\gamma_\mu \frac{\tau_a}{2} \psi \neq 0.$$

A differenciálgeometriában található az a módszer, amely helyreállítja (II.10)-es invarianciát. A probléma okozója a differenciál-operátor, amely helyett bevezetünk egy új operátort, az úgynevezett kovariáns derivációt, amely szintén elsőrendű differenciál-operátor, de olyan tulajdonsággal rendelkezik, hogy ugyanúgy transzformálódik, mint a tér önmaga:

$$\nabla_\mu\psi = \left(\partial_\mu + igA_\mu^a \frac{\tau_a}{2}\right)\psi, \quad (\text{II.11})$$

$$\delta(\nabla_\mu\psi) = i\varepsilon^a(x) \frac{\tau_a}{2} \nabla_\mu\psi. \quad (\text{II.12})$$

Itt a g csatolási állandó, amely leírja a ψ -nek az A_μ^a -val való kölcsönhatásait, az A_μ^a -k pedig az újonnan bevezetett vektorterek, melyeket mértéktereknek hívunk, a transzformációt pedig mértéktranszformációnak.

A Lagrange-függvény invarianciájának a helyreállítása, a $\partial_\mu\psi \rightarrow \nabla_\mu\psi$ helyettesítéssel történik, és így tartalmazza a ψ tér összes kölcsönhatását, beleértve az A_μ -vel valót is. Az $L(\psi, \nabla_\mu\psi)$ invariáns marad, ha a ψ -t alávetjük a (II.10)-es transzformációnak, az A_μ -t pedig a következőnek:

$$\delta A_\mu^a = -\varepsilon_{abc}\varepsilon^b(x) A_\mu^c - \frac{1}{g} \partial_\mu\varepsilon^a(x), \quad (\text{II.13})$$

amelyhez pedig a (II.11)-es transzformációja vezet a (II.12) szerint. Az $L(\psi, \nabla_\mu\psi)$ nem lehet a teljes Lagrange-függvény, mert az első deriváltakban lineáris, tehát hogy értelmes (másodrendű) mozgásegyenleteket kapjunk az A_μ^a terekre, szükségünk van másodrendű tagokra is. Ez a tag szükségképpen mértékvariáns kell legyen. Az elektrodinamikára támaszkodva definiáljuk a mértékvariáns rotációt:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g\varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

Bebizonyítható, hogy ha az A_μ^a -re hatunk a (II.13)-mal az $F_{\mu\nu}^a$ lineárisan transzformálódik:

$$\delta F^a = -\varepsilon_{abc} \varepsilon^b(x) F_{\mu\nu}^c.$$

Tehát az

$$L_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a (F^a)^{\mu\nu},$$

mértékvariáns és ez a szükséges Lagrange-függvény a YM-terekre. A teljes Lagrange-függvény akkor a következő alakban írható fel:

$$L_t = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a (F^a)^{\mu\nu} + L(\psi, \nabla_\mu \psi). \quad (\text{II.14})$$

3. A Yang—Mills-kölcsönhatás tulajdonságai

A ψ — A kölcsönhatást szokás Yang—Mills-kölcsönhatásnak nevezni. Abban az esetben, ha a ψ terek csak YM-kölcsönhatásban vesznek részt, a szabad Lagrange-függvény a következő alakban írható:

$$L_{sz}(\psi, \nabla_\mu \psi) = \bar{\psi}(i\nabla - m)\psi,$$

és teljesen meghatározott, ha ismerjük a ψ terek kinematikáját (spin, izospin, tömeg). Ebben az esetben az L_t a kinematikai követelményeken kívül eleget tesz a mértékinvariancia előírásainak is. A YM-elméleteket ezen egyedülálló tulajdonságuk miatt próbáljuk felhasználni az elemi kölcsönhatások leírására.

A teljes Lagrange-függvény az izodublett ψ térre, amely kölcsönhat a YM-térrel (izotriplett) a következő alakot veszi fel:

$$L_t = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a (F^a)^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\nabla - m)\psi. \quad (\text{II.15})$$

Expliciten leírva:

$$\begin{aligned} L_t = & -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\mu^a (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) + \bar{\psi}(i\partial - m)\psi - g A_\mu^a \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\tau_a}{2} \psi + \\ & + g \varepsilon_{abc} A_\mu^a A_\nu^b \partial^\mu A^{c\nu} - \frac{g^2}{4} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{adf} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{f\nu} \equiv \\ & \equiv {}''A^2'' + {}''\bar{\psi}\psi'' + g {}''A\bar{\psi}\psi'' + g {}''A^3'' + g^2 {}''A^4''. \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Ha $g \rightarrow 0$, akkor az L_t -ben csak azok a négyzetes tagok maradnak, amelyeket az L_{sz} tartalmaz. A térelméletből ismert, hogy a négyzetes tagok („ A^2 ” és „ $\bar{\psi}\psi$ ”) az A és a $\bar{\psi}$ térhez csatolt részecskék szabad mozgását írják le. A magasabb rendű tagok a terek kölcsönhatására vonatkoznak. Ezek közül ki kell emelni az „ A^3 ” és „ A^4 ” tagokat, amelyek tartalmazzák a mértékterek fontos tulajdonságát: az önkölcsönhatást. Továbbá, (II.16)-ban nem található az $A_\mu^a A^{a\mu}$ -vel arányos tagok, amelyek nem elégítik

ki a (II.13)-as feltételt. Ez más szóval azt jelenti, hogy a bevezetett A mértékterek szükségképpen tömeg nélküliek.

Az önkölcsönhatású tagok jelenléte különbözteti meg a mértékelméleteket a kvantumelektrodinamikától és ezek okoznak gondot a perturbációs számítás konzisztens megfogalmazásában is. Ebben a tekintetben a YM-elméletek sokkal jobban hasonlítanak a kvantum-gravitációhoz, mint az elektrodinamikához, mert a gravitonra is jellemző az önkölcsönhatás és — hasonlóan a gravitációelmélethez — a YM-elméletek sem „szabad-tér”-elméletek az anyagtér távollétében.

A fotonon kívül megjelenő tömeg nélküli vektor-bozonok nem ismertek a természetben. Ezért a nem abeli mértékelméleteknek — úgy tűnik — nincs jelentőségük a fizikában, különösképpen a gyenge kölcsönhatások leírásában. E probléma orvoslására bevezethetnénk a Lagrange-függvénybe az $A_\mu^a A^{\mu a}$ -vel arányos tagot, de mivel ez a tag nem mértékinvariáns, máris ellentétbe kerülne a YM-elméletek alapjával. A helyes megoldáshoz vezető út szükségessé tette a spontán szimmetriasértés tanulmányozását.

4. Spontán szimmetriasértés

Egy pillanatra hagyjuk el a mértékelméleteket és foglalkozzunk a spontán szimmetriasértés problémáival.

A természetben előforduló szimmetriák egy nagy csoportja nem egzakt, például az izospin-szimmetria is sérül, ami a proton-neutron tömegkülönbségben nyilvánul meg. A szimmetriasértés leírására bevezethetnénk nem-invariáns tagokat a Lagrange-függvénybe, de mi itt egy alternatív lehetőséget tanulmányozunk, mégpedig az ún. spontán szimmetriasértést.

A klasszikus térelméletben a rendszer alapállapotát — a vákuumot — a téregyenletek legalacsonyabb energiájú megoldásaként definiáltuk. Mivel a kinetikus energia, mely a terek deriváltjait tartalmazza, mindig pozitív, a legalacsonyabb energiájú megoldás általában egy koordinátafüggetlen megoldás, amelyben a terek olyan értékeket vesznek fel, hogy minimalizálják az energiát. Tegyük fel, hogy elméletünknek van egy szimmetriája, amelyet a Lagrange-függvény invarianciája jellemez a T transzformációk egy halmazával szemben. Lehetséges, hogy a Hamiltonsűrűséget minimalizáló terek halmazának elemeit T nem önmagukban, hanem egymásba transzformálja. Ebben az esetben akárhogy is választjuk meg a vákuumot, az nem lesz invariáns a T transzformációval szemben. Ezt az esetet, amikor a Hamilton-operátor szimmetriája nem szimmetriája az alapállapotnak, spontán szimmetriasértésnek nevezzük. [19, 20]

Mint már a bevezetőben említettük, az általunk vizsgált 't Hooft—Polyakov típusú monopólus az $SU(2)$ mértékelmélet megoldása egy valós Higgs-triplettel, ezért a spontán szimmetriasértés mechanizmusát is ezen a példán vizsgáljuk.

Az önkölcsönható φ skalár-tér leírására írjuk fel a következő Lagrange-függvényt:

$$L = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \mu^2 \varphi \varphi - \lambda(\varphi \varphi)^2 \equiv (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - V(\varphi \varphi) \quad (\text{II.17})$$

ahol:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.18})$$

A célunk a φ -hez csatolt részecskék tömegspektrumának vizsgálata. A mértékelmélteknel a szokásos eljárás a Lagrange-függvény tagjainak a szétválasztása a tagok rendje szerint:

$$\begin{aligned} L &= {}''\varphi^2'' + {}''\varphi^4'', \\ {}''\varphi^2'' &= (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \mu^2 \varphi \varphi, \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

és a „ φ^2 ” másodrendű tag mozgásegyenletének a tanulmányozása. Ebben az esetben a következő mozgásegyenletre jutunk:

$$(\square + \mu^2)\varphi(x) = 0,$$

amely leírja a nulla spinű, invariáns tömegű izotriplett mozgását. A tömeg:

$$m = \sqrt{\mu^2},$$

ami szükségképpen megköveteli a $\mu^2 > 0$ feltételt.

Ebbe az elemzésbe hallgatólagosan belefoglaltuk, hogy a legalacsonyabb energiájú állapot — a vákuum — a $\varphi_0 = 0$ konfigurációnak felel meg. Csak ebben az esetben van értelme az L kifejtésének a φ hatványai szerint, összekapcsolva a részecske mozgását a $\varphi_0 = 0$ körüli kis oszcillációkkal.

A skalártereknél az az eset is fennáll, amikor a legalacsonyabb energia-konfiguráció nem nulla, tehát:

$$\varphi = \varphi_0 \neq 0.$$

A φ állandó volta biztosítja a vákuum eltolással szembeni invarianciáját.

Ebben az esetben a részecskék a φ_0 körüli kis oszcillációkhoz vannak csatolva, nem pedig a $\varphi = 0$ körüliekhez és így (II.19) kifejtésnek nincs értelme. A kis oszcillációk a következő alakban írhatók fel:

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \chi(x) \quad (\text{II.20})$$

és az L -t a $\chi(x)$ szerint fejtjük sorba:

$$L = {}''\chi^2'' + {}''\chi^3'' + {}''\chi^4''. \quad (\text{II.21})$$

A részecske spektrumot tehát a „ χ^2 ” tagból származó mozgásegyenletek determinálják.

Az alapállapot térkonfigurációja szükségképpen az abszolút minimális energia-(Hamilton)-sűrűségnek felel meg.

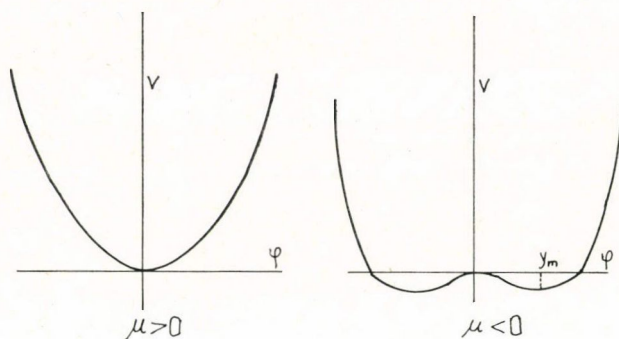
$$H = \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial L}{\partial \varphi} \varphi - L = \dot{\varphi} \dot{\varphi} + (\vec{\partial} \varphi)(\vec{\partial} \varphi) + V(\varphi), \quad (\text{II.22})$$

ahol a $\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ és a $\vec{\partial} \varphi$ pedig a φ tér gradiense.

A (II.22)-es egyenlet két első tagja pozitív és csak a $\varphi = \text{konst.}$ értékekre tűnik el. Az alapállapotra tehát a $\varphi = \text{konst.}$ és $V(\varphi) = \text{minimum}$ feltételeket kell teljesíteni.

$$L = V(\varphi) = \mu^2 \varphi \varphi + \lambda (\varphi \varphi)^2.$$

A V -nek csak a $\lambda > 0$, esetben van minimuma, amelynek alakja a μ^2 -től függ. Az 1. ábrán látható a V alakja a φ függvényében:



1. ábra

a) $\mu^2 \geq 0$ a minimum a $\varphi = 0$ -nál található (II.23)

b) $\mu < 0$, $\varphi_{\min}^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$. (II.24)

A b) esetben három dimenzióban minimumok egy körön fekszenek. A μ^2 értéke határozza meg, hogy a φ_0 eltűnik-e vagy sem az alapállapotban. Az a) eset vezet a már elemzett szimmetrikus tömegspektrumokhoz, ezért most foglalkozunk a számunkra fontos b) esettel.

Válasszunk egy a harmadik tengely felé orientált állandó φ_0 izovektort.

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (\text{II.25})$$

amelyben az

$$\eta = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}}. \quad (\text{II.26})$$

A $\varphi(x)$ izovektor az izospintér különböző x pontjaiban különbözhet a φ_0 -tól, orientációban és hosszúságban:

$$\varphi(x) \neq \varphi_0.$$

A $\varphi(x)$ izovektor harmadik tengely felé való orientációja egy megfelelő koordináta-rendszerre vonatkozik, amelyet az

$$U(x) = e^{i\tau_a \theta^a(x)} \quad (\text{II.27})$$

transzformál át abba az izospin koordináta-rendszerbe, amelyben a φ_0 orientációját definiáltuk. A $\varphi(x)$ komponenseit saját rendszerünkben a következőképpen definiáljuk:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.28})$$

amely a φ_0 rendszerében a következő alakban írható

$$\varphi(x) = U(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.29})$$

A (II.20)-as egyenletnek megfelelően:

$$\chi = \varphi(x) - \varphi_0 = U(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (\text{II.30})$$

amely kis perturbációkra, pontosabban kis $\theta^a(x)$ és $\sigma(x)$ értékekre a következő alakot veszi fel:

$$\chi \approx \begin{pmatrix} -\eta\theta_2 \\ \eta\theta_1 \\ \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.31})$$

A fenti egyenlet azt bizonyítja, hogy a vákuum konfigurációtól való eltéréseket parametrizálhatjuk három reális függvénnyel (terekkel) a $\theta(x)$ -szel ($a=1, 2$) és a $\sigma(x)$ -szel. Most tehát a (II.17)-es Lagrange-függvényt kell felírunk az újonnan kapott terekkel, majd meg kell vizsgálnunk a négyzetes tagokat. A (II.17)-ből az első tag:

$$\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) + \eta^2 (\partial_\mu \theta^a) (\partial^\mu \theta^a) + \text{m.r.t.}$$

$$-V \left[\left(\eta + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \text{konstans} - \frac{1}{2} (4\lambda\eta^2) \sigma^2 + \text{m.r.t.}$$

Itt m. r. t. a magasabb rendű tagokat jelöli.

A négyzetes tag pedig

$$(\chi)^2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} m^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\theta}^a) (\partial^\mu \tilde{\theta}^a), \quad (\text{II.32})$$

ahol

$$\tilde{\theta}^a = \sqrt{2} \eta \theta^a,$$

$$m^2 = 4\lambda\eta^2 = -2\mu^2 > 0.$$

A (II.32)-es egyenlet, hasonlóan a $\mu^2 > 0$ esethez, három típusú részecskét ír le, csak különböző tömegekkel. Van egy m tömegű skalár-bozon a σ terекhez csatolva és két tömeg nélküli Goldstone-bozon [20] a θ^a terекhez csatolva.

Egyszerűen magyarázható, hogy a $\varphi_0 \neq 0$ feltétel miatt vezet el a tömegsértéshez. A $\varphi_0 \neq 0$ azt jelenti, hogy mindig létezik egy (a φ_0 -val meghatározott), előírt irány, az izospin térben, amely különbözően hat a transzverzális θ^a és a longitudinális σ izospin oszcillációkhoz csatolt izospin hullámokra.

Egyszerű oka van annak a ténynek is, hogy miért éppen két Goldstone-bozonunk van. Mint már említettük, esetünkben az $SU(2)$ csoportot alkalmazzuk. Feltehetjük a kérdést: Melyek azok az $SU(2)$ transzformációk, amelyek a φ_0 -t invariánsan hagyják? Ez ekvivalens az $SU(2)$ azon generátorainak meghatározásával, melyek φ_0 -ra való hatása nullát ad, ha:

$$T\varphi_0 = 0,$$

akkor:

$$e^{ixT}\varphi_0 = \varphi_0, \quad (\text{II.33})$$

minden α -ra. Könnyen belátható, hogy a τ_1 és τ_2 nem tesz eleget a (II.33)-nak, a τ_3 viszont igen.

A három generátor közül csak egy tesz eleget a (II.33)-nak, kettő viszont sérti a szimmetriát. Az általános elv tehát az, hogy ahány sértett generátorunk van, annyi Goldstone-részecskét találunk.

A spontán szimmetriasértés mechanizmusát azért tanulmányoztuk, mert gondot okoztak a mértékelméletekben megjelenő tömegnélküli vektor-bozonok. A spontán szimmetriasértés viszont a meglevő problémán kívül bevezetett még egyet, a tömegnélküli Goldstone-bozonokat. És most jön a csoda. A két probléma egyesítve orvosolja egymást. Ami Coleman szavaival élve annyit jelent: a mértékterek megesszik a Goldstone-bozonokat és tömeget kapnak. Most pedig tanulmányozzuk a mértékszimmetriák spontán sértését.

5. A mértékszimmetria spontán sértése

Itt a (II.17)-es Lagrange-függvény $SU(2)$ mértékinvariáns alakját fogjuk vizsgálni:

$$L = (\nabla_\mu \varphi)(\nabla^\mu \varphi) - V(\varphi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a (F^{\mu\nu})^a, \quad (\text{II.34})$$

ahol a φ a (II.18)-nak megfelelően egy izotriplett. A (II.11)-ben megadott kovariáns deriváltban a bevezetett A_μ^a ($a=1, 2, 3$) mértékterek száma három (minden csoportgenerátorra egy).

Az $F_{\mu\nu}^a$ -re vonatkozó mértékinvariáns rotációt a következőképpen definiáltuk:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g\epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

Most is az alapállapotra vonatkozó (II.34)-es egyenlet klasszikus megoldását keressük. A φ_0 és a $(A_\mu^a)_0$ állandó értékeket vesznek fel. Az alapállapot invariáns kell legyen a Lorentz transzformációval szemben, ami azt jelenti, hogy a Minkowski-térben nem lehetnek kitüntetett irányok. Ez abban az esetben teljesül, ha:

$$(A_\mu^a)_0 = 0.$$

A (II.34)-ből e feltételek mellett kapott Hamilton-sűrűség megegyezik a (II.22)-vel, és így két lehetséges megoldásunk van, mépedig a (II.23) és a (II.24).

A szimmetriasértett esetet vizsgálva tételezzük fel, hogy a $\varphi(x)$ térkonfiguráció egy kicsit eltér a φ_0 eloszlástól. Mint az előző pontban láttuk, a $\varphi(x)$ a harmadik tengely irányában orientált vektor egy izospin koordináta-rendszerben, amely eltér a φ_0 -val definiált rendszertől egy $U(x)$ rotációval (II.27). A helyzet azonban mégis külön-

bőzik az említettől, mert a (II.34)-es Lagrange-függvény a téridőfüggő izospintranszformációval szemben invariáns. Ez azt jelenti, hogy az izospintengelyek önkényesen megválaszthatók az x pontban, teljesen függetlenül a x' pontban való választástól. Az x pontban választhatók tehát olyan izospin tengelyek, amelyek egybeesnek azokkal, amelyekben a $\varphi(x)$ éppen a harmadik tengely irányában orientált vektor és ugyanakkor ez megtehető az x' pontban is. A $\varphi(x)$ ekkor a következővel egyenlő:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma(x) \\ \eta + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.35})$$

Ez az egyenlet első pillantásra furcsának tűnhet, mert csak egy valós teret tartalmaz, míg a (II.31) hármat. Úgy tűnik, hogy elvesztettünk két transzverzális szabadsági fokot, amelyek a θ^a -hoz csatolódtak. A probléma megoldására határozzuk meg a tömegspektrumot a (II.35) a (II.34)-be való behelyettesítésével. A másodrendű tagokban a kovariáns derivált a következő:

$$(\nabla_\mu \varphi)(\nabla^\mu \varphi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) + \frac{1}{2} \left(\frac{g^2 \eta^2}{2} \right) [A_\mu^1 A^{1\mu\nu} + A_\mu^2 A^{2\mu\nu}] + \text{m.r.t.}$$

A $V(\varphi)$ adja a σ tömegtagot, mint az előző pontban:

$$V(\varphi) = \text{konst.} + \frac{1}{2}(-2\mu^2)\sigma^2 + \text{m.r.t.}$$

és végül a mértéktérből eredő másodrendű tag:

$$-\frac{1}{4} A_{\mu\nu}^a A^{a\mu\nu},$$

ahol az $A_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$. Ezeket a kifejezéseket összeadva kapjuk a szabad Lagrange-függvényt:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2}(-2\mu^2)\sigma^2 - \frac{1}{4} A_{\mu\nu}^1 A^{1\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{g^2 \eta^2}{2} \right) A_\mu^1 A^{1\mu} - \\ - \frac{1}{4} A_{\mu\nu}^2 A^{2\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{g^2 \eta^2}{2} \right) A_\mu^2 A^{2\mu} - \frac{1}{4} A_{\mu\nu}^3 A^{3\mu\nu}. \quad (\text{II.36})$$

Ez az egyenlet azt mutatja, hogy a mértékterek jelenlétében a spontán szimmetriasértés nem generál tömegnélküli skalárrészecskéket. Van egy $m = \sqrt{-2\mu^2}$ tömegű skalárterünk, és két

$$M = \frac{g^2 \eta^2}{2}$$

tömeget felvett vektorterünk: az A_μ^1 és az A_μ^2 ; és egy nulla tömegű „foton”.

A tömeges vektorterek egy szabadsági fokkal többel rendelkeznek, mint a tömegnélküliek, mégpedig azzal, amely a longitudinális hullámokhoz csatolódik. A sértett elméletünkben tehát két szabadsági fokkal többjük van a vektortereknek, mint

a sértetlenben és így pontosan kikompenzálódik az a két szabadsági fok, amelyet hiánypótlunk a (II.35) egyenletben. Ezek a szabadsági fokok egyszerűen áthelyeződtek a skalárterekről a vektorterek longitudinális módusaira.

Az itt leírt jelenség az irodalomban Higgs-mechanizmus [2] néven ismert, és lehetővé teszi egyes mértékterek tömegének a generálását külön tömegtagok bevezetése nélkül. A mechanizmus jelentősége nagymértékben fokozódott, mióta 't Hooft [3] megoldotta az elmélet renormalizálhatóságának problémáit. A Higgs-mechanizmusnak köszönve van egy fizikailag értelmes elméletünk, amely elvileg könnyen kezelhető a magasabb rendű perturbáció számításban.

III. MÉRTÉKELMÉLETEK KLASSZIKUS MEGOLDÁSAI

1. Nem-disszipatív megoldások

Ha követ dobunk a vízbe, hullámokat idézünk elő, melyek szétterjednek és végül kihálnak. A kő energiát ad át a víznek, amely az idő múlásával szétszóródik, még akkor is, ha elhanyagoljuk a sűrűlódást. Ha a vizet képzeletben végtelen felületnek tekintjük, akkor bizonyos idő múltán a víz egyetlen pontjának állapota sem különbözik nagy mértékben a kő vízbe dobása előtti állapotától. A zavar szétterjed.

Ez a fogalom kiterjeszthető a fenti példán kívül, általánosabb esetekre is. A θ_{00} energiasűrűségű klasszikus térelmélet mozgásegyenleteinek megoldásai disszipatívek, ha eleget tesznek a következő egyenletnek:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{\vec{x}} \theta_{00}(\vec{x}, t) = 0.$$

Az egyenlőség az elmélet alapállapotára áll fenn.

A szokásos térelméletek véges energiájú nem-szinguláris megoldásai között sokan disszipatív tulajdonsággal rendelkeznek. Ez vonatkozik többek között a Maxwell-egyenletekre és a Klein—Gordon-egyenletre. Léteznek azonban olyan klasszikus térelméletek, amelyek nem-szinguláris, nem-disszipatív, véges energiájú megoldásokat is adnak. Ezek közé tartoznak egyes (nem az összes) spontán sértett mértékelméletek, amelyek nagy jelentőséggel bírnak az utóbbi időben.

A legmeglepőbb és legegyszerűbb ilyen megoldások, amelyekkel mi is foglalkozunk, az időfüggetlen öncsatolással összetartott energia-„csomók”. Létezik e megoldások bonyolultabb osztálya is, amelyek periodikusan, vagy még bonyolultabb módon függnak az időtől. Ez az ún. rezgő csomók vagy oszcillációk osztálya.

Ha az elméletünk Lorentz-invariáns és konstruálhatók stacionárius csomók, akkor szerkeszthetők mozgó csomók is.

Ezek a csomók az irodalomban „soliton” néven is ismertek.

2. Julia—Zee-korrespondencia

Az SU(2), Higgs-triplettel rendelkező mértékelméletek a (II.34)-es Lagrange-függvénnyel definiálhatók:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a (F^a)^{\mu\nu} + (\nabla_\mu \varphi)(\nabla^\mu \varphi) - V(\varphi). \quad (\text{III.1})$$

A Higgs-potenciált pedig a következő alakban írjuk:

$$V(\varphi) = \frac{1}{4} \lambda \left(\frac{m^2}{\lambda} - \varphi^2 \right)^2, \quad \varphi^2 = \varphi_a \varphi_a. \quad (\text{III.2})$$

Ebben a klasszikus elméletben az SU(2) lokális mértékinvariancia sérül a $V(\varphi)$ potenciál miatt. A Higgs-tér végtelenbeli értéke nem tűnhet el azért, hogy a potenciális energia értéke itt nulla legyen. A megoldásnak tehát eleget kell tennie a

$$\varphi_a \rightarrow \left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \right) n_a(\vec{r}), \quad n_0 n_a = 1, \quad r \rightarrow \infty \quad (\text{III.3})$$

feltételeknek. Ez ugyanazt jelenti mint a spontán szimmetriasértés a kvantumelméletben, ahol a Higgs-tereknek a vákuum várható értéke $\langle \varphi_a \rangle \neq 0$. A végtelenben előírt $\varphi_a \neq 0$ feltétel szükségképpen kiválaszt egy n irányt a csoporttérben. Ez „sérti” a lokális SU(2) mértékinvarianciát (a fizikai megoldások sokaságában), abban az értelemben, hogy egyik megoldás sem lehet — amely kielégíti a (III.3) feltételeket — invariáns a teljes SU(2) csoportra. Az U(1)-re az SU(2) alcsoportjára viszont invariánsak lesznek. Az U(1) alcsoportot az $n_a(r)$ vektor határozza meg.

Az $m^2 \rightarrow 0$; $\lambda \rightarrow 0$ és $m^2/\lambda < \infty$ esetben a Higgs-potenciál eltűnik a (III.2) egyenletben. A $m^2/\lambda = 0$ esetben (és csak akkor) az SU(2) mértékinvariancia helyreáll.

A (III.1)-en kívül írjuk fel a tiszta YM-elmélet Lagrange-függvényét is egy lokálisan sértett potenciállal:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} \lambda \left(\frac{m^2}{\lambda} + A^2 \right)^2, \quad (\text{III.4})$$

$$A^2 = A_\mu^a A_\mu^a.$$

A potenciál minimalizálására a végtelenben a következő feltételeket szabjuk ki:

$$A^2 \rightarrow -\frac{m^2}{\lambda}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (\text{III.5})$$

Ez a határfeltétel ugyanazt a szerepet játssza, mint a (III.3), amellyel előírtuk az SU(2) nem invariáns voltát a mértéktranszformációkkal szemben. Ha $m^2 \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$ és $m^2/\lambda < \infty$, a mértékszimetriát sértő tag a (III.4)-ből eltűnik. A (III.5) egyenletek csak az $m^2/\lambda = 0$ esetben konzisztensek.

A (III.4)-es Lagrange-függvénnyel az ún. Julia—Zee-korrespondencia miatt foglalkoztunk. Julia és Zee [21] megállapították, hogy az A_0^a mértékpotenciál komponens ugyanolyan szerepet tölt be a mozgásegyenletekben, mint a Higgs-terek. Tehát $m^2 = 0$, $\lambda = 0$ és $m^2/\lambda < \infty$ -re A_0^a úgy is felfogható; mint egy φ_a Higgs-tér és fordítva. Ez természetesen csak a statikus megoldásokra igaz. A korrespondencia érzékeltetésére vegyünk egy tetszés szerinti mértéktranszformációt, amellyel szemben a Higgs-terek és a mértékterek a következőképpen transzformálódnak:

$$\varphi \rightarrow \omega \varphi \omega^{-1}$$

$$A_\mu \rightarrow \omega A_\mu \omega^{-1} - i(\partial_\mu \omega) \omega^{-1},$$

ahol az ω 2×2 -es mátrix. Ha az ω időtől független, akkor $\partial_0 \omega = 0$ és φ és A_0 ugyanúgy transzformálódnak. Ezért a φ és az A_0 ugyanazon módon vesznek részt a mérték-invariáns mennyiségekben, mint pl. a Lagrange-függvény.

3. Topológia és a terek viselkedése a végtelenben

A statikus YM-megoldások nem triviális tulajdonságokkal rendelkezhetnek, ha a csoport szempontjából nem-szinglett terek nem tűnnek el a végtelenben. Akkor a megoldások egy a végtelenben levő kétdimenziós gömb leképezését definiálják jól meghatározott sokaságra. Ez a leképezés általában nem triviális. E pontban áttekintjük e kérdés elemzésének azt az elegáns módját, amely a homotópia csoporton alapszik [22, 23].

Ismét a szokásos $SU(2)$ esetet tárgyaljuk. Már említettük, hogy a (III.3)-ban megjelenő $n_a(\vec{r})$ egységvektor függ az iránytól. Ez az egységvektor egy leképezést definiál a végtelenben levő S_∞^2 gömbről az S_1^2 csoporttérbeli egységgömbre:

$$n_a(\vec{r}): S_\infty^2 \rightarrow S_1^2. \quad (\text{III.6})$$

A leképezés az S_1^2 -t átfedheti bármilyen egészszámszor (nullát is beleértve). Így minden leképezés egy n egész számmal jellemezhető, amelyet „csavarodási számnak” hívunk. Ugyanazon n csavarodási számú leképezések topológiailag ekvivalensek vagy homotópok, a különböző n értékű leképezések viszont inekvivalensek. A homotóp leképezések folytonosan egymásba deformálhatók. Az említett ekvivalencia-reláció létezése megengedi az összes (III.6) leképezés felbontását ún. ekvivalencia osztályokra. Ezek az ekvivalencia osztályok is csoportelemeket alkotnak, méghozzá a második homotópiai csoport elemeit, amely a mi problémánkra:

$$\pi_2(S_1^2) = \mathbb{Z}.$$

A \mathbb{Z} elemei egész számok; a csavarodási számok. Mivel minden megoldás ki kell hogy elégítse a (III.3)-as feltételt, így szétválaszthatjuk a megoldások sokaságát topológiai osztályokba. A csavarodási számot szokásos topológia töltésnek is nevezni és — amint látni fogjuk — a statikus megoldások mágneses töltésének felel meg.

Megmutattuk, hogy a (III.1) Lagrange-függvény megoldásai topológiai osztályokba tartoznak. Minden osztályon belül a legalacsonyabb energiájú megoldás szükségképpen stabil. Ha ez nem így van, akkor a megoldás „felbomlik” kisebb n -nel rendelkező megoldásokra és így diszkrét változás lép fel a topológiában.

A fenti leírás a Higgs-terekkel rendelkező (III.1) Lagrange-függvényre érvényes. Az előző pontban említettük, hogy a Julia—Zee-korrespondencia [21] miatt a (III.1) megoldásai a statikus esetekben magukban foglalják a (III.4) megoldásait is. Tehát a statikus megoldások Higgs-terek jelenléte nélkül is a fent említett topológiai struktúrával rendelkeznek.

4. Öndualitás és a Bogomol'ny feltétel

Egy háromdimenziós, euklidészi, $SU(2)$ mértéktér akkor önduális, ha kielégíti a következő feltételt:

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^a \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^a = \pm F_{\mu\nu}^a, \quad (\text{III.7})$$

vagy ekvivalens jelölésben:

$$\pm E_n^a = B_n^a, \quad (\text{III.8})$$

ahol

$$E_n^a \equiv F_{0n}^a, \quad B_n^a \equiv -\frac{1}{2} \varepsilon_{nij} F_{ij}^a$$

az SU(2) YM-terek „elektromos” és „mágneses” térerőssége.

Az önduális terek jelentősek, mert kielégítik a tiszta mértékelméletek mozgásegyenleteit. Az SU(2) esetben a következő egyenlet nem más, mint azonosság:

$$\partial^\nu \tilde{F}_{\mu\nu}^a = \varepsilon_{abc} \tilde{F}_{\mu\nu}^b A_c^a.$$

Az önduális terek esetében ez az azonosság a mozgásegyenletek szerepét tölti be az SU(2) mértékelméletekben. Minden olyan A_μ^a , amelyik az $F_{\mu\nu}^a$ önduális tenzorhoz vezet, a mozgásegyenletek egy megoldását képezi. Ennek a jelentősége abban rejlik, hogy a másodrendű mozgásegyenletek megoldása helyett egy elsőrendű öndualitási egyenletet kell megoldanunk. Az öndualitás egy speciális tulajdonság, amellyel a megoldások többsége nem rendelkezik.

Az euklidészi térben bármelyik önduális megoldásnak az energia-impulzus tenzora eltűnik.

$$\theta_{\mu\nu} = -F_{\mu\lambda}^a F_\nu^{a\lambda} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\lambda}^a + i\tilde{F}_{\mu\lambda}^a) (F_\nu^{a\lambda} - i\tilde{F}_\nu^{a\lambda}). \quad (\text{III.9})$$

A tenzorkomponensek

$$\theta_{00} = (-E_n^a E_n^a + B_n^a B_n^a),$$

$$\theta_{0j} = -\varepsilon_{jmn} E_m^a B_n^a,$$

$$\theta_{ij} = E_i^a E_j^a - B_i^a B_j^a + \delta_{ij} \frac{1}{2} (-E_n^a E_n^a + B_n^a B_n^a).$$

Tehát a Lagrange-függvény

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (-E_n^a E_n^a - B_n^a B_n^a) \quad (\text{III.10})$$

az önduális megoldásokra minimalizált (vagy maximalizált).

A (III.1)-es Lagrange-függvénybe Bogomol'ny bevezetett egy feltételt [24], amely analóg a tiszta YM-elméletek öndualitásának előírásával. A Bogomol'ny feltétel a következő:

$$B_n^a \equiv -\frac{1}{2} \varepsilon_{nij} F_{ij}^a = \pm \nabla \varphi_a. \quad (\text{III.12})$$

A (III.12) egyenlet statikus megoldása ($A_0^a = 0$) a (III.1) Lagrange-függvény mozgásegyenleteinek megoldása lesz a $V(\varphi) \rightarrow 0$ limeszben. A bizonyítás egyszerű. Figyelembe kell vennünk az általános korrespondencia (21) feltételeit:

$$A_0^a = \varphi_a', \quad A_i^a = A_i^{\prime a} \quad (\text{III.13})$$

a Bogomol'ny által választott és tiszta SU(2) mértékelméletek között. A (III.13)-ból kapjuk

$$E_n^a = -\nabla_n \varphi_a,$$

és a Bogomol'ny feltételt a következő alakba írhatjuk:

$$B_n^a = \pm E_n^a,$$

ami pontosan a (III.8)-nak felel meg az önduális SU(2) mértékterek esetében.

5. Prasad—Sommerfield—Bogomol'ny megoldás

Ezt a megoldást először Prasad és Sommerfield [25] vezették be az SU(2) elmélet egy Higgs-triplettel való megoldásaként. A következő Ansatzot vesszük:

$$\varphi_a = \frac{ir_a g(r)}{r^2}, \quad A_0^\mu \equiv 0, \quad (\text{III.14})$$

$$A_i^a = \frac{\varepsilon_{ain} r_n [1 - h(r)]}{r^2}.$$

Amint látjuk, a g és h függvények csak r -től függenek, tehát az Ansatz gömbszimmetrikus. A Bogomol'ny-feltételt kielégítő megoldást keresünk, amelyet a (III.14) Ansatz (III.12)-be való behelyettesítésével kapunk. A megoldás a következő:

$$h(r) = \frac{\beta r}{\sin h\beta r},$$

$$g(r) = -1 + \frac{\beta r \cos h\beta r}{\sin h\beta r}. \quad (\text{III.15})$$

Minthogy a (III.15) alakot a Bogomol'ny korlát megoldásával nyertük, a megoldás energiája minimális és ez a minimális energia arányos a megoldás topológikus töltésével.

6. 't Hooft—Polyakov monopólus

Most pedig rátérünk a 't Hooft—Polyakov monopólus vizsgálására [11]. Ezt a megoldást az

$$r^2 g'' = g(2h^2 - m^2 r^2 + \lambda g^2) \quad (\text{III.16})$$

$$r^2 h'' = h(h^2 - 1 + g^2)$$

mozgásegyenletre találták az $m^2 \neq 0$ és $\lambda \neq 0$ esetre.

Ezek az egyenletek az

$$A_0^a = 0, \quad \varphi_a = \frac{\dot{r}_a g(r)}{r^2}, \quad (\text{III.17})$$

$$A_i^a = \frac{\varepsilon_{ain} r_n [1 - h(r)]}{r^2}$$

Ansatz behelyettesítésével kaphatók.

A megoldás fontos tulajdonságait a következőképpen foglalhatjuk össze:

1. Az A_μ^a és a φ_a sehol sem szingulárisak;
2. a hosszú hatótávolságú komponens a statikus mágneses-monopólus elektromágneses terének felel meg;
3. a megoldás véges energiájú és úgy hisszük, hogy stabil;
4. a (III.17)-es Ansatzoknál sokkal általánosabb esetekben is egyértelmű a megoldás.

A megoldás sajnos nem adható meg zárt alakban az $m^2 \neq 0$, $\lambda \neq 0$ esetben, mert csak numerikus megoldás létezik. Az $m^2 \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$ és $m^2/\lambda < \infty$, akkor a már említett (III.15)-ös Prasad—Sommerfield megoldást kapjuk. A nagy r -ekre előírt határfeltételek, $r \rightarrow \infty$:

$$h(r) \rightarrow A(m, \lambda) r e^{-\beta r}, \quad \beta \equiv \left[\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \right]^{1/2}, \quad (\text{III.18})$$

$$g(r) \rightarrow \left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \right) + D(m, \lambda) e^{-\sqrt{2} m r}, \quad (\text{III.19})$$

$$A_i^a \rightarrow \frac{\varepsilon_{ain} r_n}{r^2}, \quad (\text{III.20})$$

$$\varphi \rightarrow \dot{r}_a \left[\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \right) + \left(\frac{D}{r} \right) e^{-\sqrt{2} m r} \right]. \quad (\text{III.21})$$

A és D állandók. A megoldás fő tulajdonságai az $r \rightarrow \infty$ esetben:

$$V(\varphi) = O(e^{-\sqrt{2} m r}), \quad (\text{III.22})$$

$$F_{ij}^a = O(1/r^2), \quad (\text{III.23})$$

$$\nabla_n \varphi_a = O(1/r^2). \quad (\text{III.24})$$

Ezekből az egyenletekből látjuk, hogy a θ_{00} nagy r -ekre $O(1/r^4)$ és ezért az összenergiához való járuléka véges. A mértékpotenciál tömeges komponense $e^{-\beta r}$ szerint csökken. A tömeges komponensnek tehát nincs hatása az $r \sim 1/\beta$ -n túli területre, amelyben a Higgs-terek állandó aszimptotikus értékeket vesznek fel. A hosszú hatótávolságú komponensek viszont könnyedén hathatnak a Higgs-terekre.

A kis r -ekre a következő határfeltételek teljesülnek $r \rightarrow 0$ esetén

$$h(r) \rightarrow 1 + B(m, \lambda) r^2, \quad (\text{III.25})$$

$$g(r) \rightarrow C(m, \lambda) r^2, \quad (\text{III.26})$$

$$A_i^a \rightarrow -\varepsilon_{ain} r_n B(m, \lambda), \quad (\text{III.27})$$

$$\varphi_a \rightarrow C(m, \lambda) r_a, \quad (\text{III.28})$$

ahol B és C állandók. A kis r -értékeknél egyik függvény sem szinguláris: φ_a és A_i^a eltűnik, míg

$$V(\varphi) \rightarrow \frac{m^4}{4\lambda},$$

$$F_{ij}^a \rightarrow \varepsilon_{aij} 2\beta.$$

A 't Hooft—Polyakov monopólus megoldás átfogalmazható a (III.4) tiszta YM-elméletre is, amelyben $m^2 \neq 0$ és $\lambda \neq 0$. A (III.13) egyenlettel adjuk meg a szükséges kapcsolatot.

A (III.18—III.21)-es határfeltételek biztosítják, hogy kis és nagy r -ekre a θ_{00} -hoz véges járulék adódjon. Az energia funkcionált a következő egyenlet kiszámításával kapjuk:

$$\begin{aligned} \int d^3x \theta_{00} = \int d^3x L_{\text{tot}} = \frac{4\pi M_w}{e^2} \int_0^\infty dx \left\{ 2(h')^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{x^2} \left[(1-h^2)^2 + 2g^2h + (xg-g)^2 + \frac{\beta}{4}(g-x^2)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

ahol $x^2 = \varphi_0^2 e^2 r^2$ az M_w pedig a gyenge kölcsönhatásban szereplő vektor-bozon tömege. A (III.29) egy pozitív definit kifejezés, amelyből variációs módon leszármaztathatók a (III.16)-os mozgásegyenletek és ez a tény a nemszinguláris megoldások létezését sugallja.

A Prasad—Sommerfield [25] limeszben ($m^2=0$, $\lambda=0$, $m^2/\lambda < \infty$) a (III.15) megoldást kapjuk, amelynek az energiája:

$$\int d^3x \theta_{00} = \left(\frac{4\pi}{e^2} \right) M_w, \quad M_w = \beta, \quad (\text{III.30})$$

míg az m és λ nem nulla értékekre:

$$\int d^3x \theta_{00} = \left(\frac{4\pi}{e^2} \right) M_w C \left(\frac{\lambda}{e^2} \right), \quad M_w = \frac{em}{\lambda}, \quad (\text{III.31})$$

ahol e a csatolási állandó, a $C(\lambda/e^2)$ pedig az argumentumának lassan növekvő függvénye, ahol $C(0)=1$. Numerikusan kiszámítottak néhány értéket: $C(0,1)=1,1$ és $C(10)=1,44$ (11), $C(0,5)=1,118$ (21), valamint $C(\infty)=1,787$ (26). A monopólus tömegére kapott alsó korlát a (III.30)-ból $137 M_w$. Ezek szerint a monopólus tömege néhány ezer GeV kell legyen.

A 't Hooft—Polyakov megoldás fontossága miatt részletesebben is ismertetjük néhány tulajdonságát.

Elsősorban megmutatjuk, hogy miért interpretálható ez a megoldás monopólusként.

't Hooft [11] az elektromágneses térre keresett egy elfogadható definíciót a (III.1)-es elmélet kereteiben. Ez a definíció invariáns kell legyen az $SU(2)$ mértéktranszformációval szemben. A

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{\varphi} \varphi_a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{e} \frac{1}{\varphi^3} \varepsilon_{abc} \varphi_a \nabla_\mu \varphi_b \nabla_\nu \varphi_c \quad (\text{III.32})$$

tenzort az elektromágneses térrel azonosította. Ez a tenzor leírható sokkal áttekinthetőbb alakban is [27]:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - \frac{1}{e} \varepsilon_{abc} \hat{\varphi}_a \partial_\mu \hat{\varphi}_b \partial_\nu \hat{\varphi}_c, \quad (\text{III.33})$$

ahol:

$$W_\mu \equiv \varphi_a A_\mu^a, \quad \hat{\varphi}_a \equiv \frac{\varphi_a}{\varphi}.$$

A W_μ az A_μ^a tömeg nélküli komponense. A (III.14)-es Ansatzra a $W_\mu = 0$ és a $\hat{r}_a = \hat{\varphi}_a$, és így

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{0i} &= 0 \\ \mathcal{F}_{ij} &= -\frac{1}{e} \varepsilon_{abc} \hat{r}_a \partial_i \hat{r}_b \partial_j \hat{r}_c = -\frac{1}{e} \varepsilon_{ijk} \frac{r_k}{r^3}. \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

A (III.34) a nyugalomban levő, pontszerű mágneses monopólus elektromágneses tere, ahol a

$$g = \frac{1}{e},$$

a mágneses töltés. A Dirac-féle (35) kvantálási eljárással a minimális mágneses töltésre a következő értéket kapjuk:

$$g = \frac{1}{2e},$$

ahol az e az egységnyi elektromos töltés.

A megoldás topológiailag stabilnak tűnik a következő megfontolások miatt. A $\varphi_a(r \rightarrow \infty) = \hat{r}_a m/\sqrt{\lambda}$ nem más, mint a végtelenben levő gömb leképezése az $SU(2)$ -ben levő egységgömbre. Ez a leképezés az egységgömböt egyszer fedi le, tehát a csavarodási szám $n=1$. Mivel nem létezik olyan folytonos művelet, amely megváltoztathatja az n -t, az egyedüli lehetőség az $n=1$ értékről az $n=0$ értékre való diszkrét átmenet. Az ilyen művelet bizonyos értelemben végtelen energiát követel. Ezek szerint az n nem változhat a rendszer normális időfejlődésében. A topológikus töltés tehát megmaradó mennyiség. A mi esetünkben ez azt jelenti, hogy az $n=1$ monopólus töltés megmarad és így ezzel a töltéssel rendelkező megoldás stabil.

IV. STATIKUS, TENGELYSZIMMETRIKUS BPS MEGOLDÁSOKAT LEÍRÓ EGYENLETEK

Eddig még senkinek sem sikerült olyan megoldást találnia, amely $1/e$ -nél nagyobb mágneses töltésű monopólust ír le. Vannak olyan tételek, amelyek azt bizonyítják, hogy az ilyen megoldások nem léteznek a gömbszimmetrikus Ansatzok esetében. E nehézségek elkerülése érdekében tett kísérletek mindmáig eredménytelenek voltak [pl. 14].

Ezek a tételek semmit sem mondanak a különböző helyeken levő többmonopólusos megoldásokról, mert azok térkonfigurációi nem forgásszimmetrikusak. Több mo-

nopólusos megoldásokra irányuló kísérletet tett Lohe is 1978-ban [28]. Ő az $SU(2)$ mértékelmélet (III.1) BPS (Bogomol'ny—Prasad—Sommerfield) limeszre ($m^2=0$, $\lambda=0$ és $m^2(\lambda=\text{véges})$) kapott egy hárommonopólusos megoldást. Ez a limesz alapvető a számításokban, mivel azok magukban foglalják a tiszta $SU(2)$ -ben az önduális megoldásokra ismert Bäcklund-transzformációt. A BPS statikus monopólus megoldás úgy értelmezhető, mint egy önduális megoldás a háromdimenziós euklidészi térben. A Bäcklund transzformáció segítségével lehetséges a többmonopólusos megoldások generálása az eredeti egymonopólusos megoldásból.

Lohe a 't Hooft—Polyakov monopólus megoldást először áttaszformálta a Yang-féle R mértékbe [12], majd kétszer alkalmazta a Corrigan, Fairlie, Yates és Goddard-féle [29] Bäcklund transzformációt, és így egy valós hárommonopólusos megoldást kapott. Többmonopólusos megoldások pedig az eljárás ismétlésével kaphatók.

A Lohe-féle hárommonopólusos megoldás sajnos olyannyira bonyolult, hogy nem tudta megállapítani a monopólusok elhelyezkedését, csak annyit, hogy a z -tengeyen vannak és ezenkívül ez a megoldás végtelen energiájú.

Mi itt általánosabb tengelyszimmetrikus Ansatzot keresünk a Yang-féle R mértékben [12].

Egy $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ sima teret és egy forrásmentes, önduális $SU(2)$ mértékteret vizsgálunk. A mértékterek öndualitása biztosítja a mértékterek forrásmentességét, mert:

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_a^{\alpha\beta} = \pm F_{\mu\nu}^a,$$

$$\nabla_\mu \tilde{F}_{\mu\nu}^a = \pm \nabla_\mu F_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\mu F_a^{\alpha\beta}.$$

Az egyenlet jobboldali tagja a

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\mu F_a^{\alpha\beta} \equiv 0.$$

Bianchi-azonosság miatt nullával egyenlő, tehát

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu}^a = 0.$$

Meg fogjuk mutatni, hogy a tér öndualitási egyenlete egyszerűen integrálható és három ismeretlen függvénnyel rendelkező Laplace-féle egyenleteket eredményez. Az itt ismertetett tárgyalás kizárólag lokális esetre érvényes.

A már említett A_μ^a önduális mértékpotenciállal a következőképpen írható a térerősség

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a - \varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (\text{IV.1})$$

A következő jelölés bevezetésével $X_a = -i \frac{\tau_a}{2}$, $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a X_a$ és $A_\mu = A_\mu^a X_a$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu - [A_\mu, A_\nu]. \quad (\text{IV.2})$$

Az A_μ^a potenciált kiterjesztjük komplex tér esetére is, ahol az x_1, x_2, x_3 és x_4 koordináták komplexek.

Az ismert (III.7) öndualitási feltétel érvényes a komplex tér azon részében, ahol az x -ek valósak. Négy új komplex változót is bevezetünk, az y , \bar{y} , z és \bar{z} -t, amelyeket

$$\sqrt{2}y = x_1 + ix_2, \quad \sqrt{2}\bar{y} = x_1 - ix_2 \quad (\text{IV.3})$$

$$\sqrt{2}z = x_3 - ix_4, \quad \sqrt{2}\bar{z} = x_3 + ix_4$$

alakban definiálunk.

Az $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (y, \bar{y}, z, \bar{z})$ transzformáció Jacobi-mátrixa egyenlő eggyel. Az új változók metrikája a következő el nem tűnő elemekkel rendelkezik:

$$g_{y\bar{y}} = g_{\bar{y}y} = g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = 1.$$

Az öndualitási feltételek a következő alakra redukálódnak:

$$F_{yz} = F_{y\bar{z}} = 0, \quad (\text{IV.4})$$

$$F_{y\bar{y}} = F_{z\bar{z}} = 0. \quad (\text{IV.5})$$

A (IV.4)-es egyenlet arra utal, hogy rögzített \bar{y} és \bar{z} esetre az A_y^a és az A_z^a egy térnélküli mértékpotenciált alkotnak az y, z kétdimenziós komplex térben. Ebben a térben a nem integrálható fázistényező [30] integrálhatóvá válik, tehát:

$$D_{QP} = (1 + A_y dy + A_z dz)_Q \dots (1 + A_y dy + A_z dz) \quad (\text{IV.6})$$

független a P -ből Q -ba vezető úttól és csak a Q, P végpontoktól függ. Ha a Q -t rögzítjük és P y és z koordinátái szerint differenciálunk, a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} A_y &= D^{-1} D_y, \\ A_z &= D^{-1} D_z, \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

ahol $D_y = \partial_y D$ és $D_z = \partial_z D$. Hasonlóan

$$\begin{aligned} A_{\bar{y}} &= \bar{D}^{-1} \bar{D}_{\bar{y}}, \\ A_{\bar{z}} &= \bar{D}^{-1} \bar{D}_{\bar{z}}, \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

D eleget tesz a:

$$\det D = 1 \quad (\text{IV.9})$$

feltételnek. \bar{D} mindig megválasztható úgy, hogy:

$$\bar{D} \doteq (D^+)^{-1}, \quad (\text{IV.10})$$

mert $A_\mu^a = \text{valós}$. Az (\doteq) jelölés csak az x_1, x_2, x_3 és x_4 valós értékeire érvényes, míg $(=)$ az összes komplex x_i értékekre.

Így tehát az összes öndualis mértékterekre, az összes előre megválasztott mértékek esetére két D és \bar{D} mátrix létezik, amelyek az y, \bar{y}, z és \bar{z} függvényei és a (IV.7—IV.10) feltételeken kívül még a (IV.5) feltételt is kielégítik. Ezek a feltételek együttesen biztosítják a tér öndualitását. A D mátrixokból kiindulva kiszámítható az összes mértékpotenciál.

A mértéktranszformáción a következő transzformációt értjük:

$$D \rightarrow DG, \quad \bar{D} \rightarrow \bar{D}G, \quad (\text{IV.11})$$

ahol a $G(y, \bar{y}, z, \bar{z})$ egy 2×2 -es mátrix, amelynek determinánsa egy, és kielégíti a következő egyenletet:

$$G^+ G \doteq \text{egység mátrix.} \quad (\text{IV.12})$$

Ez a transzformáció a (IV.10)-et változtatlanul hagyja, az F -eket viszont a következőképpen transzformálja:

$$\begin{aligned} F_{y\bar{y}} &\rightarrow G^{-1} F_{y\bar{y}} G, \\ F_{z\bar{z}} &\rightarrow G^{-1} F_{z\bar{z}} G, \dots \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

Bármelyik D mátrixot alsó háromszögmátrix alakra lehet hozni egy unitér transzformációval:

$$D = R G^{-1}, \quad (\text{IV.14})$$

ahol R alsó háromszögmátrix, G pedig az említett unitér $SU(2)$ mátrix.

Ha az R -et a következőképpen definiáljuk:

$$R \doteq [1 + \varphi + \varrho(\tau_1 - i\tau_2) + (1 - \varphi)\tau_3] \frac{1}{\sqrt{2}\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varrho & \varphi \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.15})$$

akkor

$$R R^+ \doteq K^2, \quad (\text{IV.16})$$

ahol K egy hermetikus mátrix.

A (IV.16)-os egyenlet annyit jelent, hogy $K^{-1}R$ unitér, a valós térben. Mindig elvégezhető tehát egy mértéktranszformáció, amely a D mátrixot egyenlővé teszi az R mátrixszal, amelyet viszont a (IV.15)-ös egyenlet definiál. Az eredő mértéket Yang-féle R mértéknek hívjuk [12].

Az R mértékben közvetlenül megkapható, hogy a potenciálok a következő egyenletekkel adóttak:

$$\varphi \vec{A}_y = (i\varrho_y, \varrho_y, -i\varphi_y), \quad \varphi \vec{A}_{\bar{y}} = (-i\bar{\varrho}_{\bar{y}}, \bar{\varrho}_{\bar{y}}, i\varphi_{\bar{y}}), \quad (\text{IV.17})$$

$$\varphi \vec{A}_z(i\varrho_z, \varrho_z, -i\varphi_z), \quad \varphi \vec{A}_{\bar{z}}(-i\bar{\varrho}_{\bar{z}}, \bar{\varrho}_{\bar{z}}, i\varphi_{\bar{z}}),$$

ahol

$$\varphi = \text{valós}, \quad \bar{\varrho} = \varrho^*. \quad (\text{IV.18})$$

Ezen egyenletek (IV.5)-be való behelyettesítése és átrendezése adja a

$$\begin{aligned} \varphi[\varphi_{y\bar{y}} + \varphi_{z\bar{z}}] - \varphi_y \varphi_{\bar{y}} - \varphi_z \varphi_{\bar{z}} + \varrho_y \bar{\varrho}_{\bar{y}} + \varrho_z \bar{\varrho}_{\bar{z}} &= 0, \\ \varphi[\varrho_{y\bar{y}} + \varrho_{z\bar{z}}] - 2\varrho_y \varphi_{\bar{y}} - 2\varrho_z \varphi_{\bar{z}} &= 0, \\ \varphi[\bar{\varrho}_{y\bar{y}} + \bar{\varrho}_{z\bar{z}}] - 2\bar{\varrho}_{\bar{y}} \varphi_y - 2\bar{\varrho}_{\bar{z}} \varphi_z &= 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

téregyenleteket.

Az összes R mértékben levő önduális terek kifejezhetők a (IV.17)-tel, amelyekben a ϱ , $\bar{\varrho}$ és a φ kielégítik a (IV.18)-at és a (IV.19)-et. A (IV.18) és a (IV.19) viszont garantálja, hogy a (IV.17)-tel megadott A_μ mértékpotenciálok önduálisak.

Ha a φ -t és ϱ -t a következőképpen definiáljuk:

$$\varphi = r\Phi(x_3, r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (\text{IV.20})$$

$$\varrho = \sqrt{2}\bar{y}g(x_1, r), \quad (\text{IV.21})$$

ahol Φ valós, g pedig komplex függvény, a (IV.19) egyenletek ekkor a következő egyenletekbe mennek át:

$$\begin{aligned}\Phi \left(\Phi_{00} + \Phi_{11} + \frac{1}{r} \Phi_1 \right) - \Phi_0^2 - \Phi_1^2 + g_0 \bar{g}_0 + g_1 \bar{g}_1 &= 0, \\ \Phi \left(g_{00} + g_{11} + \frac{1}{r} g_1 \right) - 2g_0 \Phi_0 - 2g_1 \Phi_1 &= 0, \\ \Phi \left(\bar{g}_{00} + \bar{g}_{11} + \frac{1}{r} \bar{g}_1 \right) - 2\bar{g}_0 \Phi_0 - 2\bar{g}_1 \Phi_1 &= 0,\end{aligned}\tag{IV.22}$$

ahol $\Phi_0 = \partial \Phi / \partial x_3$, $\Phi_1 = \partial \Phi / \partial r$ és ugyanígy g -re is.

Ezek az egyenletek ekvivalensek az általános relativitáselméletből közismert Ernst-egyenletek (13) általánosított alakjával. Ha a g függvényt valósnak vesszük, akkor ezek az egyenletek egzaktul az Ernst-egyenletekre redukálódnak, amelyek pedig az Einstein-egyenletek stacionárius tengelyszimmetrikus megoldásait írják le vákuumban.

Most megmutatjuk, hogy a Manton—Ansatz a g =valós speciális esetnek felel meg.

Manton szerkesztett egy tengelyszimmetrikus Ansatzot, amely leírhat egy tengelyen fekvő monopólusokat. A megközelítés hasonló a Witten-féle [17] több instanton megoldásra leírt Ansatzhoz. A Witten-féle Ansatz a térben gömbszimmetrikus az időtől tetszőlegesen függő térkonfigurációt ír le, minket pedig egy statikus, x_3 tengelyszimmetrikus x_3 -tól önkényesen függő térkonfiguráció érdekel.

Bevezethető a következő egységvektor hármas az izovektor térben:

$$U = \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, 0 \right),$$

$$V = \left(-\frac{x_2}{r}, \frac{x_1}{r}, 0 \right),$$

$$W = (0, 0, 1),$$

amelyek kielégítik a következő feltételeket:

$$\vec{U} \times \vec{V} = \vec{W}, \vec{V} \times \vec{W} = \vec{U}, \vec{W} \times \vec{U} = \vec{V},\tag{IV.23}$$

$$\partial_{x_1} \vec{U} = -\frac{x_2}{r^2} \vec{V}, \partial_{x_2} \vec{U} = \frac{x_1}{r^2} \vec{V},\tag{IV.24}$$

$$\partial_{x_1} \vec{V} = \frac{x_2}{r^2} \vec{U}, \partial_{x_2} \vec{V} = -\frac{x_1}{r^2} \vec{U}.\tag{IV.25}$$

Az összes többi első derivált eltűnik, és az Ansatzot a következő alakban írjuk:

$$A_{x_1} = W_1 \frac{x_1}{r} \vec{V} + \eta_1 \frac{x_2}{r^2} \vec{U} + (\eta_2 - 1) \frac{x_2}{r^2} \vec{W}, \quad (\text{IV.26})$$

$$A_{x_2} = W_2 \frac{x_2}{r} \vec{V} - \eta_1 \frac{x_1}{r^2} \vec{U} - (\eta_2 - 1) \frac{x_1}{r^2} \vec{W}, \quad (\text{IV.27})$$

$$A_{x_3} = W_0 \vec{V}, \quad (\text{IV.28})$$

$$\varphi = \varphi_1 \vec{U} + \varphi_2 \vec{W}. \quad (\text{IV.29})$$

Az η_1 , η_2 , φ_1 , φ_2 , W_0 és a W_1 csak az r -től és x_3 -tól függenek, ahol az r

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

A mértéktranszformációk

$$U(x) = e^{if(r, x_3) \vec{v} \vec{T}}, \quad (\text{IV.30})$$

ahol T -k az $SU(2)$ csoport generátorai egy abeli alcsoportot alkotnak, amely megőrzi az Ansatz struktúráját.

A térerősségek és kovariáns deriváltak közvetlen számításból adódnak:

$$F_{x_2 x_3} = (\partial_0 \eta_1 - W_0 \eta_2) \frac{x_1}{r^2} \vec{U} + (\partial_1 W_0 - \partial_0 W_1) \frac{x_2}{r} \vec{V} + (\partial_0 \eta_2 + W_0 \eta_1) \frac{x_1}{r^2} \vec{W}, \quad (\text{IV.31})$$

$$F_{x_2 x_1} = (\partial_1 \eta_1 - W_1 \eta_2) \frac{1}{r} \vec{U} + (\partial_1 \eta_2 + W_1 \eta_1) \frac{1}{r} \vec{W}, \quad (\text{IV.32})$$

$$\nabla_{x_1} \varphi = (\partial_1 \varphi_1 - W_1 \varphi_2) \frac{x_1}{r^2} \vec{U} + (\eta_1 \varphi_2 - \eta_2 \varphi_1) \frac{x_2}{r^2} \vec{V} + (\partial_1 \varphi_2 + W_1 \varphi_1) \vec{W}, \quad (\text{IV.33})$$

$$\nabla_{x_3} \varphi = (\partial_0 \varphi_1 - W_0 \varphi_2) \vec{U} + (\partial_0 \varphi_2 + W_0 \varphi_1) \vec{W}, \quad (\text{IV.34})$$

ahol $\partial_0 = \partial/\partial x_3$, $\partial_1 = \partial/\partial r$. Az $F_{x_3 x_1}$ és a $\nabla_{x_2} \varphi$ az $F_{x_2 x_3}$ és a $\nabla_{x_1} \varphi$ -ből kaphatók az x_2 , $-x_1$ behelyettesítésével az x_1 , x_2 helyére. A Bogomol'ny egyenlet

$$F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \nabla_k \varphi$$

segítségével a következő téregyenleteket kapjuk

$$\partial_1 \varphi_1 - W_1 \varphi_2 = -\frac{1}{r} (\partial_0 \eta_1 - W_0 \eta_2), \quad (\text{IV.35})$$

$$\partial_1 \varphi_2 + W_1 \varphi_1 = -\frac{1}{r} (\partial_0 \eta_2 + W_0 \eta_1), \quad (\text{IV.36})$$

$$\partial_0 \varphi_1 - W_0 \varphi_2 = \frac{1}{r} (\partial_1 \eta_1 - W_1 \eta_2), \quad (\text{IV.37})$$

$$\partial_0 \varphi_2 + W_0 \varphi_1 = \frac{1}{r} (\partial_1 \eta_2 + W_1 \eta_1), \quad (\text{IV.38})$$

$$\partial_1 W_0 - \partial_0 W_1 = \frac{1}{r} (\varphi_1 \eta_2 - \varphi_2 \eta_1). \quad (\text{IV.39})$$

Ha a Yang által definiált (IV.17) R mértékbeli vektorkomponensekre elvégezzük a $(y, \bar{y}, z, \bar{z}) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$ transzformációt, majd behelyettesítjük a (IV.20—IV.21) függvényeket, akkor megkapjuk a (IV.26—IV.29) Manton—Ansatzot valós g -függvényre. Ha viszont a Manton által, a Bogomol'ny feltétel alkalmazása után kapott (IV.35—IV.39) egyenletekbe behelyettesítjük a következő függvényeket:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{g_{x_3}}{\Phi}, \quad \varphi_2 = \frac{\Phi_{x_3}}{\Phi}, \\ \eta_1 &= -r \frac{g_r}{\Phi}, \quad \eta_2 = \frac{g_r}{\Phi}, \\ W_0 &= -\frac{g_{x_3}}{\Phi}, \quad W_1 = -\frac{g_r}{\Phi},\end{aligned}\tag{IV.40}$$

akkor a (IV.35—IV.37) egyenleteket kielégítik az említett függvények, az utolsó két egyenletből pedig megkapjuk az Ernst-egyenleteket valós g -re. Ebből látható, hogy a Manton—Ansatz ekvivalens az Ernst-egyenletekkel.

Visszatérve az általános esetre, megjegyezzük, hogy a (IV.22) téregyenletek levezethetők a következő Lagrange-függvényből

$$L = \frac{\Phi_0^2 + \Phi_1^2 + g_0 \bar{g}_0 + g_1 \bar{g}_1}{\Phi^2} r.\tag{IV.41}$$

Ez a Lagrange-függvény definiálja a modellt.

Tovább vizsgáljuk a (IV.22) egyenleteinket, amelyeket most divergencia alakban írunk le:

$$\partial_1 \left(\frac{r g_1}{\Phi^2} \right) + \partial_0 \left(\frac{r g_0}{\Phi^2} \right) = 0,\tag{IV.42}$$

$$\partial_1 \left(r \frac{\Phi_1}{\Phi} + r \frac{g_1 \bar{g}}{\Phi^2} \right) + \partial_0 \left(r \frac{\Phi_0}{\Phi} - r \frac{g_0 \bar{g}}{\Phi^2} \right) = 0.\tag{IV.43}$$

A g -nek és \bar{g} -nak teljesíteni kell a következő egyenleteket

$$\partial_0 g_1 - \partial_1 g_0 = 0,\tag{IV.44}$$

$$\partial_0 \bar{g}_1 - \partial_1 \bar{g}_0 = 0,$$

akkor a (IV.42)-nek a következőképpen definiált egyértelmű megoldásairól

$$\omega_1 = \frac{r}{\Phi^2} g_0, \quad \omega_0 = -\frac{r}{\Phi^2} g_1\tag{IV.45}$$

könnyen belátható, hogy (IV.42—IV.43) egyenletekbe helyettesítve kielégítik a következő egyenleteket:

$$\Phi \left(\Phi_{00} + \Phi_{11} + \frac{1}{r} \Phi_1 \right) - \Phi_0^2 - \Phi_1^2 + \frac{\omega_0 \bar{\omega}_0 \Phi^4}{r^2} + \frac{\omega_1 \bar{\omega}_1 \Phi^4}{r^2} = 0, \quad (\text{IV.46})$$

$$\Phi \left(\omega_{00} + \omega_{11} - \frac{1}{r} \omega_1 \right) + 2\omega_0 \Phi_0 + 2\omega_1 \Phi_1 = 0, \quad (\text{IV.47})$$

$$\Phi \left(\bar{\omega}_{00} + \bar{\omega}_{11} - \frac{1}{r} \bar{\omega}_1 \right) + 2\bar{\omega}_0 \Phi_0 + 2\bar{\omega}_1 \Phi_1 = 0. \quad (\text{IV.48})$$

A (IV.45) függvények adott módon való bevezetésének az a haszna, hogy segítségével ismét új függvényeket vezethetünk be

$$\Phi' = \frac{r}{\Phi}, \quad g' = i\omega, \quad \bar{g}' = i\bar{\omega},$$

melyek ismét kielégítik a (IV.22)-es egyenleteket. Ez azt jelenti, hogy a vesszős függvények is megoldásai a kérdéses egyenleteknek. E transzformáció segítségével tehát új megoldások generálhatók. Az irodalomban *Corrigan*, *Fairlie*, *Yates* és *Goddard*-féle [29] Bäcklund transzformáció néven ismert. A Bäcklund transzformáció különben egy meghatározott nemlineáris parciális differenciálegyenlet ismert megoldásából újabbakat generál.

A mi esetünkben alkalmazott transzformáció általánosabb a [31]-ben ismertetett esetről, mivel bebizonyítottuk a létezését komplex g függvény esetében is. Ezeket a transzformációkat a következőkben I -vel fogjuk jelölni.

E típusú transzformációkon kívül a megoldásokra találhatók még más típusúak is. Újabb megoldások generálhatók a következőképpen

$$\Phi' = \frac{\Phi}{\Phi^2 + g\bar{g}}, \quad g' = \frac{-\bar{g}}{\Phi^2 + g\bar{g}}, \quad \bar{g}' = \frac{-g}{\Phi^2 + g\bar{g}}, \quad (\text{IV.49})$$

valamint

$$\Phi' = c\Phi, \quad g' = ce^{i\alpha}g, \quad \bar{g}' = ce^{-i\alpha}\bar{g}, \quad (\text{IV.50})$$

ahol a c valós, és a:

$$\Phi' = \Phi, \quad g' = g + d, \quad \bar{g}' = \bar{g} + \bar{d}. \quad (\text{IV.51})$$

Ezek a transzformációk elemei egy hat valós vagy három komplexparaméteres G csoportnak, amely $SL(2, \mathbb{C})$ néven ismert és az $SO(3,1)$ Lorentz-csoportnak felel meg. A fent leírt (IV.49) képletben hiányzik egy komplex paraméter, amelyet bonyolultsága miatt nem írunk le és a későbbiekben ehelyett megmutatjuk, hogyan lehet egyszerűbben felírni ezeket a transzformációkat.

Ami meglepő, az az, hogy a (IV.22)-es egyenlet újabb megoldásai generálhatók az I és a $h \in G$ transzformációk kombinált elvégzésével. Ha az adott függvényen elvégezzük egyszer az I transzformációt, akkor komplex megoldást kapunk, ha viszont ezt kétszer tesszük meg, akkor visszatérünk a kiindulópontba, tehát

$$II = \mathbb{1}.$$

Ha $h \in G$, akkor ha h -val hatunk a függvényre a (IV.49—IV.50) szerint új megoldás adódik, ha viszont IhI -vel hatunk, újabb megoldásokat kapunk.

Fontos megjegyezni, hogy egy IhI alakú transzformáció hatása sohasem vihető vissza a kiindulópontba egy G csoportbeli elemmel. Így látható, hogy az I és a G csoport elemeivel definiált transzformációk nem kommutálnak egymással.

A transzformációkat a következőképpen írjuk:

$$\begin{array}{ccccccc} & & h & & & & \\ & & I & h & I & & \\ I & h & I & h' & I & & \\ I & h & I & h' & I & h'' & I \end{array} \quad (IV.52)$$

és fontos megemlíteni, hogy a páratlan számú I alkalmazása mindig átvisz komplex megoldásokba. Ez így végtelenül folytatható és mivel minden új h elem hat paramétert visz be, az így kapott csoport (az I és a h kombinációja) végtelen paraméteres. A (IV.52)-es képletben minden sor a kombinált-csoport egy elemét ábrázolja.

A kombinált csoport alcsoportjai a következőképpen írhatók:

$$\begin{array}{ccccccc} & & G & & & & \\ & & I & G & I & & \\ I & G & I & G & I & & \\ I & G & I & G & I & G & I. \end{array} \quad (IV.53)$$

A csoportot K -val fogjuk jelölni s ez az ún. Geroch-csoport [15] általánosítása esetünk-re. A (IV.53) minden sora e csoport egy alcsoportját képezi. A K -csoport bevezetésére azért van szükség, mert a (IV.52) módon leírt alcsoportok nem tartalmazzák a K összes elemét. Ennek érzékeltetése jobban áttekinthető az $SO(3)$ csoporton. Ebben az esetben a csoport a három (x, y, z) tengely körüli forgatásokon kívül tartalmaz még olyan elemeket is, amelyek az elforgatást bármilyen tetszőleges tengely körül végzik, tehát nem csak e három tengelykörüli forgatást generáló elemek léteznek, hanem olyanok is, amelyeket bizonyos mértékben mind a három tengelykörüli forgatást előidéző alcsoport magában foglal.

Ugyanez vonatkozik a K csoportra is, tehát léteznek olyan h elemek, amelyeket egy bizonyos értelemben a (IV.53)-mal leírt csoport minden alcsoportja tartalmaz.

A K csoport végtelen számú paramétere miatt a helyzet nagyon bonyolult. Az általunk választott Φ és g függvényekre ható (IV.52)-es elemek által generált transzformációk nem a legjobb tulajdonságokkal rendelkeznek, és éppen azon elemek látszanak legmegfelelőbbnek, amelyek nem a „végtelen dimenziójú tér adott tengelyei” körüli elforgatást jelentik, hanem az „önkéntesen választott tengelyek” körülieket. Erre az esetre infinitezimális transzformációk már adottak egy választott függvénybázisra (32), de véges transzformációk esetére ez eddig csak speciális esetekben ismert, valós g függvények esetére (Ernst-egyenletek). A csoport végtelen számú paraméteres volta a generátorok integrálását a jelen pillanatig, a bonyolultsága miatt, nehezé teszi.

Az egyenletek σ -modell reprezentációja

Ebben a pontban viszont megmutatjuk, hogy az $SL(2, \mathbb{C})$ csoportbeli bonyolult transzformáció helyett bevezethető az $SO(3, 1)$ csoport, amely segítségével sokkal egyszerűbb módon jutunk eredményre.

Ha a (IV.41) Lagrange-függvényben elvégezzük a következő helyettesítést:

$$\Phi = \frac{1}{\sigma_4 + \sigma_1}, \quad g = \frac{\sigma_2 + i\sigma_3}{\sigma_4 + \sigma_1}, \quad \bar{g} = \frac{\sigma_2 - i\sigma_3}{\sigma_4 + \sigma_1}, \quad (IV.54)$$

ahol a σ tagok kielégítik a következő mellékfeltételt:

$$\sigma_4^2 - \sigma_3^2 - \sigma_2^2 - \sigma_1^2 = 1, \quad (IV.55)$$

akkor a következő Lagrange-függvényt kapjuk:

$$r^{-1}L = (\nabla\sigma_4)^2 - (\nabla\sigma_3)^2 - (\nabla\sigma_2)^2 - (\nabla\sigma_1)^2. \quad (IV.56)$$

Ezek a σ -k négyesvektorként is értelmezhetők:

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{pmatrix},$$

így tehát, ha elvégzünk egy $SO(3, 1)$ transzformációt, akkor belátható, hogy a σ_i értékek behelyettesítésével a (IV.56) Lagrange-függvény invariáns marad. Éppen ez az $SO(3, 1)$ csoport, amelynek hatását a Φ és a g függvényekre az előző pontban már felírtuk. Belátható tehát, hogy a bonyolult hatparaméteres $SL(2, \mathbb{C})$ csoport elemeivel adott transzformáció a (IV.54)-ben adott függvényeken jóval egyszerűbb módon elvégezhető.

A (IV.56)-tal leírt Lagrange-függvény a (IV.55) mellékfeltétellel egy a térelméletben ismert nemlineáris $SO(3, 1)$ σ -modellt definiál.

A σ -modellek esetében ismert módszerekkel keressük a téregyenleteket. Ez a következőképpen végezendő:

A Lagrange-függvény variálásánál nem az általános, hanem a (IV.55)-ben kirótt mellékfeltétel esetére keressük a szélső értéket. Ekkor a hatást a következő alakban írjuk

$$S = \int dx_3 \int r dr [L + \lambda(x_3, r)(\sigma_4^2 - \sigma_3^2 - \sigma_2^2 - \sigma_1^2 - 1)], \quad (IV.57)$$

ahol λ az x_3 és az r tetszőleges függvénye és Lagrange-multiplikátornak hívjuk. A (IV.57)-re a következő téregyenleteket kapjuk:

$$\Delta\sigma_i = \lambda(x_3, r)\sigma_i, \quad (IV.58)$$

ahol Δ a hengerkoordinátákban értelmezett Laplace-operátor. A (IV.58)-ban kapott téregyenletek megoldásaiból kitűnik, hogy a $\lambda(x_3, r)$ függvény egyenlő a Lagrange-függvénnyel, ha a σ -k kielégítik a (IV.55)-ös mellékfeltételt.

A kétdimenziós nemlineáris σ -modell sok olyan tulajdonsággal rendelkezik, amelyek megtalálhatók a négydimenziós nem abeli mértékelméletben. Mind a kettő skála-

invariáns és aszimptotikusan szabad, valamint gazdag topológiai szerkezetük miatt topológiailag nemtriviális megoldásokat tartalmaznak (pl. többinstanton megoldás).

A kétdimenziós σ -modell viszont sokkal egyszerűbb, mint a négydimenziós Yang—Mills elméletek, és ezért ez a modell ideálisnak tűnik a négydimenziós mérték-elméletekben topológiailag nemtriviális megoldásoknak tulajdonított effektusok megvizsgálására.

A klasszikus kétdimenziós nemlineáris σ -modellek végtelen sok megmaradó mennyiséggel rendelkeznek. Ezek felhasználásával némelyikük kvantumtérelmélete nemperturbatív módon teljesen meghatározható.

A végtelen sok megmaradó mennyiség létezésének bebizonyításában lényeges szerepet játszott, hogy a klasszikus téregyenleteket integrálni lehetett az ún. inverz szórás módszerrel. Ez az inverz szórás módszer általában kapcsolatba hozható bizonyos Bäcklund-transzformációk létezésével.

Általában a σ -modellekben a kényszer az összes komponens ugyanazon előjellel tartalmazza, míg esetünkben a (IV.55)-ben az előjelek különbözőek annak megfelelően, hogy a σ -tér a nem kompakt $SL(2, \mathbb{C})$ csoport elemével azonosítható.

A g , \bar{g} és Φ segítségével definiálunk egy $SL(2, \mathbb{C})$ mátrixot a következő módon:

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Phi}, & \frac{g}{\Phi} \\ \frac{\bar{g}}{\Phi}, & \Phi + \frac{g\bar{g}}{\Phi} \end{pmatrix}, \quad (IV.59)$$

ahol

$$\det g = 1.$$

A (IV.54) megfeleltetésekkel a g -mátrix kifejezhető a σ -tér komponensei segítségével:

$$g = \begin{pmatrix} \sigma_4 + \sigma_1, & \sigma_2 + i\sigma_3 \\ \sigma_2 - i\sigma_3, & \sigma_4 - \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad (IV.60)$$

amelyben a $\det g = 1$ feltétel természetes módon a (IV.55) mellékfeltétel teljesítését jelenti.

Érdemes észrevenni, hogy a g -mátrix a (IV.7—IV.10)-ben definiált D és D^+ mátrixokból a következőképpen származtatható:

$$DD^+ = g \quad (IV.61)$$

és, hogy ez a mátrix a (IV.11—IV.12) mértéktranszformációra invariáns.

Közvetlen behelyettesítéssel bebizonyítottuk, hogy a (IV.22)-es téregyenletek a g -mátrix nyelvén a következő alakot öltik:

$$(rg^{-1}g_0)_0 + (rg^{-1}g_1)_1 = 0. \quad (IV.62)$$

Az önduális egyenleteknek ez az alakja a σ -modellekkel talált kapcsolat miatt nem meglepő módon megegyezik a σ -modellek téregyenletének alakjával. Ennek felismerése lehetővé teszi a már említett inverz szórás módszer alkalmazását a Yang—Mills-elméletek öndualitási egyenleteire is (33).

A Φ és a (IV.45)-ben bevezetett ω , illetve $\bar{\omega}$ függvények segítségével is definiálhatunk egy másik mátrixot:

$$f = \begin{pmatrix} \Phi, & -\Phi\omega \\ -\Phi\omega, & -\frac{r^2}{\Phi} + \Phi\omega\bar{\omega} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.63})$$

amelyre fennáll:

$$\det f = -r^2.$$

Közvetlen behelyettesítéssel megmutatható, hogy a (IV.46—IV.48)-as egyenletek az f mátrixszal kifejezve így írhatók:

$$(rf^{-1}f_0)_0 + (rf^{-1}f_1)_1 = 0. \quad (\text{IV.64})$$

Ha az f mátrixból egy új \tilde{f} mátrixot definiálunk:

$$\tilde{f} = \frac{1}{r}f,$$

akkor

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi}{r}, & -\frac{\Phi\omega}{r} \\ -\frac{\Phi\omega}{r}, & -\frac{r}{\Phi} + \frac{\Phi\omega\bar{\omega}}{r} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.65})$$

amelynek determinánsa

$$\det \tilde{f} = -1.$$

E mátrix segítségével a (IV.64)-hez hasonló egyenlethez jutunk:

$$(r\tilde{f}^{-1}\tilde{f}_0) + (r\tilde{f}^{-1}\tilde{f}_1)_1 = 0. \quad (\text{IV.66})$$

Ha az \tilde{f} mátrix elemeit a következőképpen bontjuk fel

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} \psi_4 + \psi_1, & \psi_2 + i\psi_3 \\ \psi_2 - i\psi_3, & \psi_4 - \psi_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.67})$$

akkor ismét egy σ -modellt kapunk, melynek a ψ_i ($i=1, 2, 3, 4$)-ek a térváltozói lesznek, a **téregyenlet** pedig a (IV.66) alapján a (IV.58) lesz.

Vegyük észre, hogy az I transzformációt a g -mátrix elemeire alkalmazva az \tilde{f} -mátrixot kapjuk. Ez azt is jelenti, hogy az I transzformáció a két mátrixba beágyazott σ -modelleket is egymásba transzformálja.

Ahogy azt már előbb említettük, a σ -modellek mindegyike invariáns egy $\text{SO}(3,1)$ szimmetria csoportra. Jelöljük a σ -tereken ható $\text{SO}(3,1)$ csoportot $\text{SO}(3,1)_\sigma$ -val, a ψ tereken hatót pedig $\text{SO}(3,1)_\psi$ -vel. Minthogy a két σ -modellt az I transzformáció kapcsolja össze, hasonló reláció igaz a két $\text{SO}(3,1)_\sigma$ és $\text{SO}(3,1)_\psi$ csoportra is, amiért a két csoportot egymás duálisának hívjuk. Tehát:

$$\text{ISO}(3,1)_\sigma I = \text{SO}(3,1)_\psi, \quad (\text{IV.68})$$

valamint

$$\text{ISO}(3,1)_\psi I = \text{SO}(3,1)_\sigma.$$

A Geroch-csoporttal [15] fennálló analógia nyilvánvaló és ennek megfelelően a (IV.68) felhasználható új megoldások generálására.

Remélhető, hogy köztük megtalálható lesz a többmonopólusos megoldás is. Egy egzakt többmonopólus megoldás meg kell, hogy határozza a monopólusok közötti kölcsönhatásokat is. E tényezőt fontossága miatt már sokan vizsgálták, különböző közelítési módszerekkel. Világos, hogy két távoli monopólus vagy egy monopólus és egy antimonopólus esetében ezek között Coulomb-féle kölcsönhatás fog fellépni, mert a mágneses tér az egyetlen hosszútávolságú erő. Ezen az eseten kívül nagy jelentősége van *Magruder* [34] vizsgálatainak, amelyek kis távolságon levő monopólusok közötti kölcsönhatásra vonatkoznak. Ő határozta meg a tetszőleges távolságon levő két monopólus kölcsönhatás energiájának az alsó és felső korlátját. Eredményként azt kapta, hogy a kölcsönhatási energia véges marad, ha $R \rightarrow 0$. Két monopólus között tehát kölcsönös taszítás jön létre, amely növekszik, ha R csökken és a kölcsönhatási energia véges marad $R \rightarrow 0$ esetben. Egy monopólus és egy antimonopólus pedig egyszerűen annihilál.

Az $m^2 \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$ ($m^2/\lambda =$ véges) limeszben lényeges változás észlelhető a 't Hooft—Polyakov-monopólusok közti kölcsönhatásban. A Higgs-terek tömegnélküliek és a hozzájuk csatolt vonzóerők hosszú hatótávolságúakká válnak. Ezek az erők kölcsönösen kioltják egymást az egyforma töltések között ható taszító erővel, vagy felerősítik egymást különböző töltések között. A BPS megoldásokban kapott egyforma töltésű monopólusok között nem létezik Coulomb-kölcsönhatás.

A végső válasz természetesen csak akkor lesz pontosan megfogalmazható, ha találunk egzakt többmonopólus megoldást az említett limeszben.

V. ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozat második fejezetében ismertettük a mértékelméletek általános áttekintését, amelyben az általános fogalmak magyarázatára és bizonyítására említett példák a dolgozatunk önállóan kidolgozott részébe való bevezetést jelentik. A második részben részletesen ismertettük a mértékterek klasszikus megoldásaihoz tartozó monopólus megoldásokat, különösen hangsúlyozva a 't Hooft—Polyakov-féle monopólust.

Az egyetlen monopólus megoldást eddig a BPS határesetben kapták. Ebben a határesetben mind a vektor-, mind pedig a skalárrészecskék nulla tömegűek, így lehetővé válhat, hogy ez a két hosszú távolságú erő semlegesítse egymást. Az irodalomban már bebizonyították, hogy ez az erő két monopólus között a távolság minden hatványánál gyorsabban csökken. Ezért remélhető, hogy ez az erő egzaktul nulla, lehetővé téve statikus többmonopólus megoldás létezését. Ezt a kérdést eddig még nem sikerült eldönteni, így nagyon fontos az, hogy újabb megoldási módszereket találjunk a többmonopólust leíró egyenletekre.

Ebben a dolgozatban a statikus monopólusokat leíró Bogomol'ny-egyenleteket statikus tengelyszimmetrikus esetben vizsgáljuk.

Rámutatunk arra, hogy a Bogomol'ny-egyenletek ekvivalensek a statikus öndualitási egyenletekkel. Felhasználva ezen egyenletek R mértékbeli alakját, megmutatjuk milyen egyenletek írják le a legáltalánosabb tengelyszimmetrikus megoldást.

Továbbá felismerjük, hogy ezek az egyenletek lényegében az általános relativitáselméletből ismert Ernst-egyenletek komplex általánosításai. A Manton-féle tengely-

szimmetrikus Ansatz esetén éppen az Ernst-egyenletekre redukálódna. Így az Ernst-egyenletek sok tulajdonsága is általánosítható erre az esetre.

Megmutatjuk, hogy ezekre az egyenletekre is definiálható egy hasonló leképezés, mint az Ernst-egyenletek esetében a Neugebauer—Kramer-leképezés. Ennek fontos tulajdonsága az, hogy az egyenlet adott megoldásait újabbakba viszi át.

Ugyancsak bebizonyítottuk, hogy az egyenleteknek van egy $SL(2, \mathbb{C})$ invariancia csoportja, amely az Ernst-egyenletek $SL(2, \mathbb{R})$ Ehlers-transzformáció csoportjának felel meg. Ezen két transzformáció együttes hatása egy végtelen paraméteres csoportot generál, amely az ún. Geroch-csoport általánosítása esetünkre.

Ezen eredmények nagy fontosságúak, mivel ismeretükben remélhető, hogy az Ernst-egyenletekre megismert csoportelméleti módszerek is alkalmazhatók lesznek erre az egyenletre.

Bebizonyítottuk azt is, hogy ezek az egyenletek σ -modell alakban is felírhatók, ez a modell azonban egy nemkompakt $SO(3, 1)$ (Lorentz-csoport) csoportra invariáns. Ez azért fontos, mert az utóbbi időben több nagyon hatékony megoldási módszert dolgoztak ki, a σ -modellek egzakt megoldásainak előállítására. Ezek egyrészt az ún. inverz szórési módszerek, másrészt a Bäcklund-transzformációk. Biztos, hogy ezek a módszerek ezekre a modellekre is alkalmazhatók.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetem fejezem ki *dr. Nagy Károly* professzor úrnak, hogy az Elméleti Fizikai Tanszéken elkészíthettem a disszertációt. Az intézet ösztönző légköre állandó segítséget adott munkámhoz. Köszönetemet és hálámat fejezem ki *dr. Horváth Zalánnak* és *dr. Palla Lászlónak*, akik elindítottak a mértékelméletek klasszikus megoldásainak tanulmányozásában, munkámban végig irányítottak és támogattak.

Köszönettel tartozom *dr. Abonyi Ivánnak* hasznos tanácsaiért és a kézirat megfogalmazásában nyújtott segítségéért. Köszönetet mondok még *dr. Niedermayer Ferencnek* és *dr. Tél Tamásnak* több probléma tisztázásában adott segítségükért. Végül, de nem utolsósorban köszönettel tartozom *Mező Máriának* munkám gyors és gondos gépeléséért.

IRODALOM

1. C. N. Yang and R. Mills, Phys. Rev. 96, 191, 1954.
2. P. Higgs, Phys. Letts. 12, 132, 1964.
3. G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 35, 167, 1971.
4. S. L. Glashow, Nucl. Phys. B 12, 579, 1961.
5. S. Weinberg, Phys. Rev. Letts. 19, 1264, 1967.
6. A. Salam, Proc. VIIIth Nobel Symposium, ed. M. Ikeda and Y. Miyachi, Prog. Theor. Phys. 27, 474, 1962.
7. H. G. Loos, Nuc. Phys. 72, 677, 1965.
8. T. T. Wu, and C. N. Yang, 1968, in "Properties of Matter Under Unusual Conditions, edited by H. Mark and S. Fernbach (Interscience, New York).
9. R. P. Treat, Nuovo Cimento A 50, 871, 1967.
10. H. B. Nielson and P. Oleson, Nucl. Phys. B 61, 45, 1973.
11. G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 79, 276, 1974.
12. A. M. Polyakov, JETP-Lett. 20, 194 1974.
13. C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. 38, 1377, 1977.
14. F. J. Ernst, Phys. Rev. 169, 1175, 1968.
15. N. S. Manton, Nucl. Phys. B. 135, 319, 1978.
16. R. Geroch, J. Math. Phys. 12, 918, 1971, 13, 394, 1972.
17. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz and Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. B 59, 85, 1975.

17. *E. Witten*, Phys. Rev. Lett. 38, 121, 1977. *G. 't Hooft*, nyomtatásban nem jelent meg.
18. *V. de Alfaro*, *S. Fubini* and *G. Furlan*, Phys. Lett. B 65, 163, 1976.
19. *J. Glimm* and *A. Jaffe*, Phys. Lett. B 73, 167, 1978.
Y. Nambu and *G. Jona-Lasinia*, Phys. Rev. 122, 354, 1961.
Y. Nambu and *G. Jona-Lasinio*, Phys. Rev. 124, 246, 1961.
20. *J. Goldstone*, Nuovo Cimento 19, 15, 1961.
J. Goldstone, *A. Salam*, and *S. Weinberg*, Phys. Rev. 127, 965, 1962.
21. *B. Julia* and *A. Zee*, Phys. Rev. D 11, 2227, 1975.
22. *Yu. S. Tyupkin*, *V. A. Fateev* and *A. S. Schwartz* JETP-Lett. 21, 42, 1975.
23. *M. I. Monastyrskii* and *A. M. Perel'mov*, JETP-Lett. 21, 43, 1975.
24. *E. B. Bogol'ny*, Sov. J. Nucl. Phys. 24, 449, 1976.
25. *M. K. Prasad* and *C. M. Sommerfield*, Phys. Rev. Lett. 35, 760, 1975.
26. *E. B. Bogomol'ny* and *M. S. Marinov*, Sov. J. Nucl. Phys. 23, 355, 1976.
27. *J. Arafune*, *P. G. O. Freund* and *C. J. Goebel*, J. Math. Phys. 16, 433, 1975.
28. *M. A. Lohe*, Nucl. Phys. B 142, 236, 1978.
29. *E. Corrigan*, *D. Fairlie*, *R. G. Yates*, and *P. Goddard*, Phys. Lett. B 72.
30. *C. N. Yang*, Phys. Rev. Lett. 33, 445, 1974.
31. *G. Neugebauer* and *D. Kramer*, Ann. Phys. Lpz. 24, 62, 1969.
32. *W. Kinnersley*, J. Math. Phys. 18, 1529, 1977.
W. Kinnersley and *D. M. Chitre*, J. Math. Phys. 19, 2307, 1978.
G. Hoenselaers, *W. Kinnersley* and *B. C. Xanthopoulos*, J. Math. Phys. 20, 2530, 1979.
33. *P. Forgács*, *Z. Horváth*, *L. Palla*, Phys. Rev. Lett. 45, 505, 1980.
34. *S. F. Magruder*, Phys. Rev. D 17, 3257, 1978.

KÖNYVISMERTETÉSEK

A. Pekalski and J. Prystawa (editors): Modern Trends in the Theory of Condensed Matter.
Proceedings, Karpacz, 1979.
Lecture Notes in Physics 115
Springer-Verlag, Berlin. 1980.

A lengyelországi Karpaczban évente megrendezésre kerülő elméleti fizikai iskolák, mint azt a szerkesztők leszögeznek, nem iskolák a szó szigorú értelmében, mert az előadók maguk döntenek el, miről és milyen részletességgel kívánnak beszélni. A megkötések e hiánya a XVI., a kondenzált közegek fizikájának szentelt iskola esetében jó eredménnyel járt: az előadások zöme modern problémákról szólt igen érdekesen, talán mert az előadók felhatalmazva érezték magukat, hogy azt fejtegethették, a szóban forgó kérdést ők hogyan értették meg; sőt azt is, hogy mi az, amit még mindig nem értenek.

Három nagy témacsoport került tárgyalásra: a kvantumfolyadékok, a rendezetlen rendszerek és a fázisátalakulások. D. F. Brewer vezető előadása rövid áttekintését adja a ^4He -ra és a ^3He -ra vonatkozó kísérleti tényeknek. Az utóbbi szuperfolyadékban a Cooper-párok már nem-triviális belső szerkezettel rendelkeznek, ami új effektusok egész sorára vezet. A. J. Leggett azt fejt ki, hogy a szimmetriasértő sajátosságok minőségi megértését nagyban könnyíti, ha a Cooper-párokat kétatomos molekuláknak tekintjük, hiszen ezek „kémiai” tulajdonságai az állapot koherenciája miatt makroszkopikusan jelentkeznek. Hasonló gondolatmenetet használ a szuperáram levezetésére N. D. Mermin abban az esetben, amikor a rendparaméter a térben lassan változik. Ez a tárgyalásmód érvényét veszti, ha a közegben topológikus hibahelyek (vertexek) vannak jelen; I. M. Halatnyikov és V. V. Lebegyev általános Hamilton-formalizmusa ennek a nehezebb problémának a tárgyalását is lehetővé teszi. A klasszikus folyadékokra áttérve, M. P. Tosi előadása a sólvadékok töltés-fluktuáció-spektrumának számítását ismerteti.

Az olvasó csak hálás lehet a szerkesztőknek azon elhatározásukért, hogy felvették a kötetbe G. Toulouse két munkáját, jóllehet szerzőjük nem volt ott Karpaczban. A két szerfelett olvasmányos mű betekintést enged egy olyan matematikai beállítottságú fizikus gondolkodásába, akinek meggyőződése, hogy a rendezetlen rendszereket nem „elrontott” rendezett rendszereknek kell tekinteni, hanem az absztrakció magasabb fokára emelkedve, „felső” formalizmust kell alkotni leírásukra. Ebben a periódikus állapotokat jellemző globális szimmetriák helyét a gauge-elméletek lokális szimmetriái foglalják el. Toulouse egyik cikke az Ising spinűvek elméletében döntő fontosságú fogalom, a frusztráció mibenlétének személyes visszaemlékezésekkel tarkított tárgyalása. A másik cikk arról győzi meg az olvasót, hogy a kondenzált anyagok hibahelyeinek típusait, valamint kölcsönhatásaikat a homotópia-elmélet nyelvén természetesen leírni. I. E. Dzialosinszkij előadásában a frusztrált spinrendszerek éppen ilyen, topológiai fogalmakkal dolgozó tárgyalását adja. A. A. Abrikosov viszont a tényleges spinűvek olyan vonásait hangsúlyozza, mint az elektronok szabad úthosszának hatása a Ruderman—Kittel kölcsönhatás távolságfüggésére, a Fermi-felület anizotróp voltának szerepe, stb. A perkolációelmélet eredményeire támaszkodó gondolatmenetben a frusztráció fogalma semmilyen szerephez nem jut!

A véletlen potenciálterben mozgó elektron problémáját, konkrétan a rendezetlen ötvözetek Fermi-felületének számítását taglalja Györfy Balázs, aki lengyel és angol munkatársaival közösen végzett munkájáról számolt be. Koung-An Chao igen alaposan diszkutálja azt a régóta vitatott problémát, hogy az adalékolt félvezetők fém-szigetelő átalakulása Anderson-, vagy Mott-átmenetnek tekinthető-e.

A fázisátalakulásokkal foglalkozó előadások sorát P. B. Allen-é nyitja meg, aki jó pedagógiai érzékkel teszi világosabbá, miért tekinthető a szupravezetés BCS-elmélete a mágnesesség ismert effektív-tér elméletével analógnak. Per Bak azt vizsgálja, milyen körülmények között kell elsőrendű átalakulást várnunk a Landau-elmélet, illetve a renormálási csoport alapján. H. Konwent és N. M. Plakida kevert típusú, strukturális-mágneses fázisátalakulásokat tárgyalnak. E. Tosatti a W. Mo és Si felületek rekonstrukcióját értelmezi egy kétdimenziós sűrűséghullám mechanizmus alapján.

E látszólag „földhözragadt” szilárdtest-fizikai kérdésnek különös érdekessége, hogy a kritikus viselkedés két dimenzióban jól tárgyalható modelljei épp a felületi átalakulások körében lelhetnek alkalmazásra, s e kérdést a szerző alaposan diszkutálja.

A fenti felsorolásból az előadások nagy része, a jelen ismertetés rövidre fogott volta miatt ki kellett, hogy maradjon. A kiemelés semmiképpen nem jelent rangsorolást, hiszen a munkák csaknem mindegyike hasznos és élvezetes olvasmány nemcsak az illető szakterület művelője, hanem a más témán dolgozó érdeklődő szilárdtest-fizikus számára is.

Fazekas Patrik

Kiss László: Az elektrokémiai fémoldódás kinetikája
Akadémiai Kiadó, Budapest 1980

A szerző fő célja e munkában, hogy képet adjon az elektródfolyamatok egyik fontos csoportjának, az elektrokémiai fémoldódásnak — anódos és spontán oldódásnak — fontosabb kinetikai törvényszerűségeiről.

A művet fémjelzi még az is, hogy a szerzőt tanítómestere, a közelmúltban elhunyt Erdey-Grúz Tibor akadémikus buzdította e munka megírására. Tanácsaival, kritikai megjegyzéseivel nagyban segítette e könyv létrejöttét, tematikájának kialakítását.

A mű terjedelme: 206 oldal.

Tanulmányozása felsőfokú, egyetemi vagy legalábbis főiskolai szintű matematikai és fizikai— kémiai ismeretekkel rendelkező, elsősorban vegyész, vegyészmérnök és kémiatanár végzettségű szakemberek részére ajánlott.

Az elektrokémiai fémoldódás kinetikája és mechanizmusa nemcsak elméleti, hanem gyakorlati szempontból is fontos. Ezek a folyamatok játszódnak le a nagy népgazdasági károkat okozó korrózió során, a kémiai áramforrások működésekor, a galvánfürdőkben és az elektrometallurgiai folyamatoknál.

A mű három fő fejezetre tagozódik:

Az első fejezet a témakör termodinamikai vonatkozásait ismerteti.

A munka gerincét képező második fejezet az anódos fémoldódás kérdéseit tárgyalja, különösen részletezve a több, sorbakapcsolt reakciólépésben lejátszódó folyamatok kinetikájával kapcsolatos problémákat. E részben a szerző főleg az aktív állapotú fémek oldódási mechanizmusára koncentrál, de foglalkozik a passzíválódás és transzpasszív oldódás néhány kérdésével is.

A harmadik fejezet a fémek elektródokon spontán lejátszódó folyamatokról, főleg a spontán fémoldódásról és a korrózió alapfolyamatainak törvényszerűségéről nyújt áttekintést.

A szerző a jelzett problémákat igen magas elméleti szinten tárgyalja, de a mű mégsem tekinthető kizárólagosan elméleti munkának, mivel számos kísérleti és gyakorlati alkalmazási problémával kapcsolatban is alapos áttekintést nyújt. Ilyen kísérleti téma például a gyűrűelektródok alkalmazása az anódfolyamatok mechanizmusára kapható információk mérésére.

Néhány témakör kiemelve a gyakorlati alkalmazásokból: az oldat összetételének hatása az elektródfolyamatokra; a fémek passzivitásának, a passzíválódás adszorpció és fedőréteg-elméletének, valamint a passzíválódás kinetikájának tárgyalása; a fémek anódos polírozása és anódos megmunkálása; a fémfelület inhomogenitásának hatása a spontán fémoldódásra; a korrózióvédelem néhány elektrokémiai módszere.

A mű bőségesen tartalmaz táblázatokat és diagramokat. Igen nagy irodalomjegyzéket ad minden fejezet végére, melyben 1930-tól a 70-es évek végéig idézi a témával kapcsolatos hazai és külföldi cikkeket, monográfiákat. Saját tudományos közleményeire is gyakran hivatkozik.

A művet igen nagy haszonnal forgathatják az elektrokémiai kutatással és oktatással foglalkozók mellett a korrózióval, elektrokémiai áramforrásokkal, galvanotechnikával, elektrometallurgiával és egyéb elektrokémiai ipari folyamatokkal foglalkozó elméleti és gyakorlati szakemberek.

(J. L.)

F. Bauer—O. Betancourt—P. Garabedian: A Computational Method in Plasma Physics.
Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1978

A fúziós energiaszabaddítás eszközei között centrális szerepet játszanak a toroidális berendezések: a tokamak és a stellarator. Mindkét típusú berendezéssel számos kísérletet végeztek; az előny egyértelműen a tokamaké. (A nemrég kikísérletezett spheromakra vonatkozó tapasztalatok még nagyon szűkösek.)

A fúziós (általában a plazmafizikai) berendezésekre vonatkozó kísérleti tapasztalatok — sok tekintetben — előtte járnak az elméleti eredményeknek. A plazmafizikusok ezért is fokozott érdeklődéssel fogadnak minden olyan kiadványt, amely a kísérleti eredmények pontosabb és megbízhatóbb elméleti értelmezését tűzi ki célul, ill. új kísérletekre ad iránymutatást.

F. Bauer, O. Betancourt és P. Garabedian könyve ebbe a csoportba tartozik; célja a plazma stabilitásának numerikus analízise toroidális berendezésekben (elsősorban a stellaratorban). A szerzők módszerüket a plazmafizikai variációs elvre alapozzák, s az ebből leszarmaztatott differencia-egyenletek numerikus megoldására ismertetnek több módszert. Egy-két egyszerűbb, speciális esetben az egzakt megoldást ismervén, a módszer alkalmazhatóságának ellenőrzésére is van lehetőség. A könyv egy nagy β -értékű Tokamak-plazma egyensúlyának meghatározására szolgáló Fortran-programmal zárul (72—140 lap).

Haszonnal forgathatják a könyvet a plazma stabilitásával, de főleg a Stellarattal vagy Tokamakokkal foglalkozó plazmafizikusok.

Szabó János

F. Durst, B. E. Launder, F. W. Schmidt, J. H. Whitelaw (editors): Turbulent Shear Flows I. Selected Papers from the First International Symposium on Furbulent Shear Flows, The Pennsylvania State University Park, Pennsylvania USA, April 18-20, 1977. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

A kötet a pennsylvaniai konferencián elhangzott több mint száz előadás közül harmincat ad közre. Ezeket a szerkesztők a következő témák szerint csoportosították: szabad áramlások; áramlások merev falak mentén; visszacirkuláló áramlások; eredmények a Reynolds-féle feszültségek területén; új irányok a modellezésben.

A turbulens áramlás szerkezetéigazó voltának megfelelően mindegyik témacsoport széles spektrumot fog át. Merev testek mögött kialakuló turbulencia, lézer-Doppler-anemometria, izzószálas anemometria, négy-szálas anemometria — ezek a tárgyai az első témacsoportnak.

A második csoportba sorolt dolgozatok sem egységesek; a merev fal elhelyezkedhet az áramlási tér belsejében, vagy lehet az áramló folyadék határoló felülete; ennek megfelelően hatása az áramlásra nagyon különböző. Ismét másként alakul az áramlás instabilitása attól függően, hogy az áramlást sebesség-, nyomás- vagy hőmérsékleti gradiens hozza-e létre. A stabilitás legtöbb esetben csak numerikus módszerekkel analízálható. Az elméleti és a kísérleti módszerekről jó áttekintést ad ez a fejezet.

A harmadik fejezet dolgozatai viszont kizárólag kísérleti jellegűek. Ez érthető; a recirkulációs áramlások — okozza azt akár hőmérsékleti, akár gravitációs gradiens — elméleti leírása nagyon szegényes. A kísérleti eredmények és a numerikus modellek egyezéséről azonban még nem beszélhetünk.

A turbulencia leírása a Reynolds-féle „járulékos” feszültségtenzor segítségével a turbulencia klasszikus alapjának mondható. Milyen turbulencia leírására és milyen közelítésig alkalmazható ez a módszer — ez a témája a könyv negyedik fejezetének.

A nem-lineáris dinamikai rendszerek egzakt analitikai leírását nem ismerjük. A numerikus modellek gyakran túlságosan leegyszerűsítetteknek látszanak, mégis meglepően jó kvalitatív leírását adják a kifejlődött turbulenciának. Legismertebb közülük a Lorenz-modell, amellyel először sikerült megmutatni, hogy a turbulencia kaotikus jellege lehet következménye determinisztikus, nem-lineáris egyenletnek. A Lorenz-modellből következik, hogy három szabadsági fokú nem-lineáris egyenlet kaotikus áramláshoz vezethet. A Lorenz-modell, a Burgers-féle modell, a Smagorinsky—Lilly-féle közelítés a témája a könyv utolsó, elméleti jellegű fejezetének.

A turbulencia, általában a különböző fizikai rendszerek instabilitása iránt igen nagy az érdeklődés. Éppen ezért széles körű érdeklődésre tarthat számot a könyv is; mert bár a turbulencia egy speciális típusával foglalkozik, az itt használt matematikai és fizikai modellek más nem-lineáris rendszerek leírására is alkalmazhatók.

Szabó János

H. Cabannes, M. Holt, V. Rusanov: Sixth International Conference on
Numerical Methods in Fluid Dynamics.
Proceedings, Tbilissi, 1978.
Lecture Notes in Physics, Vol. 90
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979

„Egyre inkább nő azoknak az áramlástani megfigyeléseknek a száma, amelyeket a hidrodinamikai alapegyenleteknek a segítségével elméletileg nem tudunk megmagyarázni... Néhány esetben sikerült áthidalni a matematikai nehézségeket és elég jó egyezésbe hozni a kísérleti és a numerikus eredményeket... Gyakran még az is kérdéses, milyen adatok determinálják a végső áramlási képet” — írja K. G. Roesner „Numerical Calculation of Hydrodynamic Stability Problems with Time-Dependent Boundary Conditions” című bevezető dolgozatában.

Elégge borúlátó vélemény. Pedig az utóbbi években — nem kis mértékben a számítógépeknek köszönhetően — számos áramlástani jelenséget sikerült értelmezni. Sikerült pl. tisztázni, hogy a hidrodinamikai instabilitások nem vezetnek okvetlenül turbulenciához. (Bár a turbulens áramlás végső értelmezése még mindig várat magára.)

Ilyen körülmények között érthető, hogy — a három bevezető általános jellegű dolgozat kivételével — az egyes dolgozatok speciális részproblémák numerikus kiértékelésével foglalkoznak. De így is áttekintést nyer az olvasó a numerikus módszerek hidrodinamikai alkalmazásának „napi állásáról”.

A kötet a Tbilisziben (1978. jún. 20—25.) rendezett nemzetközi konferencia 72 előadását tartalmazza. (Közülük három összefoglaló előadás.) Plazmaáramlással, ill. magnetohidrodinamikai témával 3 dolgozat foglalkozik.

A konferenciának 18 országból 257 résztvevője volt. (Magyarországot 3 kutató képviselte.)

Szabó János

M. Lauterborn (ed.): Cavitation and Inhomogenities in Underwater Acoustics
Proc. of the 1st. Intern. Conf. Göttingen July 9-11, 1979 Editor W. Lauterborn.
Springer Vg. Berlin-Heidelberg-New York, 1980

Az ultrahangkutatás és a víz alatti akusztika egyik fontos problémaköre a kavitáció. Az 1978-ban Párizsban tartott „Nemlineáris Akusztika” szimpóziumon vetették föl az ötletet egy kavitációval foglalkozó szűk körű konferencia megtartására. A megvalósítás nem soká váratott magára és 39 előadást eredményezett, amelynek fele a kavitáció elméletével és vizsgálati módszereivel, másik fele buborékok és más inhomogenitások problémájával foglalkozott.

A dolgok természetesen összetartoznak. A kavitációs központok előbb-utóbb kis buborékokat hoznak létre, s ezek a buborékok a homogén folyadékban lényeges inhomogenitási zónákat eredményeznek. Így aztán a 319 lapos fénynyomásos cikkgyűjtemény négy részre választása (kavitáció; hanghullámok és buborékok; buborék spektrometria; részecske földérintés) talán nem is indokolt. Mindenesetre az I. részben elsősorban a kavitációt előidéző okokkal, a kavitáció nagysebességű fényképezéssel való vizsgálatával, a kavitáció dinamikájával és hatásaival foglalkoznak a dolgozatok (összesen 18). A klasszikus hidrodinamikai és akusztikai kavitáció mellett szó esik az újabban felfedezett lézer-, ill. optikai kavitációról (W. Lauterborn). A nagyintenzitású fotonokkal létrehozott kavitáció mellett már beszélhetünk protonokkal vagy neutrínókkal kiváltott részecske-kavitációról is. Mivel az ilyen kiváltásnak küszöbértéke van, elképzelések alakultak ki arra vonatkozólag, hogy hogyan lehetne ezzel az effektussal kozmikus eredetű müonokat és neutrínókat detektálni az óceánban.

Az anyag nagy része szorosan kapcsolódik a L. Børnø által egy évvel korábban rendezett párizsi nemlineáris szimpózium előadásaihoz. A buborékok okozta inhomogenitások lényeges meghatározói a közeg nemlineáris sajátosságainak. Mindez a víz alatti jeladásteknika és a víz alatti tájékozódás jelentős befolyásoló tényezője. Ez a II. rész dolgozataiból válik nyilvánvalóvá 7 cikk keretében.

A buborékos inhomogenitásokon kívül más típusú zavarások is jelentkeznek, amik csak nehezen és nagy távolságú átviteli torzítások vizsgálatával deríthetők föl. Ilyenek a különböző hő-

mérsékletű és sőtartalmú részek keveredése. Ezek a fajta inhomogenitások a buborékos eredetű szórással szemben elsősorban sebességváltozást, ezáltal hangelhajtást idéznek elő. Ezzel az összefüggéssel főként L. Børnø cikkéből ismerkedhetünk meg az V. részben, ahol véletlenül szintén 7 cikk foglalkozik a témával.

Közben a III. rész cikkei egy igen érdekes új területet ölelnek föl, a buborék spektrometriát. Itt H. Medwin cikke a bevezető, amely a következő alapvető tényeket sorolja föl: a) a buborékok rezonanciafrekvenciája fordítottan arányos a sugárral, b) rezonanciában a szórási keresztmetszet 1000-szer nagyobb a valóságos geometriai keresztmetszetnél és c) a buborékos közeg mindig szóró hatású. Így mérési módszereket lehetett kidolgozni a buborékméretek meghatározására. Ennek elmélete és mérési módszerei 6 dolgozatban és egy hozzászólásban kerülnek tárgyalásra.

A dolgozatok számos új adatot és számítási módszert tartalmaznak. Egy igen érdekes, nem több mint 20 éves tudományszak értékes eredményei. Tudvalevő, hogy a víz alatti akusztikának tudományos jelentősége mellett nagy haditechnikai fontossága is van. Rohamos fejlődése tehát alighanem tovább folytatódik. Az ismertetett könyv fontos állomás a kutatási eredmények közzétételében.

Tarnóczy Tamás

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Marton Andor

A kézirat nyomdába érkezett: 1980. szeptember 19. Terjedelem: 8,05 (A/5 ív)

80-3988 — Szegedi Nyomda — F.v.: Dobó József igazgató

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Fái György</i> : Nehéz-ion reakciók kollektív és egy-részecske aspektusai	93
<i>Kiss-Tóth Tibor</i> : Mértékelméletek topológikusan stabil, statikus megoldásainak vizsgálata ...	143

KÖNYVISMERTETÉSEK

<i>A. Pekalski and J. Pistawa</i> : Modern Trends in the Theory of Condensed Matter	179
<i>Kiss László</i> : Az elektrokémiai fémoldódás kinetikája	180
<i>F. Bauer—O. Betancourt—P. Garabedian</i> : A Computational Method in Plasma Physics	180
<i>F. Durst, B. E. Launder, F. W. Schmidt, J. H. Whitelaw</i> : Turbulent Shear Flows I.	181
<i>H. Cabannes, M. Holt, V. Rusanov</i> : Sixth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics	182
<i>M. Lauterborn</i> : Cavitation and Inhomogeneities in Underwater Acoustics	182

307.226

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

GÁSPÁR REZSŐ, KISS DEZSŐ, KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR
ÉS SZALAY SÁNDOR
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI
PÁL LÉNÁRD

XXIX. KÖTET

3. FÜZET



AKADÉMIAI KIADÓ
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST 1981

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klasszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10-10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóiratból évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelemben.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Turchányi György egyetemi tanár

Biofizikai Intézet

1444 Budapest VIII., Postafiók 263

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 90 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a KULTÚRA Külkereskedelmi Vállalat, 1389 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmi ismertetőt írnak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közölik. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írnak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.

SZILÁRDSÁGNÖVELŐ MECHANIZMUSOK FÉMEKBEN*

Szerkesztő:
KOVÁCS ISTVÁN
ELTE, Általános Fizika Tanszék

A fémek és ötvözetek szerkezeti anyagokként való felhasználásában alapvető fontosságú a képlékeny alakíthatóságuk és szilárdságuk széles határok közötti változtathatósága. A fémeknek ez a sajátos tulajdonsága a kristályhibák létezésének következménye. Bár a fémeket és ötvözeteket az emberiség ősidők óta felhasználja a legkülönbözőbb eszközök készítésére, szilárdsági tulajdonságaik mélyebb megértése mégis csak századunk második felében kezdődött el. Még napjainkban sem mondható az, hogy a teljes megértés felé vezető úton nagyon messzire jutottunk volna, annak ellenére, hogy a világon folyó technológiai és fizikai kutatások egy igen jelentős része foglalkozik ezzel a problémakörrel. Ez indokolja azt, hogy a jelen cikksorozatban megkísérelünk áttekintést adni azokról a jelenlegi ismeretekről, amelyek a fémek legfontosabb szilárdságnövelő mechanizmusaival kapcsolatosak. A dolgozatok alapját az ELTE Általános Fizika Tanszék 1979. januárjában tartott négy napos szemináriumának anyaga képezi.

* Érkezett: 1979. XI. 21.

TARTALOM

1. A fémek képlékeny alakváltozása és szilárdsága	187
2. Felületcentrált köbös egykristályok alakítási keményedése	201
3. Tércentrált köbös fémek alakítási keményedése	215
4. A szemcseszerkezet szilárdságnövelő hatása	235
5. A szubszerkezetek szilárdságnövelő hatása	255
6. Befagyasztási keményedés	287
7. Szilárdoldatos keményedés	299
8. Kiválósos keményedés	329

1. A FÉMEK KÉPLEKENY ALAKVÁLTOZÁSA ÉS SZILÁRDSÁGA

KOVÁCS ISTVÁN
ELTE, Általános Fizika Tanszék

1. BEVEZETÉS

A huszadik század technikai vívmányai a fémek és ötvözetek felhasználása terén mind nagyobb és nagyobb szilárdsági követelményeket támasztanak. Ennek részben az az oka, hogy egyes technikai eszközök extrém körülmények között működnek (pl. rakétatechnika), részben pedig az, hogy a földi fémkészletek végesek. Nagyobb szilárdságú anyagból fajlagosan kevesebbet kell felhasználni minden alkalmazási területen, ami az anyagtakarékosságon túlmenően is jelentős gazdasági előnyökkel jár.

Ez az egyik oka annak, hogy az utóbbi évtizedekben világszerte óriási apparátussal folyik kutatómunka annak érdekében, hogy egyrészt újabb és újabb, a kítűzött céloknak mind jobban megfelelő anyagokat állítsanak elő, másrészt mind jobban és részletesebben megismerjék azokat az elemi folyamatokat, amelyek a fémek szilárdságnövelő mechanizmusaival kapcsolatosak. E két kutatási irányzat ma még a legtöbb esetben elkülönül egymástól. Talán azt sem túlzás állítani, hogy az utóbbi három évtized nagyszámú eredménye ezt az elkülönülést csak növelte, valószínűleg elsősorban metodikai és terminológiai okok következtében. A kristályhibák és fémek szilárdsága közötti alapvető kapcsolat vizsgálata ugyanis az ezzel foglalkozó kutatók tevékenységét egyre inkább az alapkutatás irányába tolja el. Gondoljunk csak arra, hogy a mikroszerkezetben bekövetkező elemi változások és az ezzel kapcsolatos folyamatok megértése nélkülözhetetlenné teszi pl. az elektronmikroszkóp alkalmazását. A leképezési folyamatok pontos megértése viszont szükségessé teszi az elektron-diffrakció kvantummechanikai tárgyalásának elsajátítását. A mikroszerkezetről szerzett ilyen alapvető ismeretek természetesen csak a legkritikább esetben kínálnak közvetlen felhasználást, ezért pl. egy határozott cél érdekében előállítandó anyag kidolgozásával foglalkozó kutató az ilyen eredményeket idegenül fogadja, és sok esetben a kérdéses kutatást fölöslegesnek minősíti. Ugyanakkor az alapkutatás iránt elkötelezett kutató idegenkedik a pusztán empirikus tapasztalatokon alapuló tervezéstől. A helyzetet csak rontja az, hogy sok esetben a lényegében azonos témán dolgozó fejlesztő mérnök és fizikus egymás meg nem értését nyelvezetük különbözősége is nehezíti.

Mindezek a problémák a két kutatási terület sajnálatos elszigetelődéséhez vezetnek, amelynek következtében sem az egyik, sem a másik területen dolgozó kutatók nem láthatják tisztán az alapkutatási eredmények világos alkalmazási lehetőségeit. Ez utóbbinak természetesen vannak még elkerülhetetlen okai is. A mikroszerkezetre vonatkozó alapvető ismeretek ugyanis nem elegendően teljesek jelenleg ahhoz, hogy a tervező mérnök számára szükséges makroszkopikus anyagi tulajdonságokkal egyértelmű és egyszerű kapcsolatba hozhatók legyenek. Emiatt annak ellenére, hogy éppen az utóbbi évtizedek eredményei alapján kémiai összetétellel, termikus és mecha-

nikai (vagy termomechanikai) kezelésekkel extrém tulajdonságú anyagok állíthatók elő, a tervezőmérnök ma még nem tud „megrendelni” a követelményeinek megfelelő mikroszerkezetű anyagot. Ehelyett empirikus adatok és a biztonsági ráhagyás alapján végzi el ma is a tervezését. A mikroszerkezettel behatóan foglalkozó kutató figyelmét viszont azért kerülheti el egy új eredmény közvetlen alkalmazhatósága, mert nem ismeri az ezzel kapcsolatos felhasználási lehetőségeket, illetve technológiai problémákat.

Nyilvánvaló, hogy az egyre nagyobb számú új kutatási eredmény szélesebb körű és gyorsabb hasznosítása feltétlenül szükségessé teszi a két kutatási terület szorosabb kapcsolatát, a mérnöki igények, illetve új kutatási eredmények kölcsönös ismeretét. A jelen cikksorozat ehhez is segítséget kíván nyújtani. A fémek szilárdságnövelő mechanizmusairól ma már nagyon sokat tudunk, azonban ezek még nem foglalkoztatók egységes keretbe. A következő dolgozatok a legfontosabb szilárdságnövelő mechanizmusokról adnak jelenlegi ismereteink alapján áttekintést, azzal a reménnyel, hogy mindkét kutatási terület művelőinek érdeklődésére találjanak.

2. A SZILÁRDSÁGTANRA VONATKOZÓ ISMERETEK TÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉSE

A mérnöki konstrukciók története több évezredre nyúlik vissza az emberiség történetében, mégis a kvantitatív szilárdságtani ismeretek kialakulása csak a 17. században kezdődött el. Napjainkban jutottunk el oda, hogy az anyagok mikroszerkezetét mind szélesebb körben tudatosan megváltoztassuk és az ezekkel kapcsolatos jelenségekre kvantitatív törvényeket állapítsunk meg. A szilárdságtanra vonatkozó modern szilárdtestfizikai ismeretek megértéséhez, úgy érzem, nem elhanyagolható mértékben hozzájárulhat ezen ismeretek kialakulásának rövid történeti áttekintése.

Bár a szilárdságtani ismeretek előtt is számos csodálatos szerkezeti konstrukció született, ezek megalkotása azonban nem tekinthető mai értelemben tudatos mérnöki tevékenységnek. Egy-egy szerkezet alkalmassága a szükséges szilárdsági követelményekre csak a teljes elkészülés után dőlt el, és sok esetben maga az építető sem volt meggyőződve konstrukciója helyességéről. Érdekes példa erre a jugoszláviai Mostarban a Neretván 1556-ban épült híd. A török uralom alatt levő területen a hidat a szultán építtette. A híd török tervezőjéről feljegyezték, hogy a megnyitási ünnepségen való részvétel helyett a környező hegyekben várta be a híd terheléspróbáját, hogy esetleges katasztrófa esetén elkerülhesse a szultán haragját.

A szilárdtestek legegyszerűbb mechanikai tulajdonsága a rugalmas alakváltozásokkal kapcsolatos. Ennek ellenére több évszázadra volt szükség ahhoz, hogy az erre vonatkozó alapvető fogalmak kialakuljanak. *Galilei* volt az első, aki az egyik végén rögzített rúd lehajlásának tanulmányozása során megkísérelte a lehajlás és terhelő erő közötti összefüggés meghatározását. Bár a problémát megoldania nem sikerült (a rudat nyújthatatlannak tételezte fel, és ezt a hibát még *Euler* is (!) elkövette), mégis ezzel a feladattal termékeny folyamatot indított el [1].

Galilei munkáját követte *Hooke* felismerése (1678) a rugalmas megnyúlás és az erő nagysága közötti összefüggésre vonatkozóan. Csaknem egy évszázaddal később (1773) vezette be *Coulomb* a nyírófeszültség fogalmát, és csak 1807-ben jelenik meg az első anyagi állandó a *Hooke* törvényben. *Young* munkája nyomán. További negyedszázad telt el a nyírófeszültség és nyírási modulusz fogalmának összekapcsolá-

sáig (Navier 1833), és röviddel előtte jelent meg a Poisson szám fogalma (Poisson 1830).

Érdekes a Poisson szám értékének története. Poisson Dalton (1808) nyomán megkísérelte a relatív harántösszehúzódnál és megnyúlás értékének meghatározását az atomi kötőerők feltételezése alapján. Ő azonban még csak centrális erőket (gravitációs és elektrosztatikus erőket) ismert. Centrális erők alapján arra az eredményre jutott, hogy valamennyi izotrop anyagra ez a hányados $1/4$ kell legyen. Röviddel Poisson után azonban Green az energiamegmaradás törvényére alapozott számításból azt találta, hogy a különböző anyagokra ez a szám általában különbözik. Ez azt jelentette, hogy az atomok közötti kötőerők nem centrális erők. A kérdést Green javára Voigt pontos mérései (1888) döntötték el, nyitva hagyva a nem centrális erők létezésének problémáját a kvantummechanika megalkotásáig.

Az alapvető fogalmak kialakulásával párhuzamosan mintegy két évszázad alatt, számos nagy tudós (Bernoulli, Euler, Coulomb, Lagrange, Chladni, Cauchy, Navier, Green, St. Venant, Airy, Rayleigh és mások) munkássága nyomán alakult ki a rugalmas alakváltozások elméletének mai formája.

A rugalmasságtan alapfogalmainak kialakulását jelentős késéssel követte a kvantitatív anyagvizsgáló módszerek kifejlődése. Ez utóbbiak megjelenését csak a 19. század második felétől számíthatjuk. Az első ilyen témájú nemzetközi konferenciát 1893-ban tartották. Az azóta eltelt csaknem nyolcvan év az anyagvizsgáló módszerek óriási fejlődését hozta magával.

A rugalmasságtan alapvető segítséget nyújtott szerkezetek kvantitatív tervezésére, azonban a teljes biztonsághoz nem volt elegendő. Ehhez a szilárd anyagok egy sor további mechanikai tulajdonságának felismerésére és törvényszerűségeinek meghatározására volt szükség. Ilyen tulajdonságok a törési szilárdság, környezeti hatások (korrózió), képlékeny alakváltozás, kúszás, repedésképződés, törésmechanika stb. Jelentős eredmények ezeken a területeken csak az utóbbi évszázad alatt születtek.

A képlékeny alakváltozás elméletének kialakulása St. Venant vizsgálataival kezdődött el. A makroszkopikus képlékenységtanban ma használt alapegyenletek pedig Kármán, Mises, Hencky, Prandtl, és Reuss munkássága nyomán születtek meg a jelen század első évtizedeiben. Ugyancsak ebben a században jelent meg az első kvantitatív töréselmélet (Griffith 1921).

A szilárd anyagok képlékenységi és általában szilárdsági tulajdonságainak megértése felé vezető első lépések csak századunk 30-as éveibe nyúlnak vissza. 1934-ben Orowan, Polányi és Taylor a diszlokációk fogalmának felismerésével indította el azt a folyamatot, amely a modern anyagtudomány kifejlődéséhez vezetett. Ma már számos nagy hatású módszer (röntgen diffrakció, elektronmikroszkóp, térionmikroszkóp, mikroszonda stb.) áll rendelkezésünkre, amelyek segítségével a makroszkopikus mechanikai tulajdonságok mikroszerkezettel való kapcsolatának részleteibe is bepillantást nyerhetünk. Az elmúlt néhány évtized alatt óriási ismeretanyag gyűlt össze mind kísérleti, mind elméleti téren. Átfogó fundamentális törvényekkel még nem rendelkezünk, de a legalapvetőbb jelenségek és folyamatok lényeges vonásait már ismerjük. Ahhoz azonban, hogy az anyagtudomány közvetlen ráhatást gyakoroljon technológiai problémák megoldására, az szükséges, hogy az alapkutató célkitűzése a makroszkopikus tulajdonságok és a mikroszerkezet közötti kapcsolat mind mélyebb feltárása legyen, a technológiai fejlesztéssel foglalkozó kutató pedig mind jobban megismerje az anyagtudomány eredményeit.

3. DISZLOKÁCIÓ MOZGÁS ÉS A FÉMEK SZILÁRDSÁGA

A fémek szilárdságáról sokféle értelemben lehet beszélni (pl. szakítószilárdság). A jelen cikksorozatban a szilárdságnövelő mechanizmusokon kizárólag a képlékeny alakváltozás megindulásához szükséges feszültséget (folyáshatárt) növelő mechanizmusokat értünk.

A fémek képlékeny alakváltozása diszlokáció mozgással jön létre [2]. Ezt figyelembe véve a makroszkopikus folyáshatár az a legkisebb külső feszültség, amelynek hatására elegendően nagy számú diszlokáció mozgásba jön ahhoz, hogy makroszkopikusan észlelhető alakváltozás jöjjön létre. A diszlokációk mozgását azonban sokféle akadály gátolja, ezért a folyáshatár a kristályban jelenlevő akadályok számától és minőségétől nagy mértékben függ. A következő dolgozatokban éppen a különböző természetű akadályoktól származó hatásokat vizsgáljuk meg.

Foglaljuk röviden össze, hogy milyen típusú akadályok lehetségesek. Tekintsünk először tiszta (idegen atomoktól mentes) fémegykristályt. Ha ezen makroszkopikus képlékeny alakváltozást hozunk létre, akkor nagy számú új diszlokáció halmozódik fel az anyagban. Az egyes diszlokációk mozgását a többi diszlokáció azonban jelentősen akadályozza rugalmas feszültségtereiken keresztül kölcsönhatásuk és egymás átmetszése révén. Ezért a tiszta fém növekvő alakváltozásával a nagy számú diszlokáció mozgatása egyre nagyobb és nagyobb külső feszültség alkalmazását igényli. Ezt a folyamatot nevezzük alakítási keményedésnek. Az alakítási keményedés kísérleti vizsgálatát általában tiszta, egytengelyű nyújtás [3] során végzik. Ekkor megkapjuk a nyújtási folyásfeszültséget az előzetes képlékeny alakváltozás függvényében. Az ilyen feszültség-deformáció összefüggésből értékes információkat nyerünk az alakítási keményedés mechanizmusára vonatkozóan, azonban a folyásfeszültség nincs egyértelmű kapcsolatban a mikroszerkezettel. A folyásfeszültség ugyanis az anyag ugyanazon állapotban jelentősen függ az alakváltozás sebességétől és a hőmérséklettől is. Ez tehát azt jelenti, hogy a folyásfeszültség nem jellemzi egyértelműen az anyag állapotát (mikroszerkezetét) és jelenleg nem ismeretes, hogy milyen további paraméterrel (vagy paraméterekkel) lehetne az egyértelmű jellemzést megvalósítani. Az alakítási keményedés mechanizmusa jelentősen függ továbbá a kristályszerkezettől is. Ezekkel a problémákkal foglalkozik részletesen a 2. és 3. fejezet.

Lényegesen módosul a diszlokáció mozgás polikristályos fémekben. Ekkor az egész test alakváltozása csak úgy jöhet létre, hogy az egyes szemcsék deformációja során az anyag folytonossága megmaradjon. Ez szükségessé teszi sok csúszási rendszer egyidejű aktiválását. A polikristályos fémek alakítási keményedésének exakt leírásához ismernünk kellene valamennyi szemcse összetett feszültségállapotra vonatkozó feszültség-deformáció összefüggését. Mivel ez nem ismert, így ez a kérdés sem megoldott ma még. Mindenesetre a folyásfeszültség kialakításában a szemcsehatárok szerepe jelentős és sok esetben viszonylag egyszerű összefüggéssel leírható. Ezekkel a kérdésekkel foglalkozik a 4. fejezet.

Nagymértékű alakváltozások során a diszlokációk cellafalakba rendeződnek, mert így a hosszú távú feszültségterek leárnyékolódnak, s ezáltal az anyag rugalmas energiája csökken. Ezek a cellafalak kisebb vagy nagyobb orientáció különbségű, viszonylag diszlokációmentes tartományokat határolnak, amelyeket szubszemcséknek nevezünk. A szubszemcsék is jelentősen növelik a folyásfeszültséget. Ezt a mechanizmust az 5. fejezet tárgyalja.

A fémek magas hőmérsékletre való befagyasztása (edzése) során nagy számú, nem egyensúlyi vakancia marad az anyagban, amely eltűnése során diszlokációhurkok és üregek képződését eredményezi. Ezeknek a folyáshatárra való hatását elemzi a 6. fejezet.

Jelentősen befolyásolhatók a fémek szilárdsági tulajdonságai ötvözéssel. Az ötvözők hatása kétféleképpen jelentkezik. Ha az ötvözet szilárdoldat állapotú, akkor az ötvözők hatása a folyáshatárra elsősorban a lokalizált diszlokáció-oldott atom kölcsönhatásból származik. Az anyag alakítási keményedése ekkor elegendően alacsony hőmérsékleten sok tekintetben egy kisebb rétegződési hiba energiájú tiszta fémhez hasonlóan viselkedik, mert az oldott idegen atomok a rétegződési hiba energiát mindig csökkentik. Ha az oldott atomok mozgékonyak az alakítás hőmérsékletén, akkor az anyag viselkedése jelentősen eltérhet a tiszta anyagétól. A szilárdoldatos keményedéssel kapcsolatos jelenségeket a 7. fejezet vizsgálja.

Az egyik legfontosabb szilárdságnövelő mechanizmussal, a kiválásos (diszperziós) keményedéssel foglalkozik a 8. fejezet. Ez akkor lép fel, ha az anyagban szilárdfázisú reakciók, vagy pl. belső oxidáció hatására az atominál lényegesen nagyobb méretű részecskék jönnek létre, amelyek tulajdonságai az alapanyag kristályrácsától, a mátrixtól jelentősen különböznek. Az ilyen idegen részecskék a diszlokációk mozgását nagy mértékben akadályozzák, ezzel jelentősen megnövelik a folyáshatárt és egyes esetekben alapvetően megváltoztatják az alakítási keményedés folyamatát is.

A jelen dolgozat további részében áttekintést adunk azokról az általános megfontolásokról, amelyek a diszlokációmozgást akadályozó hatások tárgyalásakor alkalmazást nyernek.

4. DISZLOKÁCIÓ MOZGÁS ÉS KÉPLÉKENY ALAKVÁLTOZÁS

Ha egy fémre σ külső feszültséget alkalmazunk, akkor a mozgóképes diszlokációk az akadályozó hatásoktól függő átlagos v sebességgel jönnek mozgásba, amely függ a hőmérséklettől is, tehát

$$v = v(\sigma, T, X). \quad (1)$$

Itt X olyan szerkezeti paramétereket jelöl, amelyek az anyag mikroszerkezetét, vagyis az akadályozó hatásokat jellemzik. Ezeket a paramétereket általában nem ismerjük. Ha a mozgóképes diszlokációsűrűség ϱ_m , akkor a makroszkopikus $\dot{\epsilon}$ alakváltozási sebesség [2]:

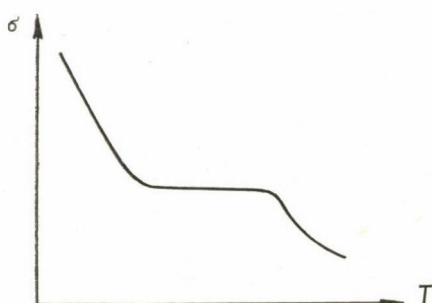
$$\dot{\epsilon} = \varrho_m b v(\sigma, T, X), \quad (2)$$

ahol b a Burgers vektor abszolút értéke.

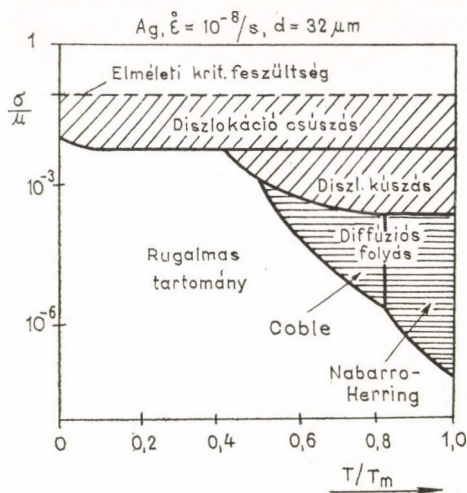
Ez az összefüggés (pl. tiszta nyújtásra) általános érvényű. Ha az anyag már előzetesen ϵ képlékeny alakváltozást szenvedett, akkor ϱ_m és X függvénye ϵ -nak. Így állandó hőmérséklet és deformáció sebesség mellett (2) a σ — ϵ feszültség-deformáció görbe implicit egyenlete. Ha állandó feszültséggel terheljük meg a testet, akkor (2) a kúszásgörbe egyenlete.

A folyásfeszültség hőmérsékletfüggése általában több szakaszra osztható és sematikusan az 1. ábrán látható. Az egyes szakaszoknak megfelelő hőmérséklet intervallumokban a diszlokációk akadályokon való átjutása jelentősen különböző mechanizmusokkal történik. Ezeknek a tárgyalására még visszatérünk.

Az adott alakváltozási sebesség létrehozásához (adott szerkezeti tulajdonságok mellett) szükséges feszültség és az alakítási hőmérséklet bonyolult kapcsolata jól érzékelhető az *Ashby* által bevezetett deformációs térképen [4, 5]. A 2. ábra tiszta polikristályos, $32\text{ }\mu\text{m}$ átlagos szemcse átmérőjű ezüst deformációs térképét mutatja, $\dot{\epsilon}=10^{-8}/\text{s}$ deformáció sebesség mellett. A térképen az egyes területek más-más alakváltozási mechanizmust jelölnek. Látható, hogy adott sebességű deformációt igen széles feszültség tartományban létrehozhatunk a hőmérséklet alkalmas megválasztása esetén. A kialakuló deformációs mechanizmus azonban függ mind a hőmérséklettől, mind a feszültségtől.



1. ábra. A folyásfeszültség sematikus hőmérsékletfüggése



2. ábra. Ezüst deformációs térképe

A (2) egyenlet tehát csak meghatározott feszültség és hőmérséklet intervallumban alkalmazható a képlékeny alakváltozás leírására. Explicit alakja elvben a diszlokációk mozgásegyenletének megoldásával lenne meghatározható. Ha a külső feszültség által a csúszósíkban, a csúszás irányában ható feszültséget τ -val jelöljük, akkor az x irányban mozgó diszlokációk mozgásegyenlete a következő alakban írható:

$$M\ddot{x} + B\dot{x} = b(\tau - \tau_b), \quad (3)$$

ahol M a hosszegységnyi diszlokáció „effektív” tömege, B a „súrlódás” jellegű erőket jellemző mennyiség és τ_b a diszlokáció mozgást akadályozó (ismeretlen) belső feszültségek eredője. $(\tau - \tau_b) \cdot b$ a hosszegységnyi diszlokációra ható erő [2].

A (3) egyenlet megoldása általában nem lehetséges, mert τ_b mellett B -t sem ismerjük. Állandó sebességű diszlokáció mozgás esetén $\ddot{x} = 0$ és $\dot{x} = v$, így

$$Bv = b(\tau - \tau_b). \quad (4)$$

A kísérleti tapasztalat szerint B erősen függ τ -tól, azaz $B = B(\tau)$.

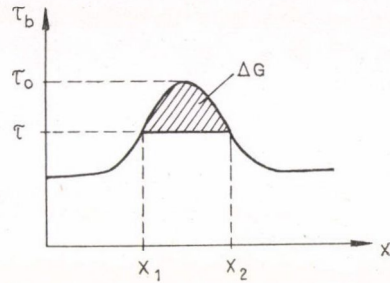
4.1. Termikusan aktivált diszlokáció mozgás

Mozogjon egy l hosszúságú diszlokáció szakasz a csúszósíkjában a $\tau^* = \tau - \tau_b$ ún. effektív feszültség hatására. Ha a diszlokáció megközelít egy akadályt, akkor a τ_b feszültség lokálisan megnő a hely függvényében, ahogy ezt a 3. ábra mutatja. Ha továbbá a τ feszültség kisebb, mint a τ_b maximuma τ_0 , akkor a diszlokáció az x_1 helyen megtorpan és továbbhaladása tisztán a külső feszültség hatására csak akkor lehetséges, ha az x_2 helyre kerül. Az $x_1 \rightarrow x_2$ elmozduláshoz azonban a kölcsönhatási görbe alatti területnek megfelelő energiabefektetésre van szükség, amely a kristály szabad energiáját növeli [6]. Ennek értéke az ábra alapján:

$$\Delta F = \int_{x_1}^{x_2} \tau_b l b dx. \quad (5)$$

Ebből a külső feszültség munkája (aktiválási munka):

$$\Delta W = \int_{x_1}^{x_2} \tau l b dx = \tau l b (x_2 - x_1). \quad (6)$$



3. ábra. Diszlokáció-akadály kölcsönhatási görbe sematikus rajza

Mivel ΔW a rendszeren végzett munka, ezért a diszlokáció mozgás aktiválásához szükséges $\Delta G = \Delta F - \Delta W$ energia a kristály szabadentalpia megváltozása az $x_1 \rightarrow x_2$ elmozdulás során. Ez a megváltozás bekövetkezhet lokális termikus energia fluktuációk révén, amelynek valószínűsége a statisztikus fizika szerint arányos $\exp \left\{ -\frac{\Delta G}{kT} \right\}$ vel, ahol T az abszolút hőmérséklet és k a Boltzmann állandó. Bevezetve az $l(x_2 - x_1) = \Delta A$ definícióval az aktiválási terület fogalmát, az aktiválási szabadentalpiát a következő alakban adhatjuk meg:

$$\Delta G = \int_{A_1}^{A_2} (\tau_b - \tau) b dA. \quad (7)$$

Ezzel a diszlokációk átlagos sebessége

$$v = v_0 e^{-\frac{\Delta G}{kT}}, \quad (8)$$

ahol általában v_0 is függhet a feszültségtől.

4.2. A termikusan aktiválható akadályok jellemző paraméterei

A $bl(x_2 - x_1) = b\Delta A$ mennyiséget aktiválási térfogatnak nevezzük. Ez azonban nem termodinamikai értelemben vett aktiválási térfogat. Ez utóbbi ugyanis az aktiválási entalpia hidrosztatikus nyomás szerinti deriváltja, azaz

$$\Delta V^{\text{termo}} = \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial p} \right)_T.$$

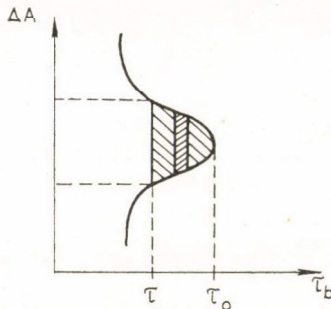
Az aktiválási terület termodinamikai definícióját is megadhatjuk, ha felhasználjuk, hogy a 4. ábra alapján ΔG kifejezhető a következőképpen is

$$\Delta G = b \int_{\tau}^{\tau_0} \Delta A(\tau_b) d\tau_b. \quad (9)$$

Ebből az aktiválási terület

$$\Delta A = \frac{1}{b} \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \tau_b} \right)_T. \quad (10)$$

Mérésekből a $\Delta G(\tau, T)$ függvénykapcsolatot tudjuk meghatározni. Ennek ismeretében (9) felhasználásával egy olyan látszólagos aktiválási területet tudunk megadni, amely a (10)-zel a következő kapcsolatban áll:



4. ábra. Az aktiválási terület meghatározásához

$$\Delta A' = -\frac{1}{b} \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \tau} \right)_T = \Delta A - \int_{\tau}^{\tau_0} \left(\frac{\partial \Delta A}{\partial \tau} \right)_T d\tau_b. \quad (11)$$

Ebből kitűnik, hogy $\Delta A' = \Delta A$ akkor, ha a kölcsönhatási profil (3., 4. ábra) nem függ az alkalmazott τ feszültségtől. Az olyan akadályokat, amelyekre ez teljesül, „merev” akadályoknak is szokták nevezni [7].

A $\Delta G(\tau, T)$ függvényből a látszólagos aktiválási munka (6) felhasználásával:

$$\Delta W' = \tau b \Delta A' = \Delta W - \tau b \int_{\tau}^{\tau_0} \left(\frac{\partial \Delta A}{\partial \tau} \right)_T d\tau_b = - \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \ln \tau} \right)_T. \quad (12)$$

Ez ismét csak merev akadályok esetén egyenlő a valódi aktiválási munkával.

A $\Delta G(\tau, T)$ függvényből meghatározható a ΔH aktiválási entalpia is. Felhasználva a

$$d\Delta G(\tau, T) = d\Delta H - T d\Delta S - \Delta S dT = -\Delta S dT - \Delta A \cdot d\tau_b \cdot b$$

termodinamikai összefüggést, ΔH -t a következő kifejezésből kaphatjuk meg:

$$\Delta H = \left[\frac{\partial \left(\frac{\Delta G}{T} \right)}{\partial \left(\frac{1}{T} \right)} \right]_{\tau}. \quad (13)$$

Az akadályon való áthaladáshoz szükséges teljes szabad energia változást az akadály erősségének nevezzük. Ennek értéke

$$\Delta F_0 = b \int_0^{\tau_0} \Delta A d\tau_b. \quad (14)$$

4.3. Az aktiválási paraméterek kísérleti meghatározása

A $\Delta G(\tau, T)$ függvény kísérleti vizsgálatából, egyetlen domináns mechanizmust feltételezve, a termikusan aktivált akadályok jellemző paraméterei az előző össze-függésekből meghatározhatók.

A kísérleti vizsgálathoz vagy a folyáshatárt (folyásfeszültséget) kell mérnünk egyszer állandó hőmérsékleten az $\dot{\epsilon}$ deformáció sebesség függvényében, majd $\dot{\epsilon} =$ =állandó mellett a hőmérséklet függvényében, vagy az $\dot{\epsilon}$ deformáció sebességet az idő függvényében adott feszültség és hőmérséklet esetén (kúszás vizsgálatokban). A (2) és (8) kifejezések alapján ugyanis e három paraméter közötti összefüggés az

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 e^{-\frac{\Delta G(\tau, T)}{kT}} \quad (15)$$

alakban írható fel. Ez egy implicit egyenlet, pl. a folyáshatár hőmérséklet és deformáció sebesség függésére. Az alakváltozás természetétől és a vizsgált anyagtól függően $\dot{\epsilon}_0$ is függvénye lehet a τ feszültségnek.

$\dot{\epsilon} =$ állandó esetén (15) a folyásfeszültség hőmérséklet függését adja meg. (7) figyelembevételével látható azonban, hogy a konkrét $\tau(T)$ függvény meghatározásához ismernünk kellene a kölcsönhatási profil pontos alakját.

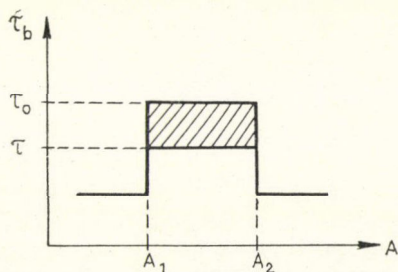
Jelentős egyszerűsítést tesz lehetővé az előző megfontolásokban, ha a kölcsönhatás derékszögű profillal közelíthető (5. ábra). Ekkor a (7) alatti integrálás elvégezhető, azaz

$$\Delta G_0 = b \int_{A_1}^{A_2} (\tau_0 - \tau) dA = \Delta F_0 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right), \quad (16)$$

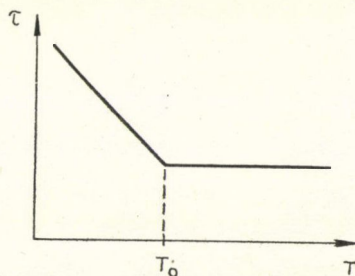
ahol $\Delta F_0 = \tau_0 b \Delta A$, az akadály erőssége és τ_0 az akadályon való áthaladáshoz szükséges feszültség $T=0$ hőmérsékleten. Behelyettesítve ezt (15)-be és kifejezve τ -t, a

$$\tau = \tau_0 - \left(\frac{k}{V} \ln \frac{\dot{\epsilon}_0}{\dot{\epsilon}} \right) T; \quad T \leq T_0 \quad (17)$$

lineáris hőmérsékletfüggést kapjuk, ahol $V = b \Delta A$, az aktiválási térfogat. A 6. ábra mutatja sematikusan a $\tau - T$ összefüggést. Itt T_0 az a hőmérséklet, ahol az akadályon való átjutás már teljesen a termikus fluktuációk révén fedeződik. A (17) összefüggés



5. ábra. Derékszögű kölcsönhatási profil



6. ábra. A folyáshatár sematikus hőmérsékletfüggése derékszögű kölcsönhatási profil esetén

jól teljesül többféle akadály esetén felületcentrált köbös (fck) fémek esetén. Az aktiválási entalpiát ekkor a (16) kifejezés adja meg, és általában $T_0 \gtrsim 300$ K.

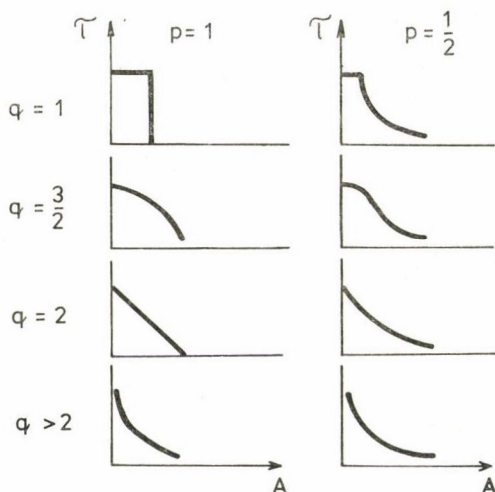
Ha a kísérletileg észlelt $\tau - T$ összefüggés nem lineáris, akkor a diszlokáció-akadály kölcsönhatás nem közelíthető derékszögű profillal. Ilyenkor a (16) kifejezés következő empirikus általánosítását szokás alkalmazni [6]:

$$\Delta G = -kT \ln \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} = \Delta F_0 \left[1 - \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^p \right]^q, \quad (18)$$

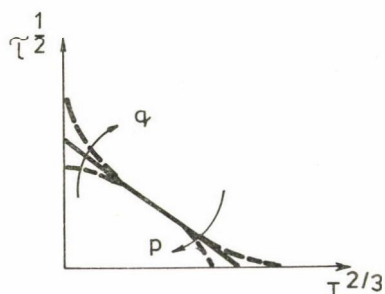
ahol a kísérleti tapasztalatok szerint

$$0 < p \leq 1; \quad 1 \leq q \leq 2. \quad (19)$$

A p, q értékekből következtetni lehet a kölcsönhatási profilra. Néhány egyszerű esetre a 7. ábra mutatja a profil alakját. p és q értékére a 8. ábrán látható módon következtethetünk. A $\tau^{1/2} - T^{2/3}$ görbe egyenes $p = \frac{1}{2}, q = \frac{3}{2}$ esetén. A görbe egyenes-től való eltéréseiből az ábrán megjelölt irányú p, q változások állapíthatók meg.



7. ábra. Kölcsönhatási profilok alakja különböző p és q értékek esetén



8. ábra. A p és q paraméter meghatározása kísérleti görbékéből. Az egyenes a $p = \frac{1}{2}, q = \frac{3}{2}$ értékekhez tartozik.

4.4. A stacionárius kúszás egy modellje

A termikusan aktivált alakváltozási folyamatok egy jellegzetes példája a stacionárius (állandó sebességű) kúszás.

Eredményeink lehetőséget adnak fck fémek stacionárius kúszási sebességének egy értelmezésére. A stacionaritásból következik, hogy a diszlokációk az adott τ feszültség hatására állandó sebességgel mozognak tekinthetők az ugyancsak állandó

elrendezésű akadályokon való folyamatos termikus aktiválás segítségével. Ezért a (4) egyenletben a B mennyiség most fordítottan arányos az akadály aktiválásához szükséges átlagos várakozási idővel, ami viszont fordítottan arányos az aktiválási valószínűséggel, tehát

$$B = B_0 e^{\frac{\Delta G}{kT}}, \quad (20)$$

ahol B_0 arányossági tényező. Ezt és a $\tau_b \approx 0$ közelítést felhasználva (4)-ből

$$v = \frac{b}{B_0} e^{-\frac{\Delta G}{kT}} \tau. \quad (21)$$

Ugyancsak a stacionaritás miatt a ϱ_m diszlokációsűrűség is állandónak tekinthető és τ -val a következő kapcsolatba hozható [2] (lásd 2. fejezet):

$$\varrho_m = \frac{1}{\alpha^2 b^2} \left(\frac{\tau}{\mu} \right)^2, \quad (22)$$

ahol $\alpha \sim 1$ nagyságú arányossági tényező és μ a nyírási modulusz. Ezt és (21)-et (2)-be helyettesítve az alakváltozás sebessége:

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{\alpha^2 B_0} \mu \left(\frac{\tau}{\mu} \right)^3 e^{-\frac{\Delta G}{kT}}. \quad (23)$$

Ez a formula jó egyezést ad pl. az alumínium stacionárius kúszására [8—10], azonban általában a kísérleti eredményekhez az alábbi empirikus formula illeszthető jól [11]:

$$\dot{\epsilon} = A_0 \mu \left(\frac{\tau}{\mu} \right)^n e^{-\frac{\Delta G}{kT}}, \quad (24)$$

ahol $n > 3$. Ez az összefüggés tércentrált köbös fémek esetén is alkalmazható, azonban ekkor $n=8$ is lehetséges [12]. Megjegyezzük azonban, hogy (24)-ből általában csak egy látszólagos szabadentalpia változás határozható meg, mert ha μ és A_0 esetleges hőmérsékletfüggését is figyelembe vesszük, akkor

$$\Delta G' = - \left[\frac{\partial \ln \dot{\epsilon}}{\partial \left(\frac{1}{kT} \right)} \right]_{\tau} = \Delta G - (n-1) \frac{\partial \ln \mu}{\partial \left(\frac{1}{kT} \right)} - \frac{\partial \ln A_0}{\partial \left(\frac{1}{kT} \right)}, \quad (25)$$

ami nem egyenlő a valódi ΔG -vel.

A kísérleti tapasztalattal egyező (24) formula eltérése (23)-tól arra utal, hogy a diszlokációk állandó sebességű mozgását a stacionárius kúszás során általában nemcsak egyfajta akadályok termikus aktiválása szabja meg, hanem egyéb, pl. további súrlódás jellegű hatások is fellépnek. Ez jelentkezik τ háromnál magasabb hatványában.

5. AZ AKADÁLYOK TERMÉSZETE ÉS ERŐSSÉGE

A diszlokáció mozgás során termikusan aktiválható akadályok két csoportba sorolhatók aszerint, hogy az akadályozó hatás a diszlokációvonal mentén lokalizáltan, vagy kiterjedten jelentkezik [13]. Lokalizált akadályok pl. az oldott ötvöző atomok, Guinier—Preston zónák, átvágható kiválások stb. Vonalmenti (lineáris) akadályozó hatás lép fel a Peierls feszültség révén, keresztcsúszás során, vagy Lomer—Cottrell akadály mentén [2] stb. Mindkét típusú akadályra az jellemző, hogy a diszlokáció áthaladása során a szabadentalpia változásnak maximuma van. Ez eredményezi a termikus aktiválhatóságot. Vannak azonban a kristályban olyan akadályok is, amelyek termikusan nem aktiválhatók. Ez a helyzet pl. ha a diszlokáció áthaladásához szükséges szabadentalpia változásnak nincs maximuma (pl. rendezett ötvözetekben antifázis határ átmetszése). Lehetséges az is, hogy van ugyan maximum, de vagy az aktiválási entalpia értéke olyan nagy, hogy a termikus aktiválás valószínűsége elhanyagolható (pl. a hosszú távú feszültségek hatása), vagy az akadályon való áthaladás viszonylag hosszú diszlokációs szakasz nagy távolságú mozgását teszi szükségessé (pl. az Orowan mechanizmus).

Az ilyen akadályok a folyáshatárhoz gyakorlatilag hőmérséklet független járást eredményeznek. Ez az oka, hogy viszonylag alacsony hőmérsékleteken ($T < 0,5 T_{olv}$, ahol T_{olv} az olvadáspont hőmérséklete) a τ_f folyásfeszültség mindig egy hőmérsékletfüggő $\tau(T)$ és egy „hőmérséklet független” τ_μ tag összegeként adható meg:

$$\tau_f = \tau(T) + \tau_\mu. \quad (26)$$

Itt a μ index arra utal, hogy a rugalmas állandókon keresztül τ_μ is függhet a hőmérséklettől.

A termikusan aktiválható akadályokat csoportosíthatjuk a ΔF_0 erősségük szerint is. Néhány jellemző példát erre az 1. Táblázatban adtunk meg.

1. TÁBLÁZAT
Különböző akadályok erőssége

	ΔF_0	Példa
Gyenge	$< 0,2 \mu b^3$	oldott atomok, Peierls feszültség
Közepes	$\approx 0,5 \mu b^3$	Erdő diszlokációk átmetszése
Erős	$> \mu b^3$	Kiválások átvágása

6. DISZLOKÁCIÓK SÚRLÓDÓ MOZGÁSA

A diszlokáció mozgást szükségszerűen fékezi egy sor súrlódás jellegű hatás is. Ezek szerepe azonban csak nagy sebességű alakításoknál ($\dot{\epsilon} > 10^3/s$) jelentkezik, amikor az alkalmazott feszültség olyan nagy, hogy a diszlokációt valamennyi akadályon termikus aktiválás nélkül átsodorja. Ilyenkor a stacionárius diszlokáció mozgás sebességét az alábbi folyamatok során fellépő energiaveszteségek korlátozzák [14]:
a) Termoelasztikus változások miatt hőveszteség.

- b) Fonon szórás lép fel: 1) a rugalmas állandók nem lineáris deformációkkal kapcsolatos lokális megváltozása miatt; 2) a diszlokáció üreg menti sűrűség változásokon; 3) lokális feszültségterek fel- és leépülése miatt.
- c) Alacsony hőmérsékleten elektron szórás miatt.
- Ezen jelenségek részletes vizsgálatával kapcsolatban az irodalomra utalunk [14, 15].

IRODALOM

1. *S. P. Timoshenko*: History of Strength of Materials, Mc Graw Hill, New York, 1953.
2. *I. Kovács and L. Zsoldos*: Dislocations and Plastic Deformation, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.
3. *Kovács I.*, Magyar Fizikai Folyóirat 28, 3, 1980.
4. *M. F. Ashby*, Acta Met. 20, 887, 1972.
5. *M. F. Ashby and H. J. Frost*: Constitutive Equations in Plasticity, ed. A. S. Argon. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1975, p. 117.
6. *U. F. Kocks, A. S. Argon and M. F. Ashby*: Thermodynamics and Kinetics of Slip, Progress in Materials Science, Vol. 19. Pergamon Press, Oxford, 1975.
7. *T. Surek, M. J. Luton and J. J. Jonas*, Phil. Mag. 27, 425, 1973.
8. *J. H. Gittus*, Acta Met. 22, 789, 1974.
9. *Brájer L., Kovács I. és Tasnádi P.*, Magyar Fizikai Folyóirat, 23, 441, 1975.
10. *J. Gittus*: Creep, Viscoelasticity and Creep Fracture in Solids, Applied Sci. Publ. London, 1975.
11. *R. L. Stocker and M. F. Ashby*, Scripta Met. 7, 115, 1973.
12. *A. Juhász, I. Kovács and I. Vitányi*, J. Less Common Metals, 61, 309, 1978.
13. *J. E. Dorn*: Dislocation Dynamics, ed. A. R. Rosenfield et. al., Mc Graw Hill, New York, 1968.
14. *F. R. N. Nabarro*: Theory of Crystal Dislocations, Clarendon Press, Oxford, 1967.
15. *V. I. Alsic u V. L. Indenbom*: Dinamika dislokacii, Problemü szobremennoj krisztallografii, Nauka, Moszkva, 1975. p. 218.

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

2. FELÜLETENCENTRÁLT KÖBÖS EGYKRISTÁLYOK ALAKÍTÁSI KEMÉNYEDÉSE

VÖRÖS GYÖRGY és KOVÁCS ISTVÁN
ELTE, Általános Fizika Tanszék

1. BEVEZETÉS

A fémek képlékeny alakítása folyamán belső szerkezetük megváltozik és ezzel együtt az alakítással szembeni ellenállásuk is megnő. Ezt a jelenséget alakítási keményedésnek nevezzük. A mindennapi gyakorlati felhasználás során, ritka kivételtől eltekintve, polikristályos fémeket alkalmazunk, amelyek bizonyos értelemben homogénnek és izotropnak tekinthetők. Ezek az anyagok egykristályokból összetettek, ezért az alakítási keményedés természetének vizsgálatát az egykristályok tanulmányozásával célszerű elkezdeni. Ebben a dolgozatban a felületencentrált köbös (fcc) kristályok tulajdonságait tárgyaljuk. Mivel e témakörben már magyarul is több összefoglaló munka jelent meg [1–3], ezért csak a legfontosabb jelenségekre vonatkozó ismereteket foglaljuk röviden össze.

2. EGYKRISTÁLYOK ALAKVÁLTOZÁSA

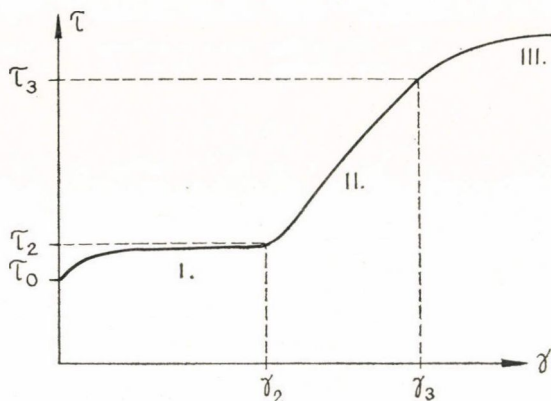
Egykristály próbatestek húzóvizsgálatai a polikristályos fémektől jelentősen különböző eredményeket szolgáltatnak [1]. A mérések azt mutatják, hogy az alakváltozás nem homogén módon indul meg az egész kristályban, hanem csak jól meghatározott síkok és irányok mentén. Ezek a síkok szoros kapcsolatban vannak a vizsgált anyag kristálytani síkjaival. Mikroszkóppal tanulmányozva a deformált kristály felületét, azon csúszásvonalakat találunk. A deformáció növekedtével a csúszásvonalak sokasága sávokká tömörül. A sávok között csúszásmentes tartományok találhatók.

A képlékeny alakváltozás megindulásához meghatározott feszültségre van szükség. Azt a feszültséget, amely a csúszósíkban a csúszás irányában hat, és éppen megindítja a csúszást, kritikus csúsztató feszültségnek (critical resolved shear stress) nevezzük. Ez függ az alakítás sebességétől is, a következőkben azonban ez utóbbit adott vizsgálat során állandónak tételezzük fel.

3. FCC KRISTÁLYOK ALAKÍTÁSI KEMÉNYEDÉS GÖRBÉJE

Az fcc kristályok alakváltozási mechanizmusa a legismertebb az összes fémek között. Ennek oka az, hogy az fcc fémek elemi cellája mindössze egyetlen atomot tartalmaz és az elcsúszások a szoros illeszkedésű síkok mentén mennek végbe. Az fcc fémek csúszási rendszerei jól szemléltethetők a Thompson tetraéder segítségével [1, 4].

Tipikus alakítási keményedési görbét láthatunk az 1. ábrán. Ez a görbe a τ csúsztató feszültség és az előzetes γ nyírási alakváltozás közti függvénykapcsolatot adja meg. Az alakítási keményedési görbe jól látható módon három elkülöníthető szakaszra bontható. A plasztikus alakváltozás megindulásához τ_0 feszültségre van szükség. Ennél kisebb feszültség esetén csak rugalmas és anelasztikus [5, 6] alakvál-



1. ábra. Fek egykristály tipikus keményedési görbéje

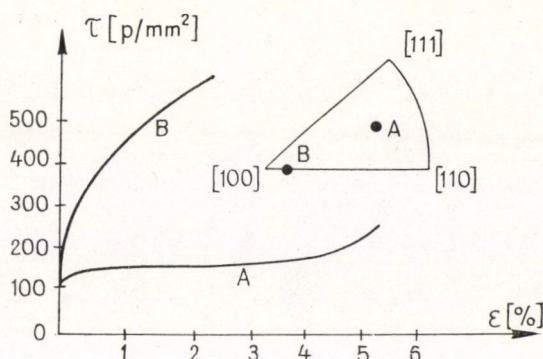
tozást tapasztalunk. A kritikus csúsztató feszültséget elérve, egy rövid átmeneti tartomány után lassan változó szakasz következik, amelyet lineárisnak tekintünk. Ennek meredekségét keményedési sebességnek nevezzük és a

$$\theta_1 = \frac{d\tau}{d\gamma} \quad (1)$$

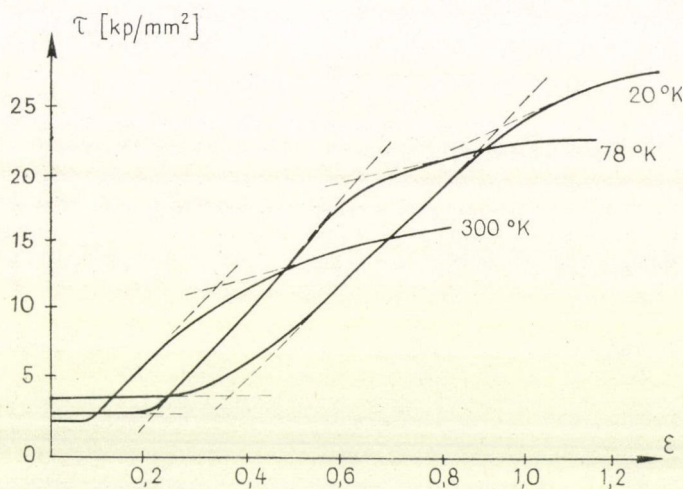
kifejezéssel definiáljuk. További feszültség növekedésre egy újabb átmeneti tartomány után a görbe meredksége ugrásszerűen megnő, és a deformáció ismét közelítőleg lineárisan változik a feszültséggel. Ezt a II. lineáris szakaszt is a θ_{II} meredekséggel jellemezzük. A második szakaszt követően az alakítási görbe meredksége monoton csökken. Ez a III. szakasz az ún. parabolikus keményedési tartomány.

Az alakítási keményedési görbe erősen orientációfüggő. A 2. ábrán A1 egykristály keményedési görbéjét láthatjuk a külső terhelés irányához képest két különböző orientációjú próbatest esetén [7]. Ha a nyújtási irányt jellemző A pont a sztereografikus háromszögben [3] az ábrán jelzett belső helyzetű, akkor csak egyetlen csúszási rendszer aktiválódik kezdetben, vagyis ekkor a folyamatban az egyszeres csúszás dominál (A görbe). Ha a nyújtási irányt jellemző pont egy sarok környezetében van (B pont), akkor többszörös csúszás alakul ki (B görbe). Látható, hogy az alakítási keményedés menete jelentősen függ a nyújtási irány és a kristály kölcsönös helyzetétől. Az I. szakasz hosszúsága is erősen függ az orientációtól. Ez maximális értékű akkor, ha a nyújtási irányt jellemző pont szimmetrikusan helyezkedik el a sztereografikus háromszögben.

A 3. ábra mutatja a keményedési görbék hőmérséklet függését Ni egykristály esetén [4]. Az ábráról leolvasható, hogy a τ_0 folyásfeszültség csak gyengén függ a hő-



2. ábra. Alumínium egykristály keményedési görbéjének orientáció függése



3. ábra. Nagy tisztaságú nikkkel egykristály keményedési görbéjének hőmérséklet függése

mérséklettől, míg θ_I és θ_{II} gyakorlatilag állandó értékű. Igen erősen csökken viszont a harmadik szakasz kezdetéhez tartozó τ_3 feszültség, valamint az I. szakasz hosszúsága, ha az alakítás hőmérséklete növekszik. τ_3 hőmérsékletfüggése termikusan aktivált folyamatok jelenlétére utal a III. szakaszban.

4. AZ ALAKÍTÁSI KEMÉNYEDÉS MIKROSZERKEZETI ÉRTELMEZÉSE

4.1. A τ folyásfeszültség

A jól hőkezelt kristály is jelentős mennyiségű diszlokációt és diszlokáció forrást tartalmaz [1]. A diszlokációk külső feszültség hatására elmozdulnak, illetve a diszlokáció források aktiválódnak és hurkokat bocsátanak ki [1, 9]. A diszlokációk mozgását különböző eredetű akadályok nehezítik. Ilyenek például a többi diszlokáció feszültségtérre, diszlokációk metszése stb. Az álló, párhuzamos diszlokációk feszültségtérének legyőzéséhez szükséges feszültség a folyásfeszültségben egy hőmérséklet független járulékot eredményez. A diszlokációk metszésekor keletkező lépcső képződéséhez szükséges munkát pedig fedezheti egyrészt a külső feszültség, másrészt a termikus fluktuációkból származó energia. Ez utóbbi véges hőmérsékleten egy hőmérsékletfüggő tagot eredményez a folyásfeszültségben. Mindezeket figyelembe véve Seeger egy elméleti modellt dolgozott ki a folyásfeszültség kiszámítására [10]. A modell alapján egy vizsgált diszlokációnak a csúszósíkjával párhuzamos síkban elhelyezkedő álló diszlokációk eredő feszültségtérében való mozgatásához szükséges feszültség [10]:

$$\tau_u = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)l_0} \quad (2)$$

nagyságú, ahol μ a torzió modulusz, b a Burgers vektor abszolút értéke, l_0 a párhuzamos csúszási síkok távolsága és ν a Poisson szám. A hőmérsékletfüggő tag meghatározásához feltételezzük, hogy a lépcsőképződéshez U_0 nagyságú energiára van szükség. Ebből a külső feszültség $(\tau - \tau_u) V$ nagyságú részt fedez. Így a rácsrezgések termikus fluktuációjának a

$$Q = U_0 - (\tau - \tau_u)V$$

nagyságú részt kell fedezni. V az aktiválási térfogat (1. fejezet), amely a diszlokáció metszésre jellemző. Ezt felhasználva a folyásfeszültség a következő alakban adható meg (1. fejezet):

$$\tau = \tau_u + \frac{U_0 - kT \ln(NFbv_0/\dot{\epsilon})}{V}. \quad (3)$$

Itt U_0 általában 0,4–5 eV közé eső érték [10], k a Boltzmann állandó, N a diszlokáció sűrűség, v_0 frekvencia jellegű mennyiség, $\dot{\epsilon}$ a deformáció sebessége. A valóságban a (3) kifejezésből csak egy átlagos U_0 energia határozható meg. Ugyanis az alakítás során a csavar-, illetve éldiszlokációk mozgása egyaránt jelentős, és ezek metszése más-más aktiválási energiát igényel.

4.2. Az alakítási keményedés első szakasza

Az alakítási folyamat első szakaszának mikroszerkezeti értelmezéséhez jelentős segítséget nyújtottak Mader, Seeger és Thieringer [11], valamint Mader [12] nikkal és nikkal-kobalt egykristályokon végzett elektronmikroszkópos vizsgálatai. Vizsgálataikban 40, 60 és 67% Co tartalmú Ni kristályokat tanulmányoztak. Megállapították,

hogy a keményedés első szakaszában a diszlokációsűrűség alacsony értékű, és a hely függvényében alig változik. A diszlokációk kb. 85%-ban dipólusokként [9] vannak jelen. A dipólusok távolsága 50 és 350 Å között változik. Hosszúságuk rendkívül nagy, 1-től 20 μ-ig terjed. Seeger feltételezése szerint a dipólok Tetelman mechanizmussal [13] alakulnak ki, beleértve a szomszédos párhuzamos csúszósíkokon levő diszlokációk közötti rugalmas kölcsönhatást is. A rugalmas kölcsönhatás valószínűleg nem domináló tényező a dipól alakzat szerkezetében, mivel a dipólok rendkívül hosszúak, és általában merőlegesen a primer Burgers vektor irányára. Steeds [14] réz egykristály alakításakor az első szakaszban 5–10 μ hosszúságú dipól kötegeket figyelt meg. A köteget felépítő elemi dipólok hosszúsága kb. 1 μ és szélességük néhány száz Å volt. Így levonható az a következtetés, hogy a keményedés első szakasza a diszlokáció dipólok megjelenésével jellemezhető és ezek kölcsönhatásban állnak a jelenlevő erdő diszlokációkkal [15].

Berner [16] valamint Diehl és Berner [17] réz egykristály folyásfeszültségének hőmérsékletfüggését vizsgálva megállapították, hogy az első szakaszban a

$$\frac{d\tau_{\mu}}{d\gamma} \gg \frac{d\tau_T}{d\gamma}$$

összefüggés érvényes, amelyben τ_T a hőmérséklet függő részét jelenti a folyásfeszültségnek. Láttuk, hogy a folyásfeszültség a két rész összegeként adható meg és így a deriváltban a hőmérsékletfüggő járuléka elhanyagolható. Ez egyben az egyik alapfeltevése Seeger és munkatársai „könnyű csúszás elméletének” [18]. Ez az elmélet nagyon hasonlít a Taylor által kidolgozott első keményedési modellre [19].

Seeger és munkatársai elmélete a következőképpen foglalható össze. A Frank—Read források által kibocsátott diszlokációk mindaddig mozoghatnak, amíg a többi csúszósíkban levő diszlokáció feszültségtete által fellépő taszító hatás le nem állítja a mozgásukat. A leállított diszlokáció visszahat a forrás működésére és a következő diszlokáció hurok kibocsátásához nagyobb feszültségre lesz szükség. Az elméletben feltételezik, hogy a források száma az I. és II. szakaszban a keményedés során állandó marad. A modell az első szakasz meredekségére a következő eredményt adja [18]:

$$\frac{\theta_1}{\mu} = \frac{8}{9\pi} \left(\frac{x}{L_c} \right)^{3/4}, \quad (4)$$

ahol L_c a csúszásvonalak, x a csúszási síkok távolságát jelöli. A (4) kifejezés jól egyezik a Ni—Co kristályokon végzett mérések eredményével. Eltekintve attól, hogy a fenti elmélet nem veszi figyelembe a diszlokáció dipólok jelenlétét, az egyik legelfogadhatóbb magyarázatát adja az I. szakasz tulajdonságainak.

Hirsch egy másik modellt dolgozott ki. Eszerint a mozgó diszlokációk számára a kristályt dipólokból összeálló kötegek teszik áthatolhatatlanná [14]. Az ennek alapján végzett meggondolás eredménye alig változtat a (4) összefüggésen. Ez arra utal, hogy ha ez a modell helyes, akkor a keményedés szempontjából a dipólok jelenléte a fontos, nem pedig a dipólok szerkezete. A dipól kötegek Sharp és Makin [20] által javasolt mechanizmussal jöhetnek létre. A dipólokat a közel elcsúszó diszlokációk „átkarolják”, és az így keletkezett fonatok merőlegesen helyezkednek el a csúszási irányra.

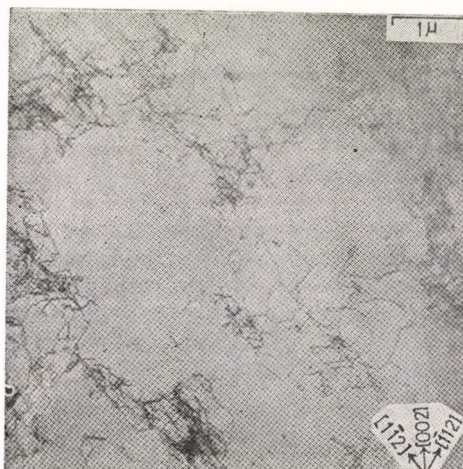
4.3. AZ ALAKÍTÁSI KEMÉNYEDÉS MÁSODIK SZAKASZA

A második szakaszban a keményedés sebessége körülbelül tízszer akkora, mint az elsőben (1. ábra). θ_{II} nagysága, az alumíniumot kivéve, jellemző és közel állandó értékű az összes fcc fémre. A második szakasz kezdete (3. ábra) egybeesik a szekunder csúszási rendszerek működésének megindulásával. Erre vonatkozólag közvetlen elektronmikroszkópos megfigyeléseket végeztek Cu és Ni—Co egykristályokon [12]. A csúszásvonalak metallográfiai vizsgálata szerint a csúszásvonalak L hossza és a nyírási deformáció nagysága között a következő összefüggés áll fenn:

$$L = \frac{\Omega}{\gamma - \gamma^*}, \quad (5)$$

ahol Ni—Co egykristályra $\gamma^* \approx \gamma_2$ nagyságú és $\Omega \sim 4 \cdot 10^{-4}$ cm értékű. Az (5) összefüggés az egyik kiindulási pontja a Seeger féle hosszú távú feszültségtér elméletnek [21]. Mader [12] Ni—Co kristályok elektronmikroszkópos vizsgálatakor a diszlokáció szerkezet következő jellegzetes tulajdonságait alapította meg. A diszlokációk heterogenitása a deformáció növekedtével egyre erőteljesebbé válik. A II. szakasz végére a diszlokáció kötegekből jól definiált cellaszerkezet alakul ki, összetekeredett, véletlenszerű diszlokáció hálózat sehol sem figyelhető meg. A diszlokációk szabályosan rendeződnek el a fő csúszási irányokban és jelentős részük éldiszlokáció. Néhány helyen feltorlódott diszlokációk is megfigyelhetők a kristályban. A primer és szekunder csúszósíkok metszésénél hosszú diszlokáció vonalak figyelhetők meg. Ezek kontaszta különbözik a többi diszlokációtól és valószínűleg Cottrell—Lomer akadályokkal azonosíthatók. A hosszú diszlokáció dipólok, amelyek az alakítási keményedés első szakaszában alakultak ki, felhasadnak rövidebbekre vagy átalakulnak elnyújtott hurokká.

Fourie és Murphy [22] megállapította, hogy az I. szakasz befejeződése és a II. szakasz kezdetekor a diszlokáció dipól kötegek számának növekedése felgyorsul. Ennek alapján a második szakasz akkor kezdődik [14], amikor a diszlokáció dipól kötegek között levő távolság már olyan kicsi, hogy a rajtuk feltorlódott diszlokációk által keltett belső, valamint a külső feszültség együttes hatása aktiválni tudja a szekunder csúszási rendszereket. Ez a folyamat diszlokáció reakciók [11] révén Cottrell—Lomer akadályok keletkezéséhez vezet, amelyek legalábbis a II. szakasz kezdetén [23] további diszlokáció feltorlódásokhoz vezetnek és keményítik a kristályt. Az újabb csúszási rendszerek aktiválódásával egyre heterogénebb diszlokáció elrendeződés jön létre, és megindul egy ún. cellaszerkezet kialakulása [24] (4. ábra). A nagy diszlokáció sűrűségű kötegek a vizsgált réz egykristályban a primer [112] csúszási síkok mentén jönnek létre, de tartalmaznak diszlokációkat más csúszási rendszerekből is



4. ábra. Cellaszerkezet kialakulása deformált réz egykristályban

[25]. A szekunder rendszerekben mozgó diszlokációk azonban csak a cellafalak közötti térben mozoghatnak, így aránylag kis deformációkat hoznak létre. Mozgásukat főként a cellafalak között uralkodó hosszú hatótávolságú erők szabják meg. Ez lényegében Hirsch II. szakaszra vonatkozó keményedési modellje [14], amely a dipól kötégek figyelembevételében különbözik Seeger elméletétől [21].

A második szakaszra vonatkozó Seeger elmélet azon alapszik, hogy a kísérleti tapasztalat szerint az alakítás mértékének növekedtével lecsökken a csúszási vonalak átlagos távolsága. Ez a szekunder csúszási rendszerek működésbe lépésével magyarázható. A szekunder csúszások azonban Cottrell—Lomer akadályokat hoznak létre, amelyek száma a II. szakaszban állandóan növekszik. Kvantitatív megfontolások a következőképpen tehetők. Tegyük fel, hogy a működő források száma is monoton nő, és írjuk fel az (5) összefüggést most az

$$L = \frac{\Omega}{\gamma} \quad (6)$$

alakban. Itt γ a II. szakaszban megfigyelhető deformációt jelöli. Legyen a diszlokáció források által kibocsátott diszlokációk n száma független a deformációtól. (Ez jól egyezik a csúszási lépcsők magasság vizsgálatának eredményeivel [26].) Ha az aktív diszlokáció források száma térfogategységenként N , akkor a deformáció nagysága a következő [15]:

$$d\gamma = L^2 nb dN. \quad (7)$$

Felhasználva a (6) egyenletet, integrálás után N -re az

$$N = \frac{\gamma^3}{3nb\Omega^2} \quad (8)$$

kifejezést kapjuk. Minden egyes forráshoz tartozó diszlokáció csoportot egyetlen szuper-diszlokációként kezelhetünk. Az ilyen diszlokációk közötti átlagos R távolság:

$$R = \frac{1}{\sqrt{NL}}. \quad (9)$$

Az egymástól R távolságban levő szuper diszlokációk egymásra

$$\tau_\mu = \alpha \frac{nb\mu}{2\pi R} = \alpha \frac{nb\mu}{2\pi} \sqrt{NL} \quad (10)$$

nagyságú feszültséget gyakorolnak. N értékét (8)-ból (10)-be helyettesítve a folyásfeszültségre a

$$\tau_\mu = \frac{\alpha nb\mu\gamma}{2\pi \sqrt{3nb\Omega}} \quad (11)$$

formula adódik, ahol α egységnyi nagyságrendű állandó. A második szakasz meredeksége (11)-ből:

$$\frac{\theta_{II}}{\mu} = \frac{\alpha}{2\pi} \sqrt{\frac{nb}{3\Omega}}. \quad (12)$$

Ha feltételezzük, hogy $n \sim 25$ és $\Omega \sim 5 \cdot 10^{-4}$ cm, akkor

$$\frac{\theta_{II}}{\mu} \cong \frac{1}{300} \quad (13)$$

nagyságúnak adódik minden fcc fémre. A (12) kifejezésből számított értékek jól egyeznek a Cu, Ni és Ni + Co kristályokon kapott eredményekkel [15].

A II. szakasz elméleti értelmezésére még nagyszámú további modell is született. Ezek részleteivel kapcsolatban az irodalomban található összefoglaló munkákra utalunk [1—3, 15, 27—34]. Az egyes elméletekkel kapcsolatban most az alábbi problémákat foglaljuk röviden össze.

Valamennyi eddigi elméletnek vannak gyenge pontjai. A Seeger-féle hosszú távú feszültségterek hatásával és a feltorlódott diszlokáció halmazokkal kapcsolatos probléma az, hogy a Cottrell—Lomer akadályok sem számban, sem erősségben nem tűnnek elegendőnek az elmélet alátámasztására. Nem érthető továbbá, hogy a feltorlódott halmazok diszlokációi miért nem mozognak visszafelé a külső terhelés megszűnése után.

A diszlokációlépcsők keletkezésére [35, 36], a diszlokációforrások működéséhez szükséges feszültség növekedésére [37], valamint az erdő diszlokációk átmetszésére [38] alapozott elméletek támadható pontja pedig abban rejlik, hogy egyik esetben sem világos az a mechanizmus, amely a diszlokációmozgást adott feszültség esetén megállítja.

A diszlokációmozgást akadályozó hatások heterogenitása miatt az alakítási keménység sztochasztikus modell alapján is megkísérelték magyarázni [39].

A különböző elméleti vizsgálatok áttekintése azt mutatja, hogy az egyes modellek eredményei nem nagyon érzékenyek a modell részleteire. Az a tény azonban, hogy a θ_{II} paraméter valamennyi fcc fémre a hőmérséklettől is független állandó, arra utal, hogy legalábbis a II. szakasz értelmezésének valamely egyszerű és fundamentális felismeréssel kell kapcsolatban lennie.

Erre egy egyszerű dimenzionális megfontolással is rámutathatunk. Tegyük fel, hogy a diszlokációk mozgatásához szükséges csúsztató feszültség csak az anyag nyírási modulusának, a Burgers vektornak és a diszlokációsűrűségnek a függvénye. Ekkor dimenzionális okok miatt a τ/μ hányados csak a $bN^{1/2}$ függvénye lehet. A diszlokációk elméletéből ismeretes azonban [1], hogy mind a diszlokációk kölcsönhatásából, mind pedig egy diszlokáció esetén a vonalmenti feszültségtől származó (a diszlokációk mozgását akadályozó) feszültségek a Burgers vektorral arányosak. Ebből következik, hogy a deformáció során fellépő folyásfeszültség legegyszerűbben a következő alakban adható meg:

$$\tau = \alpha \mu b N^{1/2}. \quad (14)$$

Valamennyi eddig ismert elmélet lényegében erre az összefüggésre vezet. A különböző modellek csak az α arányossági tényezőre adnak nem lényegesen különböző értékeket, általában a 0,2 és 1 határok között [34].

Ha a diszlokációmozgást megállító mechanizmus mibenlétének kérdéséről eltekintünk, amely egészében egyetlen elméletben sem világos, akkor az alakítási keménységre kvantitatív összefüggést a mozgást akadályozó mechanizmus részleteire vonatkozó legkevesebb feltevessel az alábbi módon kaphatunk.

Tegyük fel, hogy $d\tau$ feszültségnövekmény hatására a működő forrásokból térfogategységenként dn számú diszlokáció hurok keletkezik, amelyek átlagos szabad

úthossza (átlagos sugara) l és a deformáció növekmény kialakításában csak ezen diszlokációk járuléka lényeges. Akkor a deformáció növekmény:

$$d\gamma = \beta_1 l^2 b dn, \quad (15)$$

ahol β_1 arányossági tényező. A diszlokáció sűrűség növekmény pedig a következő:

$$dN = \beta_2 l dn = \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{d\gamma}{bl}, \quad (16)$$

ahol β_2 állandó.

Tegyük fel továbbá, hogy az l átlagos szabad úthossz a folyásfeszültséggel fordítottan arányos, akkor (16)-ból

$$\tau = \beta \mu b^2 \frac{dN}{d\gamma}, \quad (17)$$

ahol β (β_1, β_2 -t tartalmazó) dimenzió nélküli arányosság tényező. Ez az összefüggés semmilyen feltevést nem tartalmaz az akadályozó mechanizmus természetére nézve, és magában foglalja azt, hogy a diszlokáció sűrűség növekmény a plasztikus munkával arányos [38]. Nyilvánvaló, hogy (17) teljesíti a dimenziális megfontolásainkkal kapcsolatos követelményeket, továbbá, hogy a lineáris szakaszban (ahol $d\gamma = \theta_{II}^{-1} d\tau$):

$$\tau = \sqrt{\frac{2\beta\theta_{II}}{\mu}} \mu b N^{1/2}, \quad (18)$$

ahol a gyökjel alatti mennyiség állandó és a (14)-beli arányossági tényezőt adja meg, (17) tehát biztosan igaz a II. szakaszra.

4.4. Az alakítási keményedés harmadik szakasza

A harmadik szakaszban az alakítási keményedést jellemző $\theta = \frac{d\tau}{d\gamma}$ paraméter monoton csökken. A III. szakasz általában akkor kezdődik, ha a feltorlódott csavar-diszlokációk keresztcsúszásához a lokális feszültség elegendően nagy. Ebben a szakaszban megfigyelhető, hogy a keresztcsúszások nyoma nagymértékben megnövekszik a felületen. Nagy számban fordulnak elő egymással nem párhuzamos csúszási sávok, amelyek a csavardiszlokációk keresztcsúszásának nyilvánvaló következményei. A harmadik szakasz kezdetéhez tartozó feszültség hőmérséklet és deformáció sebességfüggése könnyen magyarázható a termikusan aktivált keresztcsúszási folyamatokkal [1]. A III. szakasz mikroszkopikus értelmezésére legkorábban Seeger és Berner [40] állított fel termikusan aktivált keresztcsúszási folyamatokra alapozott modellt.

Nem mutatható ki lényeges különbség a diszlokációszerkezetben az alakítási keményedés II. és III. szakasza között [25, 41–43]. A megfigyelések szerint a diszlokáció elrendeződés jellege nem változik, csak a jellemző méreteken (diszlokációfalak és cellák mérete, az átlagos szabad diszlokációhossz a kötégekben stb.) következik be monoton csökkenés.

Mindezek a megfigyelések egyik jelenleg ismert elméletet sem támasztják egyértelműen alá, hanem azt mutatják, hogy több különböző mechanizmus (hosszú-

távú belső feszültségek hatása [44, 45], lépcsők képződése [35, 36], erdő diszlokációk átmetszése [38], források működtetéséhez szükséges feszültség növekedése [37] stb.) egyidejű eredménye jelentkezik.

Az alakítási keményedési görbe a III. szakaszban általában jól leírható az alábbi egyenlettel:

$$\tau = \chi \gamma^{1/2} + \tau_{30}; \quad \tau > \tau_3, \quad (19)$$

ahol χ és τ_{30} a deformációtól független állandó. Ezen összefüggés alapján a keményedés „sebességét” jellemezhetjük a

$$\chi = \frac{d\tau}{d\gamma^{1/2}} \quad (20)$$

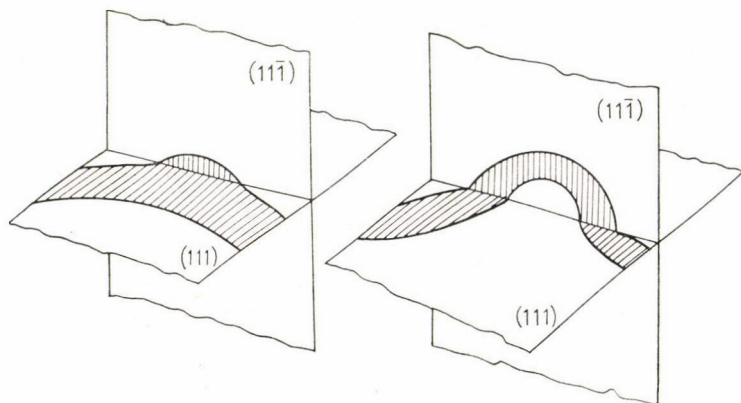
paraméterrel is. Ez a valódi keményedési sebességgel a következő kapcsolatban áll:

$$\theta_{III} = \frac{d\tau}{d\gamma} = \frac{\chi}{2\gamma^{1/2}}; \quad \tau > \tau_3, \quad (21)$$

s ez valóban monoton csökken növekvő γ -val.

4.4.1. A III. szakasz kezdetének hőmérsékletfüggése

A teljes csavardiszlokációknak nincs kitüntetett csúszási síkjuk, ezért bármely csúszási síkban folytathatják mozgásukat [1]. Az fcc kristályok véges rétegződési hiba energiája miatt a teljes diszlokációk azonban felhasadnak kiterjedt diszlokációkká, amelyeknek már egyértelműen meghatározott csúszási síkjuk van [1, 9, 46]. Egy kiterjedt csavardiszlokáció a csúszási síkját csak akkor tudja elhagyni, ha termikus aktiválás hatására lokálisan teljes diszlokációvá ugrik össze, vagy az egyik parciális lép át az új csúszósíkba és a másik később követi (5. ábra). Ez a mechanizmus az oka annak, hogy a τ_3 feszültség adott hőmérsékleten erősen függ a rétegződési hiba energiától, ha ez utóbbi növekszik, akkor τ_3 csökken, mert a diszlokáció kiterjedtsége csökken. τ_3 hőmérsékletfüggését egy sor fcc fémre a 6. ábra mutatja [47].

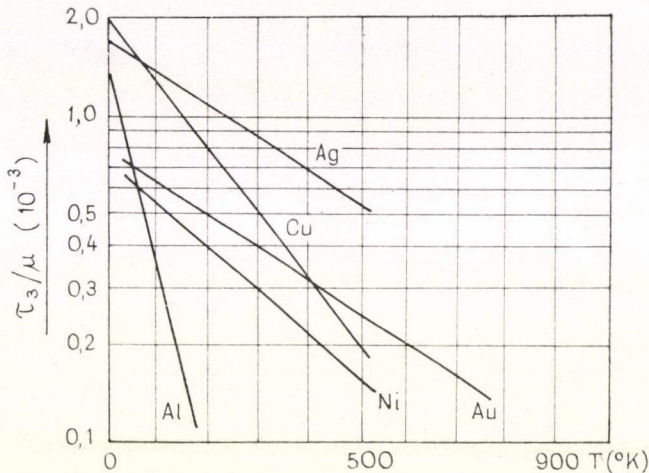


5. ábra. Kiterjedt diszlokáció kereszteszúszása

Ebből kitűnik, hogy τ_3 exponenciálisan függ a hőmérséklettől, azaz

$$\tau_3 = \tau_3(0)e^{-BT}, \quad (22)$$

ahol $\tau_3(0) \cong \frac{\mu}{700}$ nagyságú arányossági tényező és B állandó, amelynek értéke növekvő rétegződési hiba energiával csökken [3].



6. ábra. τ_3/μ hőmérséklet függése néhány fcc fém esetén

Általában a keresztcsúszás sokféle módon végbemehet, ezért termikus aktiválása nem egyetlen folyamattal kapcsolatos. Elegendően alacsony hőmérsékleten azonban lehetséges, hogy a keresztcsúszásnak csak egyetlen módja valósul meg dominánsan. Megmutatható, hogy ekkor teljesül a következő összefüggés [47]:

$$\frac{d \ln \tau_3}{d \ln \dot{\gamma}} = \frac{kT}{A_0}, \quad (23)$$

ahol $\dot{\gamma}$ az alakítási sebesség és A_0 hőmérséklet független állandó. Ha egyidejűleg többféle folyamat is jelentős a keresztcsúszásban, akkor A_0 helyett (23)-ban egy $A(T)$ hőmérsékletfüggő mennyiség szerepel. A (23) összefüggés egyenértékű (22)-vel, tehát általában csak egy mechanizmus jelentős.

4.4.2. Összefüggés a II. és III. szakasz között

Nyilvánvalóan megengedhető feltevést jelent, hogy a feszültség sima függvénye a diszlokáció sűrűségének a II. szakaszból a III-ba való átmenet során; azaz nemcsak a feszültség, hanem a diszlokáció sűrűség szerinti deriváltja is folytonosan megy át a határon, tehát

$$\left(\frac{d\tau}{dN} \right)_{II} \Big|_{\tau=\tau_3} = \left(\frac{d\tau}{dN} \right)_{III} \Big|_{\tau=\tau_3}. \quad (24)$$

Tegyük még fel, hogy legalább a *III.* szakasz kezdetére is érvényes a (17) egyenlet. Akkor az utóbbi egyenlőségek felhasználásával a *II.* és *III.* szakasz paraméterei között a következő összefüggés adódik:

$$\tau_3 = \frac{\chi^2}{2\theta_{II}} + \tau_{30}. \quad (25)$$

Mivel θ_{II} gyakorlatilag nem függ a hőmérséklettől, ezért várhatóan χ is τ_3 -hoz hasonló hőmérsékletfüggést mutat, azaz

$$\chi = \chi(0)e^{-B'T}. \quad (26)$$

A kísérletek ezt az összefüggést is igazolták [3]. $\chi(0)$ értéke közelítőleg $\mu/250$, B és B' pedig az $5 \cdot 10^{-3}$ és $2 \cdot 10^{-3}$ értékek között változik.

5. KÖVETKEZTETÉSEK

Az fcc fémek alakítási keményedésének minden részletében való pontos megértése ma még megoldatlan feladat. Áttekintésünk alapján megállapíthatjuk azonban, hogy a jelenséggel kapcsolatos alapvető folyamatok természetéről határozott és biztos ismereteink vannak, amelyek a szilárdsági tulajdonságok tudatos befolyásolására is alkalmasak. Az egyes mikroszerkezeti változásokról és folyamatokról meglevő kvalitatív ismereteink helyesek, csak a feladat bonyolultsága miatt az elméletileg meghatározott kvantitatív eredmények nem mindenben kielégítőek. Ennek elérése még további, alapvető vizsgálatokat igényel.

IRODALOM

1. Kovács I. és Zsoldos L.: Diszlokációk és képlékeny alakváltozás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
2. Kovács I., Magyar Fizikai Folyóirat, 15, 125, 1967.
3. Kovács I., Magyar Fizikai Folyóirat, 25, 130, 1977.
4. N. Thompson, Proc. Phys. Soc. B66, 481, 1953.
5. A. S. Nowick and B. S. Berry: Anelastic Relaxation in Crystalline Solids, Academic Press, New York, 1972.
6. Vörös Gy. és Kovács I., Magyar Fizikai Folyóirat, 26, 621, 1978.
7. C. R. Cupp and B. Chalmers, Acta Met. 3, 186, 1955.
8. P. Haasen, Phil. Mag. 3, 374, 1958.
9. I. Kovács and L. Zsoldos: Dislocations and Plastic Deformation, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.
10. A. Seeger: Dislocations and Mechanical Properties of Crystals, John Wiley, New York, 1957. p. 243.
11. S. Mader, A. Seeger and H. M. Thieringer, J. Appl. Phys. 34, 3376, 1963.
12. S. Mader: Electron Microscopy and Strength of Crystals, Eds. G. Thomas and J. Washburn, Interscience Publisher, 1963. p. 183.
13. A. S. Tetelman, Acta Met. 10, 813, 1962.
14. P. B. Hirsch: Relation between Structure and Strength in Metals and Alloys, Vol. I. (H. M. S. O. London) 1963. p. 39.
15. R. Bullough: Theory of Imperfect Crystalline Solids, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1971. p. 192.
16. R. Z. Berner, Z. Naturf. 15a, 689, 1960.
17. J. Diehl und R. Z. Berner, Z. Metallk. 51, 523, 1960.
18. A. Seeger, H. Kronmüller, S. Mader and H. Träuble, Phil. Mag. 6, 639, 1961.

19. G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. A145. 362, 388, 1934.
20. I. V. Sharp and M. I. Makin, AERE Report—R. 4651. 1964.
21. A. Seeger, I. Diehl, S. Mader and H. Rebstock, Phil. Mag. 2, 323, 1957.
22. T. T. Fourie and R. I. Murphy, Phil. Mag. 7, 1617, 1962.
23. B. Sestak and A. Seeger, Phys. Stat. Sol. (b) 43, 433, 1971.
24. Y. Kawasaki, J. Phys. Soc. Jap. 36, 142, 1974.
25. J. W. Steeds, Proc. Roy. Soc. 292, 343, 1966.
26. S. Mader and A. Seeger, Acta Met. 8, 513, 1960.
27. M. Bocek, Phys. Stat. Sol. 3, 2169, 1963.
28. A. Seeger: Dislocations and Mechanical Properties of Crystals, John Wiley, New York, 1957. p. 243.
29. L. M. Clarebrough and M. E. Hargreaves, Progr. Met. Phys. 8. 1, 1959.
30. T. E. Mitchell, Progr. Appl. Mat. Res. 6, 117, 1964.
31. F. R. N. Nabarro, Z. S. Basinski and D. B. Holt, Adv. Phys. 13, 193, 1964.
32. P. B. Hirsch and T. E. Mitchell, Can. J. Phys. 45, 663, 1967.
33. J. P. Hirth and J. Weertmann (eds.): Work Hardening, Gordon and Breach, New York, 1968.
34. P. B. Hirsch: Atomic Structure and Mechanical Properties of Metals, 1976.
35. P. B. Hirsch, Acta Cryst. 13, 1114, 1960.
36. P. B. Hirsch, Phil. Mag. 7, 67, 1962.
37. D. Kuhlman—Wilsdorf, Trans. A. I. M. E. 224, 1047, 1962.
38. I. Kovács, Acta Met. 15, 1731, 1967.
39. P. Feltham, J. Phys. D.: Appl. Phys. 6, 2048, 1973.
40. A. Seeger, R. Berner und H. Wolf, Z. Phys. 155, 247, 1953.
41. U. Essmann, Phys. Stat. Sol. 3, 932, 1963.
42. J. W. Steed and P. M. Hazzledine, Discuss. Faraday Soc. 38, 103, 1964.
43. H. Mughrabi: Constitutive Equations in Plasticity, ed. A. S. Argon, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1975. p. 199.
44. A. Seeger, Handbuch der Physik VII., Springer Verlag, Berlin, 1958.
45. A. Seeger, Relation between Structure and Strength in Metals and Alloys, Vol. I. H. M. S. O. London, 1963. p. 4.
46. Bárczy P. és Tranta F., Bány. Koh. Lapok, 105, 279, 1972.
47. A. Seeger (ed.): Moderne Probleme der Metallphysik, I. Springer Verlag, Berlin, 1965. p. 35.

3. TÉRCENTRÁLT KÖBÖS FÉMEK ALAKÍTÁSI KEMÉNYEDÉSE

JUHÁSZ ANDRÁS
ELTE, Általános Fizika Tanszék

1. BEVEZETÉS

A közismert színfémek, ötvözetek jelentős része tércentrált köbös rácsban (tck) kristályosodik. A legismertebbek közé tartoznak az alkáli fémek, a vas és ötvözei és a ritka földfémek (V, Nb, Ta, Cr, Mo, W). A mechanikai tulajdonságok szempontjából a kémiai igen aktív alkáli fémeknek nincs gyakorlati jelentőségük. Mechanikai tulajdonságaik vizsgálata azonban mégsem érdektelen. Ezek a vizsgálatok ugyanis felvilágosítást adhatnak arról, hogy a mechanikai tulajdonságokat milyen mértékben határozza meg a rácsszerkezet, és milyen mértékben befolyásolja azokat az elektronszerkezetnek az adott kristályrács-típuson belüli változása. A képlékeny alakíthatóság vizsgálata kezdetben csak a vas és acélötvözetekre, ill. az izzólámpa gyártás miatt a wolframra korlátozódott, majd később kiterjedt a V, Nb, Ta, Mo beható tanulmányozására is.

Az alakítási keményedés értelmezése a tércentrált fémek esetén jóval nehezebb és bonyolultabb, mint a felületen centrált köbös rácsban kristályosodó fémeknél (2. fejezet). Ennek elsősorban az az oka, hogy a képlékeny alakváltozás mikrofolyamatokai nem teljesen tisztázottak, és bár az utóbbi 15 évben egyre többen foglalkoznak a témával, máig sem sikerült a kísérleti tapasztalatokat kvantitatíve is visszatükröző elméletet alkotni.

Dolgozatunkban áttekintjük a tércentrált köbös fémek alakítási keményedésére vonatkozó kísérleti tapasztalatokat, majd a kísérleti eredményeket kvalitatíve értelmező diszlokációs mikrofolyamatokat ismertetjük.

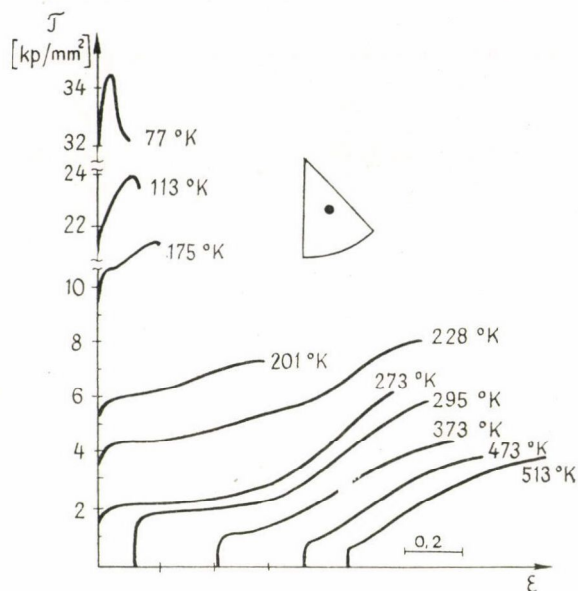
2. KÍSÉRLETI EREDMÉNYEK

2.1. Tércentrált köbös fémek feszültség-deformáció görbéi

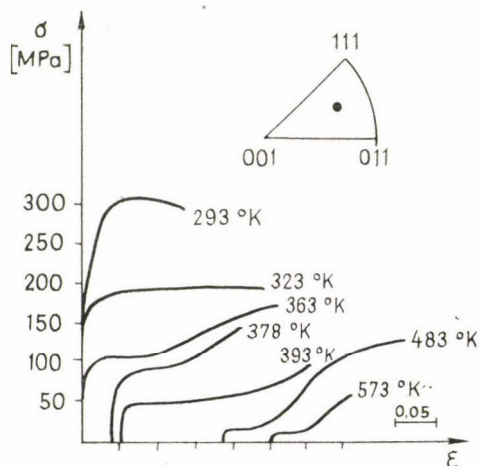
Az alakítási keményedés makroszkopikus jellemzői egykristályok képlékeny alakítása során felvett feszültség deformáció görbék alapján határozhatók meg [1]. Az egykristályok képlékeny alakítása általában nyújtással, ritkábban összenyomással történik. Az alakítás során rögzített erő és deformáció adatok az egykristály próbatest orientációja ismeretében átszámolhatók csúsztató feszültség-elcsúszás adatpárokká. A csúsztató feszültség-elcsúszás összefüggést gyakran keményedési görbének is nevezik.

Az 1—4. ábrák néhány jellegzetes feszültség-deformáció görbét mutatnak. Az 1/a. ábra grafikonjai niobium egykristály próbatestek különböző hőmérsékleteken történő

szakító vizsgálatai alapján készültek [2], ügyelve arra, hogy a különböző minták húzóerőhöz viszonyított kristálytani orientációja is gyakorlatilag azonos legyen; a húzóerő irányát az (100) síkra vonatkoztatott sztereografikus projekció egységháromszögébe berajzolt pont jelzi. Az 1/b. ábra különböző hőmérsékleteken alakított Mo egykris-

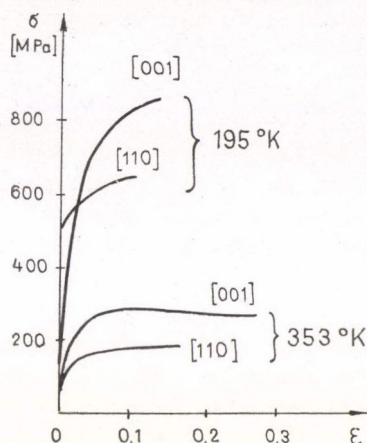


1/a. ábra. Niobium-egykristály különböző hőmérsékleteken mért nyírófeszültség, nyírási deformáció görbéi

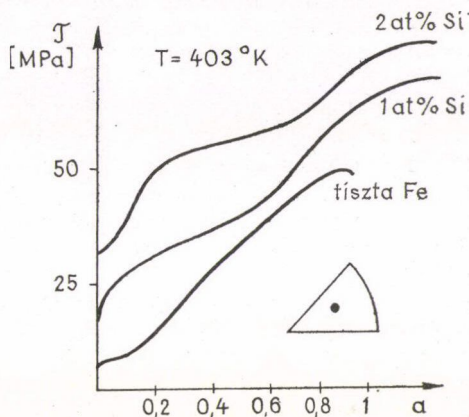


1/b. ábra. Molibdén-egykristály különböző hőmérsékleteken mért húzófeszültség, relatív megnyúlás görbéi

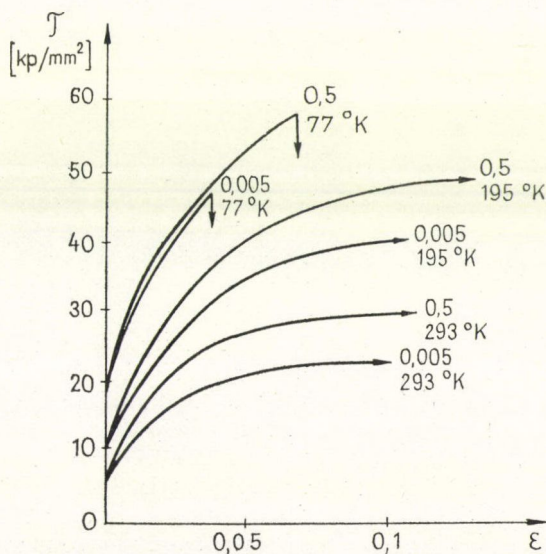
tály húzófeszültség relatív megnyúlás összefüggéseit mutatja [3]. A 2. ábra molibdén egykristály $\langle 001 \rangle$ és a $\langle 110 \rangle$ kristálytani irányokban történő nyújtás esetén tünteti fel a húzófeszültség relatív megnyúlás összefüggést [4]. A 3. ábrán szilíciummal különböző mértékben szennyezett vas egykristályok keményedési görbéi láthatók [5].



2. ábra. Az $\langle 001 \rangle$, ill. $\langle 110 \rangle$ kristálytani irányban nyújtott molibdén-egykristály keményedési görbéi 195 K, ill. 353 K hőmérsékleteken



3. ábra. 1, 2 atom % szilíciumot tartalmazó és szennyezés nélküli α -vas egykristályok keményedési görbéi



4. ábra. Az $\langle 100 \rangle$ kristálytani irányban 0,5/perc és 0,005/perc sebességgel nyújtott Mo egykristályok keményedési görbéi különböző hőmérsékleteken

A 4. ábra $\langle 100 \rangle$ irányban nyújtott molibdén egykristály keményedési görbéjét mutatja több hőmérsékleten különböző nyújtási sebességek mellett [4].

Az 1–4. ábrák meggyőzően bizonyítják, hogy a feszültség-deformáció görbék alakja, vagyis az alakítási keményedés folyamata függ a deformáció hőmérsékletétől, a kristály orientációjától, a deformáció sebességétől. Erősen befolyásolják a keményedést a kristályrácsban levő ötvözők és szennyezések.

Az 1. ábrán szembevetendő a tércentrált köbös fémek képlékenységi tulajdonságaira jellemző erős hőmérsékletfüggés. A képlékeny alakváltozás megindításához szükséges kritikus csúsztatófeszültség szobahőmérséklet fölött gyakorlatilag alig változik, de rohamosan növekszik a hőmérséklet csökkenésével.

Alacsony hőmérsékleteken a képlékeny alakváltozás megindulása után azonnal nagymértékű keményedés figyelhető meg, amely a további deformáció során zérusra esik vissza. Az ilyen keményedési görbe jellemzése a kritikus csúsztatófeszültség és a görbe maximumához tartozó feszültségértékkel történik. A kritikus csúsztatófeszültség meghatározását azonban különösen nehezíti, hogy a képlékeny alakváltozás nem hirtelen indul meg, és a keményedési görbe erősen ívelt kezdeti szakaszáról nehéz egyértelmű feszültségértéket leolvasni. (Ezért szokásos a kritikus csúsztatófeszültséget önkényesen egy rögzített, pl. 0,2%-os deformációhoz tartozó feszültségértékkel azonosítani.) A makroszkopikusan meghatározható kritikus csúsztatófeszültség alatt is történnek azonban olyan diszlokációmozgások, melyek a fém kis-mértékű képlékeny deformálódását okozzák. A képlékeny alakítás e kezdeti szakaszát mikro deformációs tartománynak nevezik [1].

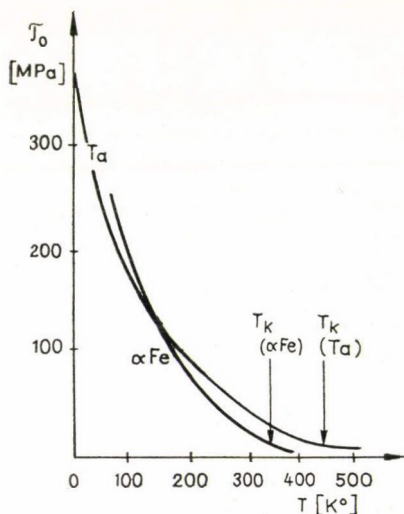
Közepes hőmérséklettartományban a keményedési görbe alakja a felületen centrált köbös fémek háromlépcsős keményedési görbéihez (2. fejezet) hasonló. A hőmérséklet növelésekor a kritikus csúsztatófeszültség értékének monoton csökkenése mellett a keményedési görbe első, lapos szakasza megnyúlik, míg a második, lineáris szakasz fokozatosan egy inflexió ponttá zsugorodik össze.

A hőmérsékletfüggést a kritikus csúsztatófeszültség hőmérséklet diagramon célszerű összefoglalni. Ilyen grafikont mutat tantál, ill. vas (Fe) egykristályokra az 5. ábra [6, 7]. Hasonló görbék adódnak valamennyi tércentrált köbös fém esetén. Ezek alapján a tércentrált fémek képlékeny tulajdonságai szempontjából három jellemző hőmérséklettartományt különböztethetünk meg [8]:

1. Alacsony hőmérsékleteken, egy bizonyos, az anyagra jellemző kritikus T_k érték alatt, a maradandó alakváltozás megindításához szükséges feszültség rohamosan nő a hőmérséklet csökkenésével.

2. A kritikus hőmérséklet felett a folyásfeszültség gyakorlatilag a hőmérséklettől független alacsony érték marad elég széles hőmérséklettartományban.

3. Olyan magas hőmérsékleteken, ahol az öndiffúzió jelentőssé válik, az alakválto-



5. ábra. A kritikus csúsztatófeszültség hőmérsékletfüggése középorientált tantál, ill. α -vas egykristályok esetén

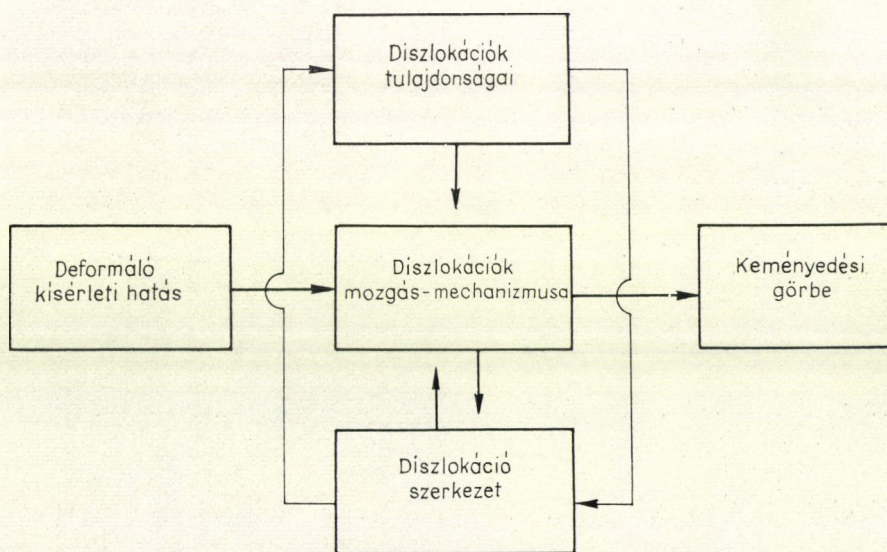
zást megindító feszültség lineárisan csökken a hőmérséklet emelkedésével. Az 1. táblázat foglalja össze a fontosabb tércentrált köbös fémek T_k kritikus hőmérsékletét, T_0 olvadáspontját és ezek arányát [8].

1. TÁBLÁZAT

	$T_{olv}(K)$	$T_{krit}(K)$	T_k/T_{olv}
Fe	1809	350	0,19
Mo	2863	550	0,19
Ta	3280	450	0,14
Nb	2773	400	0,14
W	3623	800	0,22
V	2008	450	0,22

Az 1—4. ábrákon bemutatott feszültség-deformáció görbék a makroszkopikus képlékeny tulajdonságokat tükrözik. A makroszkopikus képlékenységi egymással kölcsönhatásban levő diszlokációk bonyolult mozgás-folyamataira vezethető vissza. A 6. ábrán bemutatott logikai séma azokra a legfontosabb összefüggésekre hívja fel a figyelmet, amelyek az alakváltozást előidéző hatás, a felvett keményedési görbe és a kristály mikrotulajdonságai, diszlokációs folyamatai közt fennállnak [9].

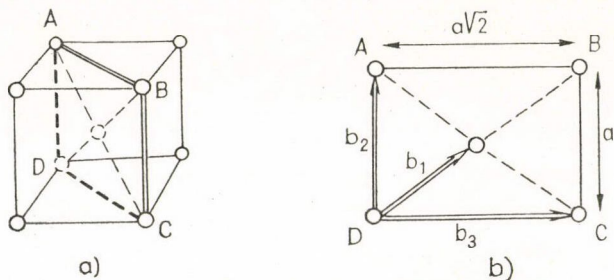
Az alakítási keményedés értelmezéséhez tehát szükség van a kristályszerkezet diszlokációinak és azok lehetséges csúszási mechanizmusainak vizsgálatára.



6. ábra. A kristály diszlokációs folyamatai és a makroszkopikus képlékeny tulajdonságok közötti összefüggések

2.2. Diszlokációk elektronmikroszkópos vizsgálata

Elektronmikroszkópos vizsgálatok szerint a deformált tércentrált köbös fémekben megfigyelhető különálló, egyenes diszlokációk döntő többsége $\frac{a}{2}\langle 111 \rangle$ Burgers-vektorú csavardiszlokáció [10]. Az $\frac{a}{2}\langle 111 \rangle$ vektor a tércentrált szerkezet legrövidebb rácsvektora, az ilyen Burgers-vektorú diszlokációk energetikailag a legkedvezőbbek (7. ábra).



7. ábra. A tércentrált köbös fémek rácsszerkezete
a) a szerkezet Bravais-rácsa
b) az $\{110\}$ rác síkon lehetséges Burgers vektorok

A deformáció során kialakult diszlokációháló találkozási pontjaiban elektronmikroszkóppal megfigyelhetők azonban a $\langle 110 \rangle$ és a $\langle 010 \rangle$ Burgers-vektorú diszlokációk is. Ezeknek a keletkezése a különböző csúszósíkokban levő $\frac{a}{2}\langle 111 \rangle$ diszlokációk közti reakciókkal értelmezhető.

A (001) síkban levő a $\langle 100 \rangle$ diszlokáció például a következő reakció eredménye lehet

$$\frac{a}{2}\langle 111 \rangle_{(\bar{1}01)} + \frac{a}{2}\langle 111 \rangle_{(101)} \rightarrow a\langle 100 \rangle_{(00\bar{1})}.$$

Ez az egymást keresztező $(\bar{1}01)$ és (101) síkok metszésvonalában keletkező diszlokáció gátolja az $\{110\}$ síkokon történő további diszlokációcsúszást, és ezzel jelentősen hozzájárul az alakítási keményedéshez.

A diszlokáció kialakulásához az $\frac{a}{2}\langle 111 \rangle$ csavar diszlokációk és az $\{110\}$ síkú $\frac{a}{2}\langle 111 \rangle$ éldiszlokációk reakciója is hozzájárul:

$$\frac{a}{2}\langle 111 \rangle_{cs} + \frac{a}{2}\langle 111 \rangle_{(011)} \rightarrow a\langle 100 \rangle_{(0\bar{1}1)}.$$

Az ilyen típusú diszlokációreakciókat energetikailag az teszi kedvezővé, hogy a tércentrált köbös szerkezetben, amint azt később részletesebben is tárgyalni fogjuk, a kritikus csúszatófeszültség erősen irányfüggő, és így a diszlokációreakciók révén a szerkezet deformációs energiája lecsökken.

Az elektronmikroszkópos vizsgálatok szerint alacsony hőmérsékleteken a diszlokáció elrendeződés az egész kristályterfogatban egyenletes, független a megcsúszásmértékétől. A diszlokációsűrűség adatok jó egyezést mutatnak a keményedési görbék menetével. Vegyük pl. a 293 K hőmérsékleten deformált Mo egykristály keményedési görbéjét (1/b. ábra). $\varepsilon=0,04$ alakítás után a feszültség telítési értéket ér el. Az elektronmikroszkópos mérések szerint a különálló csavardiszlokációk sűrűsége az alakítás során nő, de $\varepsilon=0,04$ deformáció után már eléri $5,5 \cdot 10^{12}/\text{m}^2$ telítési értéket, ami már további alakítás után nem változik [11].

Nagyfeszültségű elektronmikroszkópban vastagabb fóliák is átvilágíthatók, így lehetséges a mintákat közvetlenül a mikroszkópban deformálni. A diszlokációszerkezet változásai az alakítás közben „in situ” figyelhetők meg. Az ilyen vizsgálatok azt mutatják, hogy a T_k kritikus hőmérséklet alatt a csavardiszlokációk mozgékonyasága jóval kisebb, mint az éldiszlokációké.

A megfigyelések szerint a csavardiszlokációk keresztesűsűsása az alakítás alatt igen gyakori, és ennek során diszlokációforrások is kialakulhatnak [12, 13].

A magas hőmérsékleten deformált anyagok keményedési görbéi lényegesen eltérnek az alacsony hőmérsékleteken alakított mintákétól. Ezzel összhangban a magasabb hőmérsékleteken deformált fémek diszlokációszerkezete is különbözik az alacsony hőmérsékleten kialakuló szerkezettől. Magas hőmérsékleten deformálva az anyagot, párhuzamosan elhelyezkedő, nagy diszlokációsűrűségű rétegek alakulnak ki, amelyek diszlokációkat alig tartalmazó tartományokat választanak el egymástól [8, 9]. A rétegek kialakulása „in situ” megfigyelések szerint a keményedési görbe vízszintes szakaszának a végén történik. A diszlokációrétegek alig tartalmaznak $\frac{a}{2}$

$\langle 111 \rangle$ csavardiszlokációkat, főként éldiszlokációkból épülnek fel. A nagy diszlokációsűrűségű rétegek iránya kb. párhuzamos az $\langle 111 \rangle$ irány és a maximális csúsztatófeszültség által meghatározott síkkal; a rétegek egymástól 1-5 μm távolságban helyezkednek el. A rétegek által elválasztott tartományok között az alakítás mértékétől függően néhány szögperc, esetleg egy fok orientációkülönbség is mutatkozik. Szoba-hőmérsékleten deformált niobium kristályban például 0,2 nyírás esetén a rétegek diszlokációsűrűsége $1,6 \cdot 10^{14}/\text{m}^2$, a rétegek távolsága 1-3 μm , és a rétegek által elválasztott tartományok orientációkülönbsége 25-45 szögperc [14].

2.3. Csúszásnyomok vizsgálata

A csúszás geometriai viszonyairól, azaz arról, hogy adott irányú deformáló feszültség hatására milyen kristálytani síkok mentén mozognak a diszlokációk, illetve, hogy ezek az ún. „aktív” csúszási síkok hogyan változnak meg a képlékeny alakítással járó keményedés következtében, a csúszásvonal analízis nyújt felvilágosítást. A képlékeny deformáció során ugyanis a mintadarab polírozott felszínén mikroszkóppal jól megfigyelhető vonalak, ún. csúszási sávok jelennek meg. Pásztázó elektronmikroszkópos vizsgálatok mutatják, hogy a csúszási sávokat különálló csúszásvonalak alkotják. A csúszásvonalak a próbatest felületének és a kristály aktív csúszási síkjainak metszésvonalai. A csúszásvonal vizsgálatokra felhasznált egykristályokat sok lépésben szakaszosan deformálják, minden lépés után a csúszásvonalakat azonosítják, majd a minta felszínét újból lepólirozzák. A deformáció egymást követő lépései

után azonosított csúszásvonalakból a fokozódó alakítás során aktiválódó csúszási síkokra lehet következtetni.

A tck fémek felületén megfigyelhető csúszásnyomok, az elektronmikroszkópos megfigyelésekkel összhangban bizonyítják, hogy az alakítás során az uralkodó csúszási irány az $\langle 111 \rangle$. A kritikus hőmérséklet alatt deformált minták felszínén, a deformáció kezdeti szakaszában, az $\{110\}$ és az $\{112\}$ Miller indexű kristálysíkoknak megfelelő csúszásvonalak figyelhetők meg, majd megjelennek az $\{123\}$ indexű csúszósíkra utalók is. Az alakítás előrehaladtával, feltehetően az inhomogénné váló feszültségter hatására, a csúszási nyomok görbületekké, gyakran hullámosakká is válnak. A csúszási nyomok görbületét a pásztázó elektronmikroszkópokkal elérhető legnagyobb nagyításban sem sikerült kristálytani síkokra felbontani. Ezekhez a görbült csúszásvonalakhoz az $\langle 111 \rangle$ iránnyal párhuzamos tengelyű hengerfelületek tartoznak csúszási „sík”-ként. Mivel ilyenkor a csúszási felület egyetlen alacsony indexű kristálysíkkal sem azonos, „nem kristálytani” csúszásról (pencil glide) szoktak beszélni [15].

A T_k kritikus hőmérséklet fölötti deformációknál a csúszásvonalkép is utal a megváltozott mikromechanizmusra [2, 14].

A keményedési görbe első szakaszának végén az egyenes csúszásvonalak hullámosakká válnak úgy, hogy az átlagos csúszósík közelebb kerül a maximális csúsztatófeszültség irányához. További alakításra a csúszásvonalak csúszási sávokba csoportosulnak, majd ezek a csúszási sávok egyre kontrasztosabbakká válnak. A csúszási sávok távolsága rendszerint 1-2 μm . A kritikus hőmérséklet fölött a nem krisztallográfiai csúszásra utaló erősen görbült nyomokat nem figyeltek meg.

3. A KÍSÉRLETI TAPASZTALATOK ELMÉLETI ÉRTELMEZÉSE

A tck fémek 2. pontban ismertetett sajátos képlékeny viselkedése, mint pl. a magas folyásfeszültség érték és ennek erős hőmérsékletfüggése, a látszólag nem kristálytani csúszósíkokra utaló görbült csúszásvonalak stb. egységesen értelmezhetők a tck kristály csavardiszlokációinak speciális tulajdonságai alapján. *P. B. Hirsch* [16] merev gömbökből álló rácsmodellel kapcsolatos megfontolásai alapján feltételezte,

hogy a tércentrált köbös rács $\frac{a}{2} \langle 111 \rangle$ Burgers-vektorú csavardiszlokációi parciális diszlokációkra eshetnek szét az $\langle 111 \rangle$ irányú metszésvonalban találkozó három $\{110\}$, ill. $\{112\}$ Miller indexű kristálysíkokban. Lehetséges olyan felhasadás is, amikor két részdiszlokáció egy (110) és egy (112) síkban található. Hirsch feltételezését közvetlen kísérleti bizonyíték, pl. elektronmikroszkópos vizsgálat nem igazolja. Ennek az lehet a magyarázata, hogy felhasadt részdiszlokációk közt húzódó rétegződési hiba energiája a tck kristályban nagy, és így a felhasadás távolsága igen kicsi, a rácsállandó nagyságrendjébe esik.

Az elmélet helyességét közvetve igazolja azonban, hogy a felhasználásával végzett számítások, bár bonyolultságuk miatt sok közelítést tartalmaznak, mégis sok esetben jól visszaadják a kísérleti eredményeket (pl. a különböző hőmérsékleteken mért folyásfeszültségek számszerű értékét). Bizonyító erejű az is, hogy Hirsch feltételezései alapján a tck fémek képlékenységeinek minden jellegzetessége kvalitatíve értelmezhető.

3.1. Csavardiszlokációk felhasadása

Az $\frac{a}{2} \langle 111 \rangle$ csavardiszlokációk felhasadásával kialakult kiterjedt diszlokáció konfigurációk közt célszerű megkülönböztetni azokat, amelyek egy csúszósíkban fekszenek és így mozoghatnak (*A* típus) és azokat, amelyek egyszerre több csúszósíkra is kiterjednek és így rögzítettek (*B* típus). Ez utóbbi diszlokációk rögzítettsége csak akkor szűnik meg, ha külön energiabefektetéssel a részdiszlokációkat egy teljes diszlokációvá nyomjuk össze.

A következőkben *F. Kroupa* munkája [17] alapján röviden összefoglaljuk a csavardiszlokációk felhasadásának különböző típusait.

3.1.1. $\frac{a}{2} \langle 111 \rangle$ csavardiszlokáció *A* típusú felhasadásai

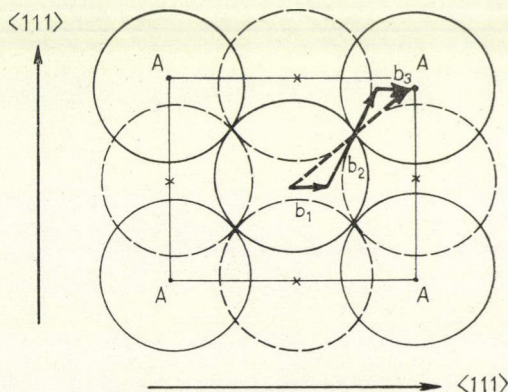
A csavardiszlokáció az $\{110\}$ síkok valamelyikén a következő reakció szerint hasadhat fel részdiszlokációkra:

$$\frac{a}{2} \langle 111 \rangle \rightarrow \frac{a}{8} \langle 110 \rangle + \frac{a}{4} \langle 112 \rangle + \frac{a}{8} \langle 110 \rangle.$$

A 8. ábra az $(\bar{1}10)$ sík atomelrendeződését és az $\frac{a}{2} \langle 111 \rangle$ diszlokáció felhasadását illusztrálja. A $(\bar{1}00)$ csúszósíkban levő atomok középpontját *A*-val, az alatta levő sor atomjait *B*-vel jelöltük. Az $\frac{a}{2} \langle 111 \rangle$ elcsúszás a parciális diszlokációk vastagon kihúzott csúszásvektorainak összegeként áll elő. A felhasadás jól szemléltethető egy merev gömbökből álló modellen. A két réteg $\frac{a}{2} \langle 111 \rangle$ irányú elcsúszásakor a felső réteg atomjai ahelyett, hogy közvetlenül átemelődnének az alsó réteg potenciálhegyén, cikcakkos mozgásukkal a potenciálmaximum helyének kikerülésével, tehát kisebb energiabefektetéssel kerülnek új helyzetükbe. A csavardiszlokációk ilyen *A* típusú felhasadása megkönnyíti a csúszást az $\{110\}$ síkokon.

Az $\frac{a}{2} \langle 111 \rangle$ csavardiszlokáció a $(\bar{1}2\bar{1})$ síkban a következő reakció szerint is felhasadhat két parciális diszlokációra:

$$\frac{a}{2} \langle 111 \rangle \rightarrow \frac{a}{6} \langle 111 \rangle + \frac{a}{3} \langle 111 \rangle.$$



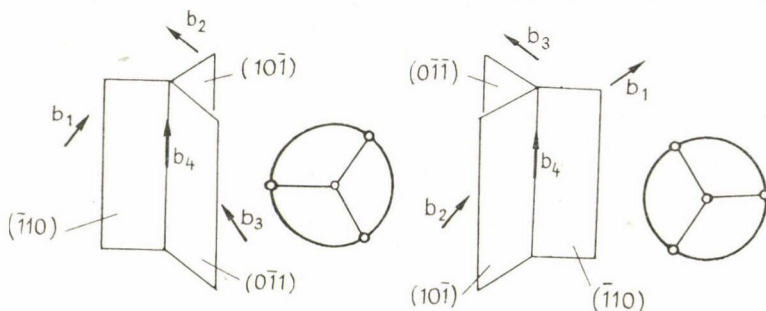
8. ábra. Az $\frac{a}{2} \langle 111 \rangle$ csavardiszlokáció *A* típusú felhasadása az (110) síkon

3.1.2. Az $\frac{a}{2} \langle 111 \rangle$ csavardiszlókáció B típusú felhasadásai

Az $\frac{a}{2} \langle 111 \rangle$ csavardiszlókáció egyidejűleg négy parciális diszlókációra is szét-eshet a következő reakció szerint:

$$\frac{a}{2} \langle 111 \rangle \rightarrow \frac{a}{8} \langle 110 \rangle + \frac{a}{8} \langle 101 \rangle + \frac{a}{8} \langle 011 \rangle + \frac{a}{4} \langle 111 \rangle.$$

Ez a szétesés kétféleképpen is bekövetkezhet, ahogy ezt a 9. ábra szemlélteti.



9. ábra. Az $\frac{a}{2} \langle 111 \rangle$ csavardiszlókáció B típusú felhasadása három egymást metsző $\{110\}$ síkban

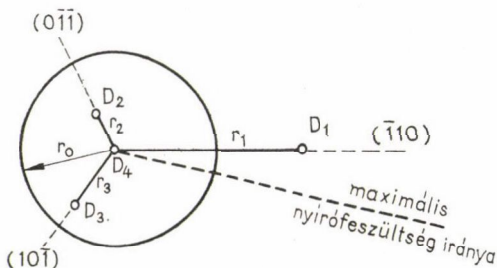
A keletkezett parciális diszlókációk közül három az egymással 120° szöget bezáró $\{110\}$ síkokon, a negyedik a síkok $\langle 111 \rangle$ irányú metszésvonalában helyezkedik el. Az ilyen B típusú felhasadás energetikailag előnyösebb A-nál.

A 10. ábrán bemutatott diszlókáció-szerkezet szimmetriája külső feszültség esetén megbomlik, a megváltozott viszonyokat a 10. ábra szemlélteti. A külső feszültség a $(\bar{1}10)$ síkban levő D_1 részdiszlókációt r_1 -re eltávolította, míg a másik két síkban levő parciálisokat közelebb nyomta a centrumhoz. Ha az r_2 és r_3 távolság már b nagyságrendjével egyezik meg, akkor a D_2 , D_3 és D_4 részdiszlókációk egy magasabb saját energiájú részdiszlókációvá egyesülhetnek a következő reakció szerint:

$$\frac{a}{8} \langle 101 \rangle + \frac{a}{8} \langle 011 \rangle + \frac{a}{4} \langle 111 \rangle = \frac{a}{8} \langle 334 \rangle.$$

Ez a diszlókáció két újabb, a (110) síkban fekvő parciálissá bomlik szét:

$$\frac{a}{8} \langle 334 \rangle = \frac{a}{4} \langle 112 \rangle + \frac{a}{8} \langle 110 \rangle.$$



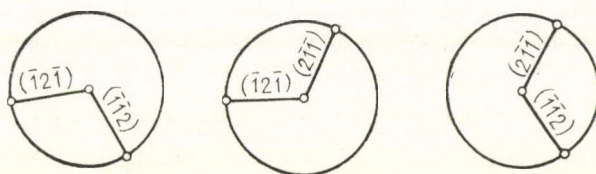
10. ábra. A felhasadt csavardiszlókáció feszültségtér hatására módosult konfigurációja

Az így átalakult szerkezet a korábban leírt A típusú kiterjedt diszlokációval azonos, és a maximális nyírófeszültség irányához közeli csúszósíkban elmozdulhat.

Az $\frac{a}{2} \langle 111 \rangle$ csavardiszlokáció az egymást $\langle 111 \rangle$ irányban metsző $\{121\}$ síkok mentén is energianyereséggel bomlik fel parciális diszlokációkra:

$$\frac{a}{2} \langle 111 \rangle \rightarrow \frac{a}{6} \langle 111 \rangle + \frac{a}{6} \langle 111 \rangle + \frac{a}{6} \langle 111 \rangle.$$

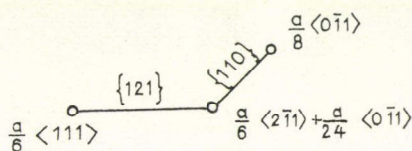
A keletkezett három részdiszlokáció közül egy a síkok metszésvonalában marad, míg a másik kettő a metszésvonaltól távolabb két különböző $\{121\}$ síkban van. A parciális diszlokációk közt rétegződési hibák húzódnak, amelyek különbözőek lehetnek aszerint, hogy az $\{112\}$ síkok közül melyiken történt meg a részdiszlokációnak megfelelő elmozdulás. Természetesen a különböző rétegződési hibák energetikailag is különböznek egymástól, így az $\frac{a}{2} \langle 111 \rangle$ csavardiszlokációnak a 11. ábrán sztereografikus projekcióban bemutatott háromféle felhasadása lehetséges a különböző $\{112\}$ síkokon, amelyek megvalósulása a külső körülményektől (hőmérséklet, nyomás, deformáció feszültség) függ.



11. ábra. $\frac{a}{2} \langle 111 \rangle$ csavardiszlokáció rögzült felhasadása két egymást metsző $\{112\}$ síkban

Külső feszültség hatására a két $\{112\}$ síkra felhasadt B típusú kiterjedt diszlokáció is elveszti szimmetriáját és átalakulhat a feszültség hatása szempontjából kedvezőbb csúszósíkban mozgó A típusú konfigurációjúvá. A diszlokáció konfigurációk feszültségfüggése magyarázza a tck fémek alakítási anizotrópiáját.

Ez utóbbi abban jelentkezik, hogy egyazon kristálytani irányban alkalmazott húzó és nyomó feszültség hatása képlékenységtani szempontból nem azonos [17]. Húzás, ill. nyomás esetén a folyáshatár értékek különbözőek. Ez a megfigyelés csupán a tck kristályszerkezet szimmetriáját figyelembe véve nem értelmezhető. A jelenséget a csavardiszlokációknak a deformáló feszültség hatására történő aszimmetrikus felhasadásával magyarázzuk.



12. ábra. $\frac{a}{2} \langle 111 \rangle$ csavardiszlokáció rögzült felhasadása két egymást metsző $\{112\}$ és $\{110\}$ síkban

A tércentrált köbös kristály $\{110\}$ és $\{112\}$ síkjainak metszésvonala $\langle 111 \rangle$ irányú. Az $\frac{a}{2} \langle 111 \rangle$ csavardiszlokációkra vonatkozóan energiacsökkenést jelent két egymást metsző $\{110\}$ és $\{112\}$ síkba történő felhasadás. Az energetikailag kissé különböző esetek közül a 12. ábra azt a konfigurációt mutatja, amelynek felhasználásával *Duesbery* és *Hirsch* kvantitatíve értelmezte a Nb képlékenységi tulajdonságait [18].

3.2. Alacsony hőmérsékleti plaszticitás

3.2.1. Feszültség-deformáció görbék értelmezése

A 2.1. pontban tárgyalt τ_0 kritikus csúsztatófeszültség (folyásfeszültség) értéke alacsony hőmérsékleteken magas, erős hőmérsékletfüggést mutat, erősen függ az alakváltozás sebességétől, az egykristály orientációjától és tisztaságától. A deformáció előrehaladtával a τ folyásfeszültség értéke a keményedési görbéknek megfelelően növekszik.

A kísérleti tapasztalatok értelmezéséhez célszerű a τ folyásfeszültséget két részre bontani [10]:

$$\tau = \tau^*(T, \dot{\epsilon}) + \tau_G(\epsilon). \quad (1)$$

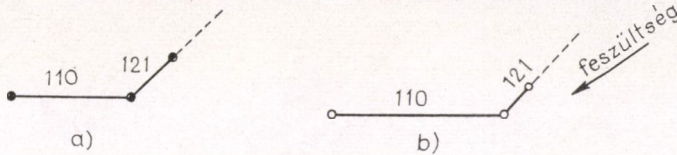
τ^* értékét a hőmérséklet és az alakítás sebessége szabja meg, míg τ_G értéke az adott orientációjú kristályban levő diszlokációszerkezet feszültségteréből adódik és a hőmérséklettől csak a rugalmas állandókon keresztül függ (ezért atermikus komponensnek is szokás nevezni). Alacsony hőmérsékleteken τ_G τ^* -hoz képest csak elhanyagolható mértékben járul hozzá a makroszkopikus deformációt megindító τ_0 kritikus csúsztatófeszültséghez. A τ_0 kritikus csúsztatófeszültség hőmérséklet és deformációsebesség függésének értelmezése tehát τ^* vizsgálatával történik.

3.2.2. Kritikus csúsztatófeszültség

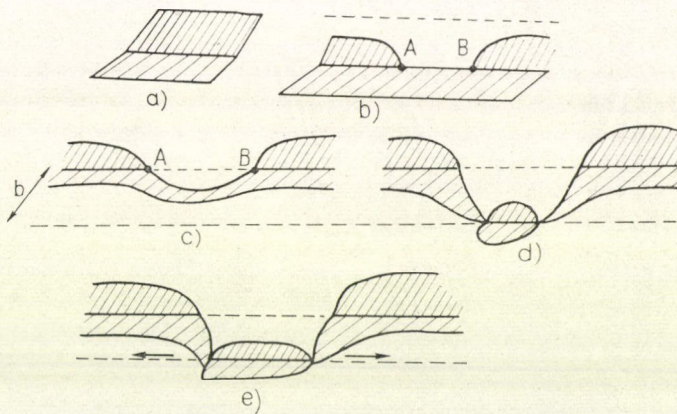
Az „in situ” elektronmikroszkópos vizsgálatok szerint a makroszkopikus deformáció megindulása előtt már megfigyelhető az éldiszlokációk elmozdulása a mintában. Ezek a mozgó éldiszlokációk azonban csakhamar elakadnak, utánpótlásuk nincs, ezért ez a mikrodeformáció hamar befejeződik. Az elektronmikroszkópos megfigyelések szerint a csavardiszlokációk ilyen körülmények között még rögzítettek. A τ_0 kritikus feszültségérték elérésekor az eddig mozdulatlan csavardiszlokációk is mozgásba jönnek, s mozgásuk során olyan Frank—Read forrásokat képeznek, amelyek tömegesen termelik a mozgóképes diszlokációkat. τ_0 magas értéke és hőmérsékletfüggése a csavardiszlokációk rögzült felhasadásával, ill. rögzült *B* típusú konfiguráció mozgásra képes *A* típusú konfigurációba történő átalakulásával értelmezhető.

A 3.1.2. pontban már foglalkoztunk azzal, hogyan képzelhető el a három $\{110\}$ síkban szétesett rögzült csavardiszlokáció csúszó konfigurációba történő átalakulása. Tekintsük most a 13/a. ábrán bemutatott (121) és (110) síkokra kiterjedt diszlokációt. A bejelölt irányú külső feszültség úgy módosítja a rögzült diszlokáció-konfigurációt, hogy az (110) síkon fekvő részdiszlokációt távolítja, az (112) síkon fekvőt pedig közelebb nyomja a síkok metszésvonalában levő harmadik parciálishoz.

Ahhoz, hogy a diszlokáció az (110) síkon a feszültség hatására elmozdulhasson, a közel került két parciálisnak rekombinálnia kell, ehhez azonban további energia-befektetésre van szükség. 0 K hőmérsékleten a részdiszlokációkat csak igen nagy külső feszültséggel lehet az (110) csúszósíkba összenyomni. Véges hőmérsékleteken a termikus aktiválás megkönnyíti a hosszú diszlokációvonal egy-egy hosszabb-rövidebb szakaszán a parciális diszlokációk összenyomását. A 14. ábra az (112) és (011) síkokban felhasadt csavardiszlokáció termikusan aktivált elcsúszásának folyamatát ábrázolja [18].



13. ábra. Az (121) és (110) síkokban felhasadt parciális diszlokációk közti távolság külső feszültség hatására módosul



14. ábra. Rögzült csavardiszlokáció elcsúszása kettős könyök képződésével; a) a felhasadt diszlokáció egyensúlyban, b) a feszültség hatására az egyik parciális közelebb húzódik a síkok metszésvonalához. Az \overline{AB} szakaszon a parciálisok termikus aktiválás hatására rekombinálnak. c) Az \overline{AB} szakaszon csúszóképesé vált diszlokáció a feszültség hatására kihajlik; d) a kihajló diszlokáció a szomszéd potenciálvölgyben újból egyensúlyba kerül, kettőskönyök alakul ki; e) a kettőskönyök gyorsan szélesedik

A rögzült csavardiszlokáció feszültség hatására közel került két részdiszlokációja az \overline{AB} szakaszon termikus aktiválás hatására rekombinálódott. Az \overline{AB} diszlokációszakasz a feszültség hatására kihajlik, majd kettőskönyök képződésével a kristály periodikus potenciál terének b távolságra elhelyezkedő minimumhelyére kerül. Ebben az új helyzetben energetikailag kedvező, ha a diszlokáció újból kiterjed az (112)

síkra is, és ezzel rögzítődik. A feszültség hatására a kettőskönyök gyorsan szélesedik, ami egyre nagyobb diszlokációs szakasz b -vel való elmozdulását eredményezi.

A több síkon felhasadt csavardiszlokáció egy csúszósíkba történő összehúzódása és elmozdulása tehát termikusan aktivált folyamat (1. fejezet). Az így elmozduló diszlokáció sebességét *Friedel* [19] nyomán a

$$v = v_0 \frac{L}{l} \cdot d \cdot e^{-\frac{\Delta G}{kT}}$$

összefüggés írja le, ahol L a kiterjedt diszlokáció teljes hossza, l a kiterjedt diszlokáció termikusan aktiválódó kritikus hossza, d az a távolság, amennyit az aktiválódott diszlokációs szakasz egy lépésben előre jut (előbbi példánkban $d=b$), v_0 a diszlokáció kritikus szakaszának rezgési frekvenciája, ΔG pedig a diszlokációmozgás aktiválási szabadentalpiája. Adott mikromechanizmus esetén ΔG a hőmérséklettől és a deformáló feszültségtől függ.

A diszlokációmozgás aktiválásához szükséges ΔG energia részben a feszültség által végzett munkából, részben termikus energia fluktuációból származik. Sokszor célszerű az aktiválási szabadentalpiát

$$\Delta G = \Delta G_0 - V\tau \quad (3)$$

alakban felvenni, ahol $V\tau$ az aktiválási munka, V az aktiválási térfogat (1. fejezet). ΔG és V értéke jellemző a képlékeny alakváltozást szabályozó mikromechanizmusra, így tehát egy feltételezett diszlokációs folyamat atomi modellje alapján ΔG és V értéke elméleti úton kiszámítható. ΔG és V értéke kísérleti alapon is meghatározható, ha mérések alapján ismert a folyásfeszültség mint a deformációsebesség ill. hőmérséklet függvénye. Az $\dot{\epsilon}$ makroszkopikus deformációsebesség ugyanis arányos a v diszlokációsebességgel [1]:

$$\dot{\epsilon} = \rho \cdot b \cdot v, \quad (4)$$

ahol ρ az átlagos diszlokációsűrűség. (Az $\dot{\epsilon}$ makroszkopikus deformációsebességet az alakítást végző szakítógépek húzási sebessége, az aktiválódó csúszási rendszer orientációja és a próba hossza szabja meg.)

Ha ΔG_0 és V nem függ a hőmérséklettől, akkor ΔG értéke mérési eredményekből (2), (3) és (4) alapján a következő kifejezésből adódik:

$$\Delta G = kT^2 \frac{\left(\frac{\partial \tau^*}{\partial T}\right)_{\dot{\epsilon}}}{\left(\frac{\partial \tau^*}{\partial \ln \dot{\epsilon}}\right)_T}, \quad (5)$$

míg az aktiválási térfogat:

$$V = -\left(\frac{\partial H}{\partial \tau}\right)_T. \quad (6)$$

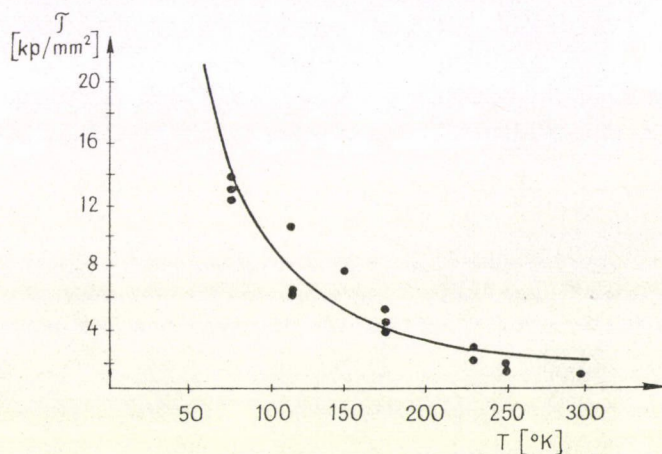
Az aktiválási energia és az aktiválási térfogat elméleti úton kiszámított és mérésekből meghatározott értékeit összehasonlítva eldönthető, hogy a feltételezett modellfolyamat valóban döntő-e az alakváltozás során.

A τ_0 kritikus csúsztatófeszültség 5. ábrán bemutatott hőmérsékletfüggését kísérleti vizsgálatok szerint közelítőleg a

$$\tau_0 = \frac{B}{CT - A} \quad (7)$$

függvénnyel írhatjuk le. (Az összefüggés csak viszonylag kis feszültségértékek esetén alkalmazható, ahol B , C és A a feszültségtől függetlennek tekinthető.)

Duesbery és Hirsch [18] az (112) és (110) síkokra felhasadt csavardiszlokációk előzőekben ismertetett mozgási mechanizmusa alapján végzett elméleti számításokat. Az atomi modellből kiindulva meghatározták adott kísérleti feltételek mellett az A , B , C paramétereket, majd az így kapott eredményeket összevetették mérési adatokkal. A mért és számított értékek jó egyezését mutatja a 15. ábra.



15. ábra. Tiszta niobium-egykristály kritikus csúsztatófeszültségének változása a hőmérséklettel. A Duesbery és Hirsch által számított görbe jól illeszkedik a mérési pontokra

3.2.3. Az alakítási keményedés

A kísérleti tapasztalatok szerint a tck fémek alacsony hőmérsékleti képlékeny alakváltozásában a csavardiszlokációk játsszák a meghatározó szerepet. A több kristálysíkra felhasadt csavardiszlokációk mozgásához először energiabefektetéssel össze kell nyomni a különböző síkokban levő parciálisokat, ezért a csavardiszlokációk tömeges mozgásához nagy kritikus csúsztatófeszültség tartozik. A képlékeny alakváltozás előrehaladtával a diszlokációk száma rohamosan nő, s egyre jobban megnehezítik a további diszlokációmozgást feszültségterük, ill. a 2.2. pontban említett reakciók következtében. Így az állandó sebességű alakváltozás fenntartásához egyre növekvő külső feszültségre van szükség.

A következőkben feltesszük, hogy a makroszkopikus deformációt meghatározó mechanizmus a kiterjedt csavardiszlokációk termikusan aktivált mozgása. Az alakítási keményedést azzal vesszük figyelembe, hogy az egyre szaporodó diszlokációk

kölcsönhatása miatt a diszlokációk szabad hossza a deformáció előrehaladtával monoton csökken. Ha a makroszkopikus deformációsebesség az alakítás során állandó, akkor a $\tau_0 \approx \tau^*$ feszültségnél (folyáshatár) és a $\tau = \tau^* + \tau_G$ feszültségnél felírt alakítási sebességek egyenlők. Az alakítás sebessége a képlékeny deformáció megindulásakor:

$$\dot{\varepsilon} = \alpha \cdot L_0 e^{-\frac{H_0 - V\tau^*}{kT}}. \quad (8)$$

Az alakítás sebessége az ε alakváltozás után:

$$\dot{\varepsilon} = \alpha \cdot L(\varepsilon) e^{-\frac{H_0 - V(\tau^* + \tau_G)}{kT}}. \quad (9)$$

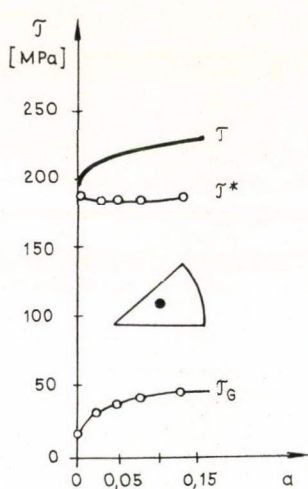
Az összefüggésekben α a folyamatra jellemző állandó, L_0 ill. $L(\varepsilon)$ a diszlokációk szabad hossza. Elegendően nagy feszültség esetén (azaz alacsony hőmérsékleteken) a V aktiválási térfogat állandónak tekinthető [18], így (8) és (9) felhasználásával τ_G -re a következő egyszerű összefüggés adódik:

$$\tau_G = \frac{kT}{V} \ln \frac{L_0}{L(\varepsilon)}. \quad (10)$$

A mozgóképes diszlokációk egyre rövidülő hosszára egyszerű összefüggés adható például az

$$L(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_0 L_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \quad (11)$$

alakban. Ezzel az alacsony hőmérsékleti folyásfeszültség a



16. ábra. α -vas egykristályon mért keményedési görbe 77 K hőmérsékleten. A folyásfeszültség τ^* hőmérsékletfüggő részét a deformálás sebességének változtatásával határozták meg

$$\tau_G = \frac{kT}{V} \ln \frac{\varepsilon + \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \quad (12)$$

függvény szerint logaritmikusan növekszik a deformáció előrehaladtával. A 16. ábrán bemutatott keményedési görbét 77 K-on nyújtással deformált vasegykristályon mérték [20]. A τ folyásfeszültség τ^* részét különböző húzási sebességet alkalmazva külön is meghatározták, így lehetővé vált τ_G vizsgálata. A 16. ábra görbéje τ_G (12)-ben megadott közelítő kifejezéssel jól leírható.

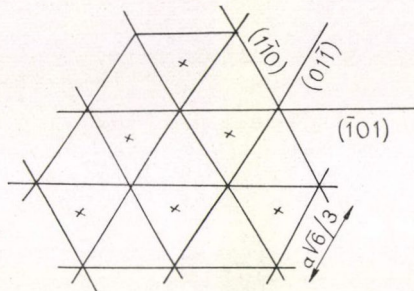
Mint említettük, az alakítás hőmérsékletének emelkedésekor a tck fémek keményedési görbéi egyre inkább hasonlítanak a felületen centrált köbös fémek háromlépcsős keményedési görbéire. Az elektronmikroszkópos vizsgálatok szerint ezeken a hőmérsékleteken már elhanyagolható a különbség a csavar és az éldiszlokációk csúszási tulajdonságai között [8]. A háromlépcsős keményedésnek nincs speciálisan a tck szerkezetre vonatkoztatott értelmezése, a felületen centrált köbös fémekre kidolgozott mikro-mechanizmusok alkalmazhatók a tércentrál fémekre is [10].

3.2.4. A görbült csúszásvonalak értelmezése

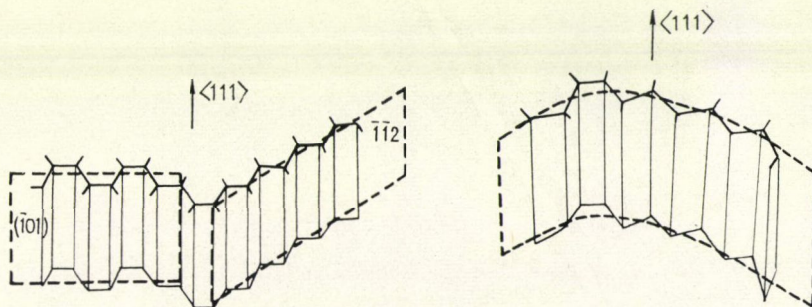
A tck fémek krisztallográfiai csúszása a csavardiszlokációk sajátos, rögzült felhasadása alapján értelmezhető. Ha a feszültség elegendően nagy ahhoz, hogy a különböző síkokra felhasadt részdizlokációkat összenyomja, akkor mint láttuk, termikusan aktivált kettőskönyök képződéssel a diszlokáció elmozdul, majd a kristály periodikus potenciáletterében újból egyensúlyba kerül, és ezzel együtt ismét több síkbeli parciálisra hasad fel. Az alakítással szaporodó, egymással kölcsönhatásba lépő diszlokációk egyre inkább módosítják a külső feszültségteret. A mozgó diszlokációk a külső és a többi éldiszlokációtól származó belső feszültség eredő hatására aktiválódnak.

A belső feszültségek inhomogenitása miatt az eredő feszültségtér helyről helyre változik, a különböző síkokra felhasadt diszlokációk hol egyik, hol másik csúszósíkban nyomódnak össze és mozdulnak el. A 17. ábra a tck kristály (111) síkjának atomelrendeződését ábrázolja. Az x-szel megjelölt pontok a három (110) síkban felhasadt csavardiszlokáció egyensúlyi helyzeteinek felelnek meg [8].

A 18. ábrán azt szemléltetjük, hogyan alakulnak ki a megfigyelt makroszkopikus csúszási felületek a különböző $\{110\}$ síkokon történő elemi diszlokációelmozdulások sorozatából. Egy-egy elemi csúszás távolsága a szerkezet atomi modellje szerint $\frac{a \cdot \sqrt{6}}{3}$ -nak adódik [8], érthető tehát, ha az egyes lépések elkülönítésére (pl. a görbült csúszásvonalak esetén) az elektronmikroszkóp nem alkalmas.



17. ábra. A tck szerkezet (111) Miller-indexű metszete, amelyen az egymást metsző $\{110\}$ síkokat tüntettük fel. Az x-szel megjelölt pontok a felhasadt csavardiszlokációk egyensúlyi helyzetét jelölik



18. ábra. A különböző $\{110\}$ síkokon cikcakkban mozgó csavardiszlokációk és a makroszkopikus csúszósíkok kapcsolata. a) a makroszkopikus (101) és (112) csúszósíkok kialakulása, b) $\langle 111 \rangle$ tengelyű görbült csúszási felületek értelmezése

3.3. Magas hőmérsékleti keményedés

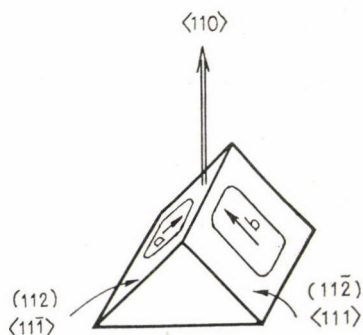
A tck fémek magas hőmérsékleteken megfigyelt alakítási keményedésének nincs általánosan elfogadott elmélete. Az alkalmazott mikroszkopikus modellek mindig egy-egy konkrét kísérlet értelmezésére születnek, és általában 2-3 paraméter alkalmas megválasztásával adnak a kísérleti tényeket kvantitatíven is visszatükröző eredményt.

A 2.2. pontban ismertettük a T_k kritikus hőmérséklet felett deformált anyag jellegzetes diszlokációszerkezetét. E szerint nagy sűrűségű, főként éldiszlokáció dipólokat tartalmazó rétegek és lényegesen kisebb diszlokációsűrűségű tartományok változtatják egymást.

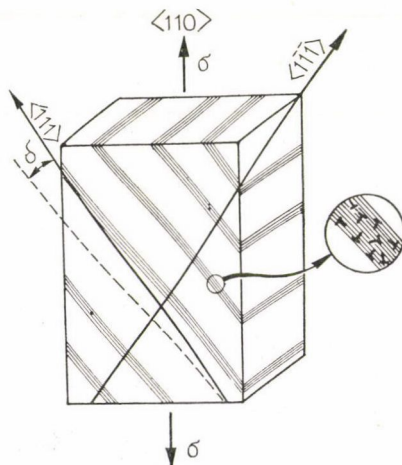
A rétegek kialakulására a magas hőmérsékleten könnyen keresztcsúszó csavardiszlokációk adhatnak magyarázatot. A maximális nyírófeszültséghez közeli csúszósíkokban a diszlokációk könnyen aktiválódnak. A csavardiszlokációk keresztcsúszását ilyen hőmérsékleteken már egy szomszédos csúszósíkban levő másik diszlokáció feszültségtére is kiválthatja. Az így keletkezett diszlokáció lépcsők, ha elegendően nagyok, további diszlokációkat termelő spirális Frank—Read forrássá [1] válnak, és magyarázzák a rétegek nagy diszlokációsűrűségét.

A rétegekben található nagyszámú diszlokáció-dipól keletkezése a következőképp értelmezhető. Tekintsünk két ellentétes Burgers-vektorú csavardiszlokációt, amelyek két egymás felett párhuzamosan elhelyezkedő csúszósíkban mozognak. Az ellentétes Burgers-vektorú diszlokációk között vonzóerő működik. A vonzóerő hatására keresztcsúszó diszlokációk találkozáva megsemmisítik egymást, míg a keresztcsúszás során keletkezett lépcső két oldalán éldiszlokáció-dipól marad vissza [1]. Az elektronmikroszkópos megfigyelések szerint a diszlokációrétegek kialakulása után a fém további deformációját a rétegek közötti tartományban mozgó diszlokációk okozzák.

Takeuchi sikeresen értelmezte az $\langle 110 \rangle$ irányban nyújtott vas-egykristály magas hőmérsékleti deformációját [9]. Modelljét arra a kísérleti megfigyelésre alapította,



19. ábra. A $\langle 110 \rangle$ irányban nyújtott tck fémek két egyenértékű aktív csúszási rendszere

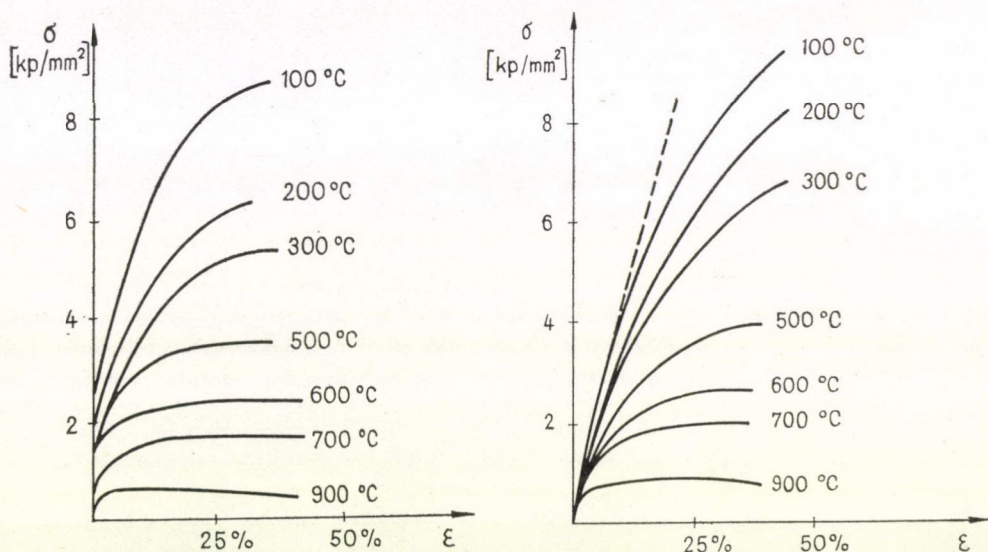


20. ábra. A $\langle 110 \rangle$ irányban magas hőmérsékleteken deformált kristályban kialakuló cellaszerkezet modellje Takeuchi szerint [9]

mely szerint az $\langle 110 \rangle$ irányban deformált Fe-egykristályban csak két csúszási rendszer aktiválódik. A 19. ábra az aktiválódó két csúszási rendszert ábrázolja.

A kísérleti tapasztalatok szerint a magas hőmérsékleti deformáció során a kristály primer csúszási rendszerétől ($\langle 111 \rangle$ (112)) néhány fokos eltéréssel alakulnak ki a nagy sűrűségű rétegek. Ezt szemlélteti a 21. ábra. A nagy diszlokációsűrűségű rétegekben a szekunder éldiszlokáció-dipólok feszültségtete a próbatestre ható deformáló feszültséggel tart egyensúlyt. Takeuchi szerint a diszlokációsűrűség a rétegekben arányos a kristályra ható feszültséggel:

$$C = H\sigma.$$



21. ábra. $\langle 110 \rangle$ irányban nyújtott α -vas egykristály feszültség-deformáció görbéi 5 mm/perc deformálási sebesség esetén különböző hőmérsékleteken. a) Mérési eredmények, b) Takeuchi $\Delta G = 50 \text{ kg/mm}^2$, $U = 2,2 \text{ eV}$ és $U_s = 1,5 \text{ eV}$ paraméterek mellett számított eredményei

A deformáció előrehaladtával tehát egyre nő a rétegekben belül a diszlokációsűrűség, azaz csökken a dipólusokat alkotó diszlokációk átlagos távolsága. Ha ez a távolság kicsi és a hőmérséklet elegendő magas, a diszlokáció-dipól a diffúziós folyamatok segítségével megszűnik; prizmatikus diszlokáció hurkok keletkezése közben a belső feszültségek csökkennek. A h szélességű diszlokáció-dipól megszűnése Groves és Kelly [21] szerint

$$\Delta t = 10^{-14} \left(\frac{b}{h} \right)^{-4} \cdot e^{\frac{U - U_s \left(\frac{b}{h} \right)}{kT}} \quad (13)$$

idő alatt következik be, ahol U a diszlokációsűrűség menti diffúzió aktiválási energiája, U_s a dipól éldiszlokációinak rugalmas kölcsönhatási energiája.

A kísérleti tapasztalatok szerint a képlékeny alakváltozást a nagy diszlokációsűrűségű rétegek közötti tartományban mozgó diszlokációk okozzák, itt kell keresni

tehát az alakítási keményedés magyarázatát is. A diszlokáció-dipólok feszültségtere nem korlátozódik a rétegekre, hanem akadályozza a rétegek közti tartományok szabad diszlokációinak mozgását is. Ezek a diszlokációk az $((11\bar{2}) \langle 111 \rangle)$ primer, vagy az $((112) \langle 11\bar{1} \rangle)$ szekunder csúszási rendszerben mozoghatnak a deformáló külső és a rétegektől származó belső feszültségek együttes hatására. Amennyiben a megújulási folyamatok (diszlokáció-dipólok eltűnése) miatt a belső feszültség csökken, megindul a rétegek közti diszlokációk mozgása. A mozgó diszlokációk azonban előbb-utóbb elérik valamelyik diszlokációréteget (21. ábra), ahol befogódnak. A rétegek feszültségtere tehát a befogott diszlokációk révén növekszik, a dipólok megszűnése által pedig folyamatosan csökken. E két ellentétes értelmű folyamat hatását figyelembe véve a *Takeuchi* által számított keményedési görbék jól egyeznek a mérési tapasztalattal.

4. A GYAKORLATBAN FELHASZNÁLT TCK FÉMEK ALAKÍTÁSI KEMÉNYEDÉSÉT BEFOLYÁSOLÓ EGYÉB HATÁSOK

Az ipari gyakorlatban felhasznált tck fémek polikristályos szerkezetűek, az anyag előéletétől függően kisebb-nagyobb egymás mellé illeszkedő kristályszemcsékből épülnek fel. Az egyes kristályszemcséket a fém belsejében határfelületek, szemcsehatárok választják el. A polikristályos fémek képlékeny tulajdonságai az egykristályokétól lényeges eltéréseket mutatnak. Az eltérésekkel, a szemcse és szubszemcsehatárok keményítő tulajdonságaival a 4. és 5. fejezet foglalkozik.

A tck fémek folyáshatárát és alakítási keményedését igen erősen befolyásolják az anyagban levő ötvöző és szennyező atomok. Ezekkel a kérdésekkel foglalkozik a 7. fejezet.

IRODALOMJEGYZÉK

1. Kovács I. és Zsoldos L.: Diszlokációk és képlékeny alakváltozás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
2. V. Novak and B. Sestak, Proc. 4. Int. Conf. on Strength of Metals and Alloys, Vol. 1. Nancy, 1976. p. 156.
3. J. Richter, Phys. Stat. Sol. 40, 565, 1970.
4. F. Guiu and P. L. Pratt, Phys. Stat. Sol. 15, 539, 1966.
5. N. Zárubová and B. Sestak, Phys. Stat. Sol. (a) 30, 365, 1975.
6. R. L. Smialek, G. L. Webb and T. E. Mitchell, Scripta Met. 4, 33, 1970.
7. J. Diehl, M. Schreiner, S. Staiger and S. Zwiesele, Scripta Met. 10, 945, 1976.
8. B. Sestak and A. Seeger, Z. Metallkde. 69, 195, 1978.
9. T. Takeuchi, Reviews on the Deformation Behavior of Materials, 1, 117, 1974.
10. R. J. Arsenault, Low Temperature Deformation of BCC Metals and Their Solid Solution Alloys, Ed. R. J. Arsenault, Treatise on Materials Science and Technology, Vol 6.
11. A. Luft, Phys. Stat. Sol. 42, 429, 1970.
12. V. Vesely, High-Voltage Electron Microscopy, Academic Press, London, 1973. p. 189.
13. T. Imura, High-Voltage Electron Microscopy, Academic Press, London, 1973. p. 179.
14. G. Taylor and J. W. Christian, Phil. Mag. 15, 873, 1967.
15. Cs. V. Kopeckij, Struktura i szvojsztva tugoplavkih metallov, Moszkva, Metallurgia, 1974.
16. P. B. Hirsch, Congress on Crystallography, Cambridge. 1960.
17. F. Kroupa, Phys. Stat. Sol. 30, 391, 1963.
18. M. S. Duesbery and P. B. Hirsch, Journal de Physique, 27, 193, 1966.
19. J. Friedel, Dislocations, Pergamon Press, London, 1964.
20. W. A. Spitzig and A. S. Keh, Met. Trans. 1, 3325, 1970.
21. G. W. Groves and A. Kelly, Journal Appl. Phys. 33, 456, 1962.

4. A SZEMCSESZERKEZET SZILÁRDSÁGNÖVELŐ HATÁSA

TASNÁDI PÉTER és RAJKOVITS ZSUZSA
ELTE, Általános Fizika Tanszék

1. BEVEZETÉS

A kristályos anyagok képlékeny alakváltozása többnyire diszlokáció mozgás útján valósul meg. A diszlokációk mozgása kristálytípustól függően különböző csúszási rendszerekben mehet végbe. Egykristályok esetén a képlékeny alakváltozást a külső feszültség mellett a kristály orientációja is megszabja, mert ettől is függ, hogy adott külső terhelés mellett a feszültség melyik csúszási rendszerben éri el a kritikus értéket. Ha a feszültségállapotot a σ_{ij} tenzor jellemzi és τ^s az s -ik csúszási rendszer kritikus feszültsége, akkor ez a rendszer a

$$\sum_{i,j=1}^3 m_{ij}^s \sigma_{ij} \cong \tau^s \quad (1)$$

feltétel teljesülése esetén aktiválódik [1]. Itt

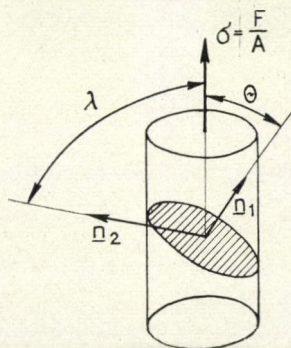
$$m_{ij}^s = (\mathbf{n}_1^s \mathbf{a}_i)(\mathbf{n}_2^s \mathbf{a}_j), \quad (2)$$

ahol \mathbf{n}_1^s az s -ik csúszási rendszer csúszássíkjának normálvektora, \mathbf{n}_2^s a csúszási irányba mutató egységvektor, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ pedig a koordináta-rendszer alapvektorai. Abban az esetben, ha a kristályt az \mathbf{a}_3 tengely irányában tiszta húzófeszültséggel terheljük és egyszeres csúszás következik be, akkor az m_{ij}^s tenzor az m Schmid faktorrá egyszerűsödik (1. ábra).

A gyakorlatban felhasznált fémek mindig polikristályos szerkezetűek, ezért külső erő hatása alatt a különböző orientációjú szemcsék egyes csúszósíkjaiban a nyírófeszültség értéke különböző. Így az egyes szemcsékben más csúszási rendszerek aktiválódhatnak. A folyás feltétele ebben az esetben már nem fogalmazható meg az (1) összefüggés segítségével. Definíálhatjuk azonban az m_{ij} orientációs tenzor átlagértékét [1, 2]. Tiszta nyújtás esetén a Schmid faktor átlagértéke az

$$\bar{m} = \frac{\int N(m) m \, dm}{\int N(m) \, dm} \quad (3)$$

formulával határozható meg, ahol $N(m)$ azon szemcsék száma, amelyekben a csúszási síkok valamelyikének orientációja az m tényezővel adható meg. Az integrálást



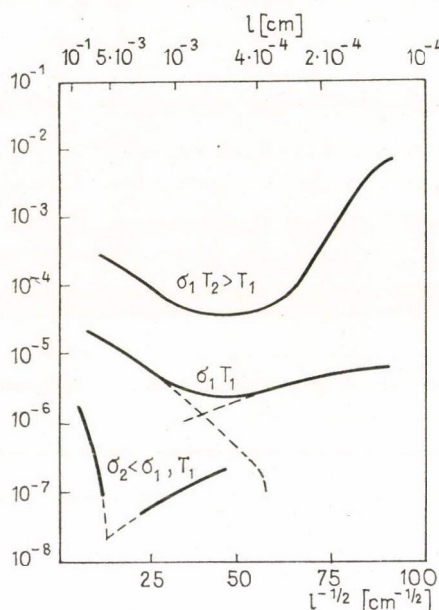
1. ábra. Csúszási rendszer és jellemzői

az összes szemcsére ki kell terjeszteni. Ha a deformáció során $N(m)$ nem változik, akkor az m tényező segítségével kapcsolatot létesíthetünk az egykristály és a polikristályos anyag nyúlási alakváltozása között is. σ külső feszültség mellett a polikristályos anyagban fellépő τ csúsztató feszültség (3) felhasználásával:

$$\tau = \frac{1}{m} \sigma. \quad (4)$$

Az m faktor becslését több szerző is elvégezte, Kocks szerint felületcentrált köbös (fck) fémek esetén 3,1 a leginkább elfogadható érték [1].

A polikristályos anyagok tulajdonságait tehát az egykristály szemcsék tulajdonságainak átlagolásával határozhatjuk meg. Képlékeny alakváltozás esetén azonban a diszlokációmozgást, ill. sokszorozódást döntő módon befolyásoló szemcsehatárok az egykristályra jellemző viszonyokat jelentősen módosíthatják. Armstrong kúszásvizsgálatok alapján megállapította, hogy a szemcsehatárok szilárdíthatják, de egyes esetekben gyengíthetik is az anyagot [3, 4, 5]. A 2. ábra az $\dot{\epsilon}$ kúszási sebesség,



2. ábra. A kúszási sebesség szemcseméret és hőmérséklet függése

a hőmérséklet és a szemcseméret közötti összefüggést mutatja szemtikusan. Az ábráról leolvasható, hogy alacsony hőmérsékleteken és nagyobb feszültségek esetén a kúszási sebesség a szemcseméret csökkenésével csökken, azaz a szemcsehatárok szilárdítják az anyagot. Kis feszültségek és magas hőmérsékletek esetén $\dot{\epsilon}$ a szemcseméret csökkenésével nő, ekkor tehát a finomszemcsés szerkezet az anyag gyengüléséhez vezet. Extrém esetben a finomszemcsés anyagok szuperplasztikussá is válhatnak.

A szemcsehatárok gyengítő szerepe általában két tényezőre vezethető vissza:

1. A szemcseméret csökkenésével fokozott mértékben léphet fel a szemcsehatár nyíródás, ill. csúszás. Ekkor a fém képlékeny alakváltozását elsősorban nem a diszlokációmozgás, hanem a szemcsék egymáshoz képest történő elmozdulása okozza. Ez a mechanizmus szabályozza a szuperképlékeny alakváltozást is.

2. Magasabb hőmérsékleteken a szemcsehatárok növelik a diffúziós folyamatok hatékonyságát.

A következőkben csak a szemcsehatárok szilárdító szerepével foglalkozunk, és elsősorban a folyásfeszültség és szemcseméret közötti összefüggésre vonatkozó kísérleti és elméleti eredményeket foglaljuk össze. A szemcsehatárok szilárdságnövelő szerepéről előzetesen csak annyit jegyzünk meg, hogy a szemcsehatárok is — mint minden egyéb rácshiba —, akadályozzák a diszlokációmozgást, ezért azokban a hőmérséklet és feszültségtartományokban, ahol a képlékeny alakváltozás elsősorban diszlokációmozgás útján valósul meg, a finomszemcsés szerkezet erősíti az anyagot.

2. SZEMCSEHATÁROK TULAJDONSÁGAI

A következőkben *Hirth* nyomán [6] áttekintjük a szemcsehatárok azon tulajdonságait, amelyek az anyag mechanikai tulajdonságai szempontjából fontosak.

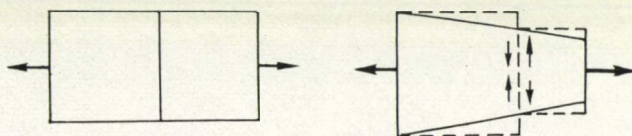
2.1. Kompatibilitási feltételek

Az egykristályok többsége rugalmasan anizotrop. Néhány anyag azonban bizonyos hőmérséklettartományban rugalmasan izotrop. Ilyen pl. az alumínium és wolfram, a szobahőmérséklet környezetében. Ezen anyagok viselkedése polikristályos formában igen egyszerű; homogén feszültségtér hatására szemcséről szemcsére azonos rugalmas deformáció keletkezik bennük.

Az anizotrop polikristályos testekben a rugalmas feszültség és deformáció nem lehet egyidejűleg homogén. Ez még akkor is fennáll, ha az átlagos feszültség és deformáció független a helytől, tehát a lokális feszültség mindenütt ugyanazon érték körül ingadozik.

Az átlagos és lokális feszültség különbségét inkompatibilitási feszültségnek nevezzük. Az elnevezés onnan ered, hogy amennyiben az egyes szemcsékben csak az átlagos feszültség uralkodna, akkor az egyes szemcsék deformációja inkompatibilis lenne. (Az alakváltozás után a szemcsék nem illelnének össze.)

A fentiek jól érzékelhetők egy a határfelületekre merőlegesen meghúzott bikristályon. A kompatibilitási feltételnek megfelelően a határfelületen a két kristály elmozdulásterének meg kell egyeznie, így az anizotropia miatt a határon pl. a 3. ábrának megfelelő nyírófeszültség keletkezhet. Az ily módon fellépő kompatibilitási feszültségek és a külső feszültség eredője a szemcsehatár közelében újabb csúszási rendszereket aktiválhat és jelentősen megváltoztathatja a határok közelében a diszlokációs szerkezetet. A kristályos testek alakváltozása mindig anizotrop. A képlékeny alakváltozás a polikristályos testekben tehát olyan rugalmas feszültség- és elmozdulásteret kelt, hogy a kétfajta alakváltozás összege már folytonosan deriválható elmozdulástérből legyen származtatható, azaz kompatibilis deformációnak feleljen meg.



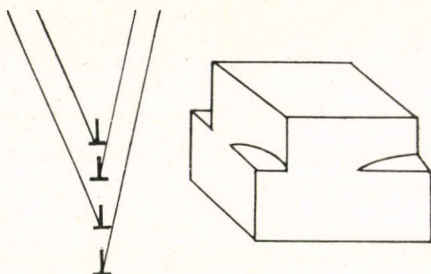
3. ábra. Inkompatibilitási feszültség keletkezése

2.2. A szemcsehatár szerkezete

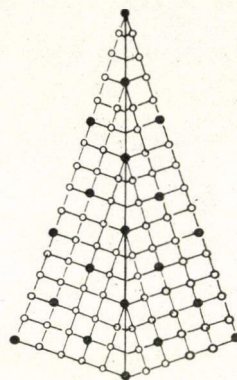
A polikristályos anyagok mechanikai tulajdonságait az egyes szemcsék átlagos viselkedése alakítja ki, ezért csak a határok néhány általános tulajdonságával foglalkozunk.

A 4. ábrán a két leginkább ismert szemcsehatár típus, a kisszőgű dőlt, illetve csavart határ látható. A szemcsehatárt a dőlt határ esetén él-, a csavart határ esetén csavardiszlokációfalak alkotják. A kisszőgű szemcsehatárok általában kevert disz-

lokációkötegekből állnak. A nagyszögű szemcsehatárok többsége *Schober* és *Baluffi* kísérleti munkái [7] és a *Bollmann*-féle rácselmélet [8] alapján koincidencia rácsban képződött szemcsehatár diszlokációk segítségével értelmezhető. Koincidencia rács akkor keletkezik, ha egy kristályt elforgatva, az eredeti és az elforgatott kristály egyes rácpontjai egybeesnek. Koincidencia rácsot alkotnak például az egyszerű köbös kristály és a $\langle 310 \rangle$ irányú ikerkristálya (5. ábra). Az így keletkező ikerhatár a nagyfokú szimmetria miatt rendkívül alacsony energiájú.

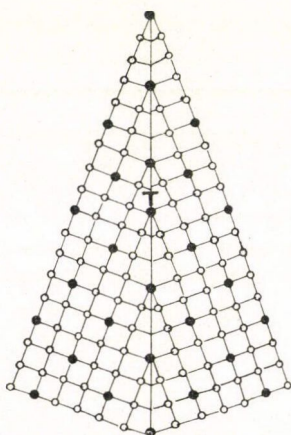


4. ábra. Dőlt és csavart határ sémája

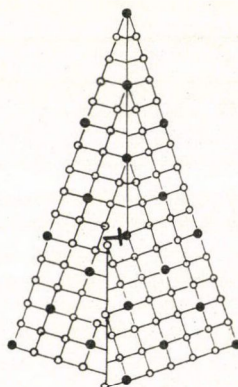


5. ábra. Koincidencia rács

Ha valamelyik kristályt ebből az állapotból csekély mértékben elfordítjuk, az egymást átlapoló részek környezetében nagy energiájú lépcső keletkezne. Az egyes atomok relaxációja miatt azonban a határ a 6., ill. 7. ábrán látható alacsonyabb energiájú állapotba rendeződik. Az alacsonyabb energiájú állapot az $\frac{1}{5}$ [310], ill. $\frac{1}{5}$



6. ábra. $\frac{1}{5}$ [310] típusú szemcsehatár diszlokáció



7. ábra. $\frac{1}{5}$ [130] típusú szemcsehatár diszlokáció

[130] Burgers-vektorú szemcsehatár diszlokációk keletkezésével valósul meg. Vég-eredményben tehát az atomi szinten homogén koincidencia rácsban a nagyszögű szemcsehatárok is diszlokációsorral adhatók meg. *Hirth* kimutatja, hogy a kisszögű szemcsehatárok feszültségtére rendkívül rövid hatótávolságú [10]. Ez az eredmény stabilis nagyszögű szemcsehatárookra is általánosítható [5].

2.3. Szemcsehatárok és diszlokációk kölcsönhatása

A szemcsehatárokon felhalmozódó diszlokációk rövid hatótávolságú feszültségterükön keresztül kölcsönhatásba léphetnek a határ felé mozgó rácsdiszlokációkkal. A kölcsönhatás eredményeként a rácsdiszlokációk feltorlódnak a szemcsehatárok mentén, de be is hatolnak a határba, ezzel megváltoztatják a határ közvetlen környezetét és magának a határnak az alakját is. Bizonyos esetekben a szemcsehatárok diszlokációforrásként, ill. nyelőként is viselkedhetnek. A szemcsehatár környezetében lokális keményedés lép fel, egyrészt

— a határ közelében levő folyást akadályozó rugalmas belső feszültségek miatt, másrészt

— a határközeli keresztcsúszások miatt bonyolultabbá váló diszlokációszerkezet miatt [10].

3. A FOLYÁSFESZÜLTSEG ÉS A SZEMCSEMÉRET KAPCSOLATA

A polikristályos anyag folyása akkor következik be, ha τ valamennyi szemcse több csúszási rendszerében eléri a τ^* kritikus értéket. A kísérleti tapasztalatok [3, 4, 5, 6, 10] szerint a nyújtási folyáshatár és a szemcseméret között igen sok esetben a

$$\sigma = \sigma_0 + k l^{-1/2} \quad (5)$$

Hall—Petch reláció áll fenn, ahol l a szemcseméret, σ_0 és k anyagi állandók.

Az (5) formula a (4) összefüggés miatt egyenértékű a

$$\tau = \tau_0 + k' l^{-1/2} \quad (6)$$

egyenlettel, ahol τ most a kritikus csúsztató feszültség. A következőkben mind az (5), mind a (6) formulát Hall—Petch egyenletnek nevezzük. Az egyenletet célszerű sokszor az általánosabb

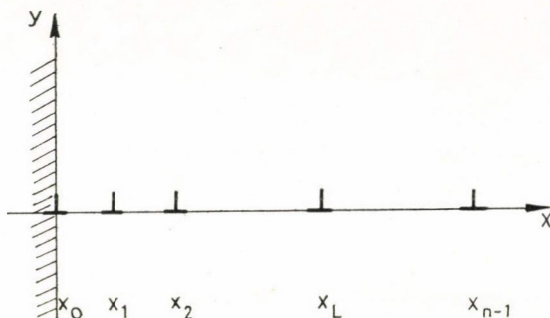
$$\tau = \tau_0 + k' l^m$$

alakban felírni, ahol a kísérleti tapasztalat szerint $\frac{1}{3} > m > -1$.

A következőkben először a (6) egyenlet értelmezésével foglalkozunk.

3.1. Diszlokáció felhalmozódási (pile up) modellek

Hall szerint a szemcsehatárok előtt diszlokációk torlódhatnak fel (8. ábra), s a folyásfeszültséget a feltorlódott halmaz előtt meghatározott távolságban keletkező lokális feszültség határozza meg [11]. *Petch* a folyásfeszültséget a szemcsehatárnál keletkező feszültségkoncentrációval azonosította [12]. A folyás feltétele szerinte az, hogy a halmaz által létrehozott feszültség elérje a szemcsehatárok szilárdságát. A részletes számításoknak rendkívül sokféle módszere alakult ki, a következőkben csak a fontosabbakat ismertetjük.



8. ábra. Diszlokáció feltorlódás akadályon

Egyrétegű felhalmozódások

Tekintsünk egy azonos Burgers-vektorú diszlokációkból álló feltorlódott halmazt. Legyen a csúszósík az xz sík és legyen minden diszlokáció párhuzamos a z tengellyel. Egyensúly esetén a diszlokációkra ható erő zérus, azaz [2, 13, 14]:

$$\frac{A}{x_i} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{A}{x_i - x_j} - \sigma = 0, \quad (7)$$

ahol x_i az egyes diszlokációk helykoordinátája, $A = \frac{\mu b}{2\pi}$ és $\sigma = \sigma_x$ csavardiszlokációkra, továbbá $A = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)}$ és $\sigma = \sigma_{xy}$ éldiszlokációkra, míg kevert diszlokációk esetén

$$A = \frac{\mu b [\sin^2 \Phi + (1-\nu) \cos^2 \Phi]}{2\pi(1-\nu)} \quad (8)$$

és

$$\sigma = \sigma_{xy} \sin \Phi + \sigma_{yz} \cos \Phi, \quad (9)$$

ahol μ a nyírási modulusz, ν a Poisson-szám, Φ pedig a diszlokációvonal és a Burgers-vektor által bezárt szög.

Bevezetve az $\frac{A}{2\sigma}$ távolságegységet, a (7) egyenlet az

$$\frac{1}{x_i} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{1}{x_i - x_j} - \frac{1}{2} = 0 \quad (10)$$

alakot ölti, ahol x_i és x_j most az új távolságegységben mért helykoordinátákat jelenti. Állítsuk elő a (10) egyenletet kielégítő x_i -értékekkel az

$$f(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) = 0 \quad (11)$$

polinomot. Ekkor

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x - x_i} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{1}{x - x_j}. \quad (12)$$

Képezve az $x \rightarrow x_i$ határértéket, a (12) egyenlet bal oldala a L' Hospital szabálynak megfelelően a

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \frac{f'(x)(x - x_i) - f(x)}{f(x)(x - x_i)} = \frac{1}{2} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} \quad (13)$$

határértékhez, jobb oldala pedig a (10) egyenlet alapján az $\frac{1}{2} - \frac{1}{x_i}$ határértékhez tart.

Ily módon a probléma megoldható, ha az

$$f''(x) + \left(1 - \frac{2}{x}\right) f'(x) + q(n, x) f(x) = 0 \quad (14)$$

másodrendű differenciálegyenletben $q(n, x)$ megválasztható úgy, hogy az egyenletnek legyen (11) alakú megoldása ($f(x)$ és $q(n, x)$ zérus helyei természetesen nem egyezhetnek meg). Mivel a (14) egyenlet az

$$xf''(x) + (2 - x)f'(x) + (n - 1)f(x) = 0 \quad (15)$$

alakra hozható, megoldásait az:

$$L'_n(x) = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n! (-x)^k}{k!(k+1)!(n-k-1)!} \quad (16)$$

n -ed rendű Laguerre polinomok deriváltjai szolgáltatják [15].

A $v(x) = xf(x) \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$ helyettesítéssel a (15) egyenlet a

$$v''(x) + \left(\frac{n}{x} - \frac{1}{4}\right)v(x) = 0 \quad (17)$$

alakra transzformálható, amelynek a megoldása az $x \ll 4n$ feltétel teljesülése esetén a

$$v(x) = \sqrt{x} J_1(2\sqrt{nx}) \quad (18)$$

függvény, ahol J_1 az elsőrendű Bessel-függvény [15]. (18) alapján a halmaz csúcsa közelében elhelyezkedő diszlokációk helykoordinátája az

$$x_i \simeq \frac{j_i^2}{4n} \quad (19)$$

formulával adható meg, ahol j_i a J_1 Bessel-függvény i -ik zérushelye. Nagy n értékek esetén a halmaz teljes hosszúsága az

$$l = \frac{2nA}{\sigma} \quad (20)$$

értékkel közelíthető.

A halmazt alkotó diszlokációk nyugalomban vannak, tehát az egyes diszlokációkra ható erők eredője zérus. Az egyes diszlokációk egyensúlyát az

$$\begin{aligned} F_{01} + F_{02} \dots \sigma b &= \sigma_{\text{krit}} b \\ -F_{01} + F_{12} \dots + \sigma b &= 0 \\ -F_{0,n-1} \dots + \sigma b &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

egyenletek teljesülése biztosítja, ahol a kettős indexszel jelölt mennyiségek az egyes diszlokációk között fellépő erőket σb a külső feszültség miatt fellépő, $\sigma_{\text{krit}} b$ pedig a szemcsehatár által a halmaz csúcsán levő diszlokációra gyakorolt erőt jelenti. Minthogy a szemcsehatár feszültségtete rövid hatótávolságú, kölcsönhatás csak a felhalmozódás csúcsán elhelyezkedő diszlokáció és a szemcsehatár között lép fel.

A (21) egyenleteket összeadva adódik, hogy

$$\sigma_{\text{krit}} = n\sigma \quad (22)$$

azaz, σ külső feszültség esetén

$$n = \frac{\sigma_{\text{krit}}}{\sigma} \quad (23)$$

diszlokációnak kell a szemcsehatár előtt feltorlódni ahhoz, hogy a képlékeny alakváltozás az egyik szemcséből a másikba jusson.

n értékét (20)-ba helyettesítve és a kapott egyenletet σ -ra megoldva a

$$\sigma = \sqrt{2A\sigma_{\text{krit}}} l^{-1/2} \quad (24)$$

összefüggés adódik. Ha a szemcsék belsejében további σ^* belső feszültség is fellép, akkor a végeredmény:

$$\sigma = \sigma^* + \sqrt{2A\sigma_{\text{krit}}} l^{-1/2}. \quad (25)$$

Ez azt jelenti, hogy ha $\sigma^* \neq 0$, akkor σ helyett a $\sigma_{\text{eff}} = \sigma - \sigma^*$ effektív feszültséggel kell az előbbi számítást elvégezni. Ha figyelembe vesszük, hogy a halmaz hossza határesetben egyenlő a szemcsemérettel, akkor látható, hogy (25) éppen a (6) Hall—Petch egyenlet.

A modell alapján a $\sigma - l^{-1/2}$ egyenes meredekségére tehát

$$k = \sqrt{2A\sigma_{\text{krit}}} \quad (26)$$

adódik.

(25) alakú egyenletre jutott *Head* és *Louat* is, akik a feltorlódott halmaz feszültségterét folytonos eloszlású diszlokációkkal számították ki [16].

Chou és *Louat* megállapította, hogy ha az inhomogén feszültségtér a

$$\sigma(x) = \sigma_0 \left(1 + \frac{\lambda x}{l} \right), \quad \lambda = \text{áll}$$

függvénnyel írható le, akkor a Hall—Petch-egyenlet a

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\sqrt{8A\sigma_{\text{krit}}}}{\lambda + 2} l^{-1/2} \quad (27)$$

alakot ölti, vagyis változó feszültség esetén a mereedség λ -n keresztül függ a feszültségtől is [17]. Hasonló számítások végezhetők kiterjedt diszlokációk feltorlódásakor is, továbbá figyelembe vehető a második fázisok és a dinamikus effektusok hatása is a feltorlódásra [13].

Az egy oldalon történő felhalmozódásnál realisabbnak tűnik, ha a szemcse belsőjében elhelyezkedő források által kibocsátott diszlokációk mindkét oldali feltorlódását figyelembe vesszük. Ilyen modell alapján és folytonos diszlokációeloszlás feltételezésével *Hirth* és *Lothe* a

$$\sigma_{\text{krit}} = \frac{\pi}{4} n\sigma \quad (28)$$

összefüggéshez jutott, amelyből a

$$\sigma = \sigma^* + 2\sqrt{2A\sigma_{\text{krit}}} l^{-1/2} \quad (29)$$

Hall—Petch reláció adódik, ha még feltételezzük, hogy a diszlokációfelhalmozódás hossza a szemcseméret felével egyenlő [10]. Az egyenes mereksége — amint az várható volt — éppen kétszerese az egyik oldalán feltorlódott halmaz feltételezésével adódó eredménynek. *Chou* és *Pande* kimutatta [18], hogy ha a diszlokációtorlódást egy *mb* Burgers-vektorú szemcsehatár diszlokáció okozza, akkor:

$$k = \sqrt{8mA\sigma_{\text{krit}}}. \quad (30)$$

Suzuki és *Nakanishi* kísérleti vizsgálataik értelmezésére alkotott elméleti modelljének alap gondolatát az képezi, hogy a feltorlódó diszlokációsor élén elhelyezkedő diszlokáció a folyás megindulásakor behatol a határba, és a határban egy szemcsehatár diszlokációt hátrahagyva átjut a szomszédos szemcsébe [19, 20].

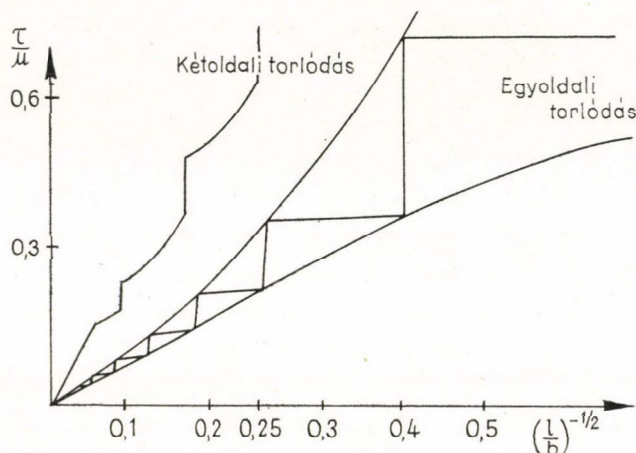
Armstrong a Hall—Petch reláció vizsgálatát nagyon kis méretű szemcsékre is kiterjesztette [3, 4]. Eredményeit elméletileg egyik, ill. mindkét oldalon feltorlódott diszkrét elemekből álló diszlokációhalmazok segítségével értelmezte. Minthogy a kis méretű szemcsékben csak néhány diszlokációból álló halmazok jöhetnek létre, a folyásfeszültség-szemcseméret függvény elméletileg a 9. ábrán látható lépcsős grafikonnal jellemezhető. A folyásfeszültség ugyanis egészen addig állandónak tekinthető, amíg a halmazt alkotó diszlokációk száma állandó. Az elméletből adódó ugrásokat kísérleti eredmények nem támasztják alá.

Az egyenes diszlokációkból álló halmazoknál jobban közelítik a valóságos helyzetet a diszlokációhurkokból álló halmazok. *Li* és *Chou* folytonos diszlokációeloszlá-

son alapuló számításai szerint [13] a Hall—Petch egyenes meredeksége ekkor a

$$k = \sqrt{\frac{\mu b (2 - \nu) \pi \sigma_{\text{krit}}}{2(1 - \nu)}} \quad (31)$$

formulával adható meg. Ez az eredmény csak csekély mértékben tér el *Li* és *Liu* diszkrét hurkok feltételezésén alapuló számításaitól [21].



9. ábra. Mikroszemcsés anyag folyásfeszültségének elméleti szemcseméret függése

Többrétegű felhalmozódások

Li és *Chou* többrétegű, ill. diszlokációfalakból álló halmazokra vonatkozó vizsgálatokat is végzett. A számítások ebben az esetben is a kritikus feszültségkoncentráció meghatározásán keresztül vezetnek a Hall—Petch egyenes meredekségének meghatározásához, azonban általában nagyon bonyolultak, s konkrét eredményt csak számítógépek segítségével adnak.

3.2. Alakítási keményedési elméletek

Az elméletek alapját a diszlokációsűrűség és a folyásfeszültség közötti kísérleti és elméleti úton is igazolt

$$\tau = \tau^* + \alpha \mu b \sqrt{\rho} \quad (32)$$

összefüggés képezi [22, 23], ahol α és τ^* anyagi állandók, μ a nyírási modulusz, ρ a diszlokációsűrűség. A (32) összefüggésből azonnal adódik a Hall—Petch egyenlet, ha a szemcseméret és a diszlokációsűrűség között

$$\rho \sim l^{-1} \quad (33)$$

arányosságot tételezünk fel.

A következőkben olyan elméleti modelleket ismertetünk, amelyek a (33) összefüggésre vezetnek.

Az Ashby-modell

Ashby az inhomogén anyagok képlékeny tulajdonságaival foglalkozva megállapította, hogy ezek az anyagok gyorsabban keményednek, mint az egykristályok [24, 25]. Ennek magyarázatát abban látja, hogy az inhomogén anyagban a kompatibilitás teljesülése csak egy többlet diszlokációsűrűség képződésével lehetséges. Az így keletkező diszlokációkat geometriailag szükséges, ill. röviden geometriai diszlokációknak, míg az anyagban mindenképpen meglevő diszlokációkat statisztikus diszlokációknak nevezzük. A G geometriai diszlokációsűrűséget az alábbi módon határozhatjuk meg.

A 10. ábra egyetlen csúszási rendszerben nyíródó, meghajlított kristály metszetét mutatja. A berajzolt egységnyi felületű Burgers kör B záródási hiányát

$$B = \Delta x_2 \gamma = \frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{R} = \frac{1}{R}$$

(ahol R a meghajlított csúszási síkok görbületi sugara), ill.

$$B = \sigma^G b$$

alakban is felírhatjuk, amiből a geometriai diszlokációsűrűségre a

$$\rho^G = \frac{1}{Rb} \quad (34)$$

összefüggés adódik. Hasonló eredményre jutunk, ha a kristály tiszta nyírása következik be (11. ábra). Osszuk be a kristályt kicsiny $\Delta x_1 \Delta x_2$ méretű cellákra (11/a. ábra). Az alakváltozás során fellépő nyírási gradiens miatt a cellák különböző mértékben deformálódnak (11/b. ábra). A szomszédos cellák elnyíródásának különbsége a nyírási gradiens segítségével a

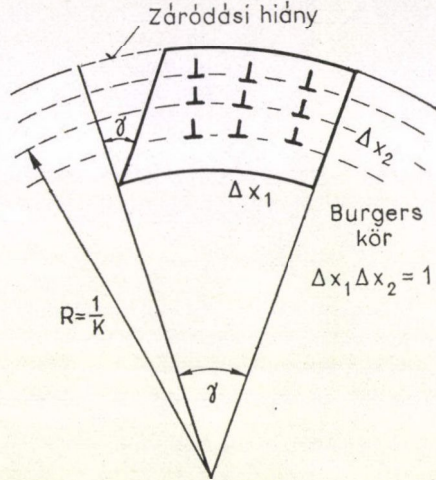
$$\Delta \gamma = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} \right) \Delta x_1 \quad (35)$$

alakban adható meg. Feltéve, hogy az egyes cellák alakváltozása b Burgers vektorú dipólusok keletkezésével valósul meg, az egyes cellákban keletkező dipólok Δn száma az

$$nb = \gamma \Delta x_2 \quad (36)$$

kifejezéssel adható meg. Újra egyesítve a cellákat, és feltételezve, hogy az ellentétes előjelű diszlokációk megsemmisítik egymást, a határokon fennmaradó Δn többlet a következő:

$$\Delta n = \frac{1}{b} \Delta \gamma \Delta x_2 = \frac{1}{b} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} \Delta x_1 \Delta x_2. \quad (37)$$



10. ábra. Geometriai diszlokációk keletkezése hajlításkor

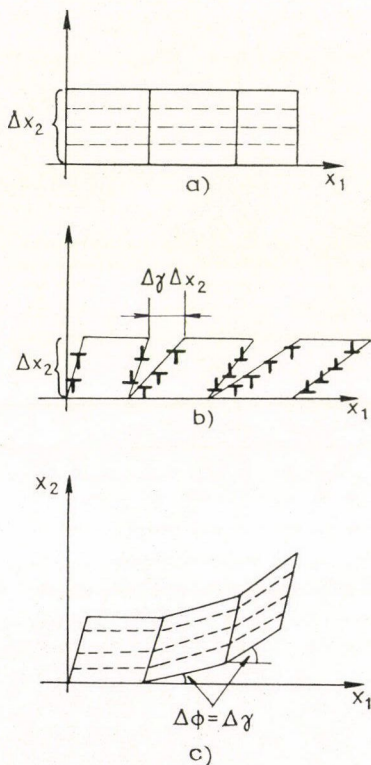
Így a diszlokációsűrűség:

$$\varrho^G = \frac{1}{b} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}. \quad (38)$$

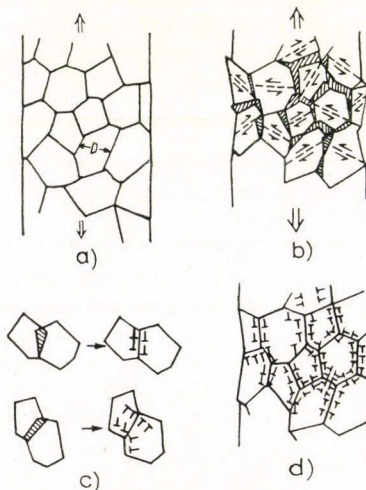
A 11/c. ábra mutatja, hogy a rács elfordulása megegyezik az egyszerű nyírás gradiensevel. A deformálódó és nem deformálódó cellák (pl. különböző fázisú részecskék) $\Delta\varphi$ elfordulására így módon $\Delta\varphi = \Delta\gamma$, azaz

$$\varrho^G = \frac{1}{Rb}. \quad (39)$$

A polikristályos anyagok deformációja (még a tiszta fémeké is) a szemcsés szerkezet miatt mindig inhomogén módon megy végbe. A külső feszültség hatására az egyes szemcsék az anizotrópia miatt különböző módon deformálódnának, s így a szemcsék határán üregek, ill. átfedések keletkeznének. A kompatibilitás biztosítására a szemcsék határán geometriai diszlokációk halmozódnak fel (12. ábra). Ha a minta megnyúlása ε , akkor az egyes szemcsehatárok relatív elmozdulása arányos-



11. ábra. Nyírási alakváltozáskor keletkező geometriai diszlokációk



12. ábra. Geometriai diszlokációk keletkezése polikristályos anyag nyújtása során

nak vehető $\frac{l}{2} \varepsilon$ -nal, ahol l az átlagos szemcseméret. Ily módon a geometriailag szükséges diszlokációk n száma a szemcsehatárok egyik oldalán:

$$n \sim \frac{\varepsilon l}{4b}. \quad (40)$$

Minthogy a szemcsék átlagos felülete $\sim l^2$, így ebből a geometriai diszlokációsűrűségre a

$$\rho^G \cong \frac{\varepsilon}{4bl} \quad (41)$$

összefüggés adódik. Amennyiben a teljes diszlokációsűrűség döntő részét a geometriai diszlokációk képezik, akkor a folyásfeszültség szemcseméret függésére (32)-ből a

$$\tau = \tau^* + \frac{1}{2} \alpha \mu \sqrt{b \varepsilon l}^{-1/2} \quad (42)$$

Hall—Petch típusú egyenletet kapjuk.

Thompson és Baskes kísérletileg vizsgálta a (42) összefüggés teljesülését. Nem tekintették elhanyagolhatónak azonban a statisztikus diszlokációsűrűséget sem, ezért a teljes diszlokációsűrűséget a

$$\rho^t \cong \frac{\varepsilon}{b \lambda^s} + \frac{\varepsilon}{4bl} \quad (43)$$

formában fejezték ki, ahol λ^s a statisztikus diszlokációk csúszási távolsága. (43) felhasználásával (42) helyett a

$$\tau = \tau^* + \alpha \mu b \sqrt{\varepsilon b} \left(\frac{1}{4l} + \frac{1}{\lambda^s} \right) \quad (44)$$

kifejezéshez jutunk. Az alumínium és réz mintákon végzett mérési eredményekhez azonban nem sikerült kellő pontossággal illeszteni a (44) alakú függvényt [26].

Thompson az Ashby-modell Embury által javasolt [27] egyszerűsített változatát is ellenőrizte [28]. Embury a folyásfeszültséget a

$$\tau = \tau^s + \Delta \tau^G \quad (45)$$

tagokra bontotta, ahol τ^s a statisztikus, $\Delta \tau^G$ pedig a geometriai diszlokációktól származó járulékot jelentik. Ashby nyomán a geometriai diszlokációk járuléka elméletileg a

$$\Delta \tau^G = \alpha \mu \left(\frac{\varepsilon b}{l} \right)^{1/2} \quad (46)$$

összefüggéssel adható meg. Ez a felbontás azonos nagyságrendű ρ^G és ρ^s esetén elméletileg teljesen indokolatlan, s Thompson kísérleti vizsgálatai szerint is tarthatatlan. Thompson és munkatársai szerint az Ashby-modell azért vezet a kísérleti tapasztalatokkal összeegyeztethetetlen eredményre, mert a teljes szemcsetérfogatban csak a statisztikus diszlokációk eloszlása tekinthető homogénnek, hiszen a geometriai diszlokációk elsősorban a szemcsehatárok mentén halmozódnak fel [29]. Elfogadhatónak látszik tehát az a feltevés, hogy a szemcséket két különböző szilárdságú részre kell

felbontani. A szemcsé közepének szilárdságát a statisztikus diszlokációk, a határ környezetében képződő keményebb réteg szilárdságát pedig a geometriai diszlokációk szabják meg. (Ez az elképzelés rokon egy *Hirth* által vizsgált modellel [6], amellyel a későbbiekben még foglalkozunk.) Ennek megfelelően az eredő folyásfeszültséget a szemcsé belsejében és a határhoz közeli rétegben érvényes τ^s , ill. τ^G folyásfeszültségek térfogata szerint súlyozott átlagával állíthatjuk elő:

$$\tau = \tau^* + p_1 \tau^s + p_2 \tau^G, \quad (47)$$

ahol p_1 és p_2 a súlyfaktorok, τ^* pedig anyagi állandó. Felhasználva a Holt által [30, 31] javasolt

$$(\varrho^s)^{1/2} \sim \frac{1}{\lambda^s} \quad (48)$$

összefüggést, a τ^s feszültséget a következőképpen fejezhetjük ki:

$$\tau^s \simeq K_1 \frac{1}{\lambda^s}, \quad (49)$$

ahol λ^s a statisztikus diszlokációk csúszási távolsága. Nyilvánvaló, hogy λ^s az ε megnyúlás és az l szemcseméret függvénye, legalábbis abban az értelemben, hogy az l szemcseméret λ^s felső korlátja. Meg kell jegyezzük, hogy az elmélet egyik gyenge pontja az, hogy a $\lambda^s = \lambda^s(\varepsilon, l)$ függvény konkrét alakjának meghatározására nem áll rendelkezésre megnyugtató elméleti modell.

A szemcséhatár környezetében fennálló τ^G feszültséget Thompson nyomán a

$$\tau^G \simeq K_2 l^{-1/2} \quad (50)$$

alakban fejezhetjük ki [28]. Eredményei szerint a $\varrho^G \sim \varepsilon$ összefüggés csak kis feszültség esetén érvényes.

A p_1, p_2 súlyfaktorok első közelítésben:

$$p_1 = \left(1 - \frac{\lambda^s}{l}\right), \quad p_2 = \frac{\lambda^s}{l}. \quad (51)$$

Ezekkel (47) a

$$\tau = \tau^* + \left(1 - \frac{\lambda^s}{l}\right) \frac{K_1}{\lambda^s} + \frac{\lambda^s}{l} \frac{K_2}{l^{1/2}} \quad (52)$$

alakot ölti. Nagyon kis megnyúlások esetén a λ^s csúszási távolság közelít a szemcsemérethez, így a folyásfeszültséget az Ashby-modellek megfelelően elsősorban a geometriai diszlokációk szabják meg. $\varepsilon \simeq 0$ esetén K_2 lényegében a Hall—Petch egyenes meredekségével egyenlő. A megnyúlás növekedésével λ^s/l csökken, így a statisztikus diszlokációk szerepe egyre jelentősebbé válik. A K_1 faktor fizikai interpretációja tehát a nagy megnyúlási tartományra vonatkozó eredmények alapján lehetséges (5. fejezet).

Margolin és *Stanescu* kísérleti vizsgálatokat végeztek a szemcséhatár körül felkeményedő réteg térfogatarányának becslésére, azaz lényegében a p_1 és p_2 tényezők meghatározására [32]. Megállapították, hogy a deformáció során keletkező csúszásvonalak a szemcséhatárokon sokkal sűrűbben helyezkednek el, mint a szemcsék belsejében. Ennek alapján elkülönítették a határ körüli felkeményedő réteget a szemcsé

belsejétől. A diszlokációk λ^s , ill. λ^G csúszáshosszát a szemcsehatár belsejében, ill. a határ közelében mért átlagos csúszásvonal távolsággal azonosították. A szemcsehatár körüli réteg térfogatarányának becslésére a

$$V^G = K_1 \frac{2\lambda^G}{l} \quad (53)$$

összefüggést használták, ahol $K_1 \lambda^G$ azt a távolságot jelenti, amelyen a felkeményedett réteg τ_{\max}^G feszültsége a szemcse belsejében fennálló τ^s értékre csökken. Ha a τ^* tagtól eltekintünk, akkor a folyásfeszültség:

$$\tau = V^G \tau^G + (1 - V^G) \tau^s. \quad (54)$$

A modell alapján a szemcsék belsejében felterlódó statisztikus diszlokációk mozgatásához

$$\tau^s = 2\tau_i + \frac{n\mu b\gamma}{l} \quad (55)$$

feszültség szükséges, ahol τ_i a belső feszültség, n a szemcsébe felhalmozódó diszlokációk száma, γ egy szerkezettől függő paraméter, amely a feszültséggradienst veszi figyelembe. (55)-t (54)-be helyettesítve:

$$\tau = \frac{2\alpha\tau_{\max}^G \lambda^G}{l} + \left(1 - K_1 \frac{2\lambda^G}{l}\right) \left(2\tau_i + \frac{n\mu b\gamma}{l}\right), \quad (56)$$

ahol τ_{\max}^G a határmenti felkeményedett rétegben fellépő maximális feszültség, α a K_1 tényezővel összefüggő állandó. Az összefüggés a kísérleti eredményekhez jól illeszthető.

Szemcsehatár forrás modellek

Li és Chou a szemcsehatárokat diszlokációforrásnak tekintik [13]. A források diszlokáció kibocsátó képessége a határ szerkezetétől függ, a szemcsék méretétől azonban nem. Gömb alakú szemcse esetén a folyás pillanatában a diszlokációsűrűség a

$$\rho \simeq \frac{\frac{1}{2}(\pi l^2 m)}{\frac{1}{6}\pi l^3} = \frac{3m}{l} \quad (57)$$

formulával becsülhető, ahol m a határ egységnyi felülete által kibocsátott diszlokációk teljes hossza. (57)-t (32)-be helyettesítve a

$$\tau = \tau^* + \alpha\mu b \sqrt{3ml}^{-1/2} \quad (58)$$

Hall—Petch egyenlet adódik.

Hirth, Li egy régebbi, szemcsehatár lépcsőkre vonatkozó modelljét [33] tetszőleges szemcsehatár diszlokáció esetére általánosította [6]. Feltételezte, hogy a határ által emittált diszlokációk száma a szemcsehatár diszlokációsűrűségével arányos.

Míthogy a szemcsehatár felületének és térfogatának aránya $\sim l^{-1}$, a diszlokáció-sűrűsége a

$$\rho = \frac{\lambda A}{V} \sim l^{-1}$$

kifejezés adódik, amiből (32)-vel ismét Hall—Petch típusú egyenletet kapunk. Langford és Cohen diszlokációhurkok nukleálódásának feltételezésével

$$\tau \sim l^{-1}$$

alakú folyásfeszültség szemcseméret kapcsolatát határozott meg [34].

3.3. Egyéb modellek

Az Ashby típusú modellek ismertetésekor már részletesen foglalkoztunk a szemcsék két különböző szilárdságú részre történő felbontásának következményeivel. Ezt a modellt Hirth javasolta [6], s tipikusan az $l^{-1/2}$ -es folyásfeszültség függéstől eltérő összefüggéshez vezető elméletek közé sorolta. Hirth modelljét kísérleti vizsgálatokkal nem támasztja alá. Elméletének alapgondolata, tehát a határréteg felkeményedése,

feltétlenül igaznak tűnik. Alátámasztják ezt Miura és Tajima kísérleti eredményei, akik mikrokeménységmérés, valamint elektronmikroszkópos vizsgálatok segítségével réz-alumínium ötvözetekben meghatározták a keményedő réteg vastagságát [35].

Johnston és Feltner modellje a képlékeny alakváltozás sebességének meghatározására épül [36]. A 13. ábrán két szemcse határa látható. Tegyük fel, hogy az A szemcsében egyetlen csúszási síkban mozognak a diszlokációk. Ekkor a csúszási sávban bekövetkező mozgás miatt az A szemcse alakváltozási sebessége a

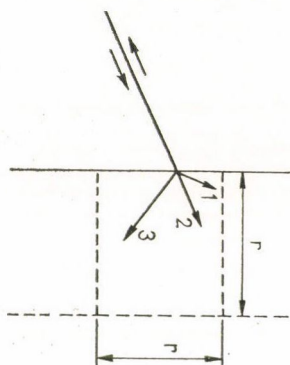
$$\dot{D} = \rho b \bar{v} \lambda \quad (57)$$

formulával fejezhető ki, ahol \bar{v} a diszlokációk átlagos mozgási sebessége, λ pedig a szabad úthossza. A csúszási síkban mozgó diszlokációk behatolnak a B szemcsébe, ott azonban már több csúszási rendszer is aktív

válódhat. Amennyiben a behatolási mélység r , a B szemcse képlékeny alakváltozásának sebessége

$$\dot{R} = \frac{r}{m} \sum_{1,2,3} M \rho b \bar{v}, \quad (58)$$

ahol m az átlagos Schmied faktor, M pedig a diszlokáció sokszorozódási faktor. Az összegezést az aktiválódó csúszási rendszerekre kell kiterjeszteni. Az alakváltozási sebesség különbözősége miatt a minta r méretű részében az alkalmazott feszültség mellett $(\dot{D} - \dot{R})$ -tal arányos $\Delta \tau$ feszültségtöbblet ébredt. Ha $\dot{R} \sim \dot{D}$, akkor $\Delta \tau \sim 0$ és a szemcsehatár nem jelent lényeges akadályt a diszlokációmozgással szemben. $\Delta \tau$ leg-



13. ábra. Deformáció sáv behatolása a szomszédos szemcsébe

nagyobb értékét általában akkor veszi fel, amikor a csúszási sáv beleütközik a szemcsehatárba. *Johnson és Feltner* $\Delta\tau$ -t azonosítják a τ_{krit} kritikus folyásfeszültséggel. Polikristályokban a fentiekben leírt mikromechanizmus egy adott időpillanatban nagyon sok helyen működik egyszerre, s vált ki diszlokációsokszorozódást, csökkentve ezzel a diszlokációk szabad úthosszát. Amennyiben elfogadjuk, hogy a τ_{krit} kritikus folyásfeszültség kizárólag a képlékeny inkompatibilitás következménye, akkor a feltorlódott halmaz modell és az alakítási keményedési modell a fentiekben tárgyalt dinamikus közelítés határesetete. Ha a diszlokációk szabad úthossza összemérhető a szemcseátmérővel, akkor a halmaz modellel célszerű számolni, ha azonban a szabad úthossz rövid, akkor az alakítási keményedési modellek jobban használhatóak.

4. KÍSÉRLETI EREDMÉNYEK

A következőkben röviden összefoglaljuk a folyásfeszültség szemcseméret kapcsolatra vonatkozó mérési adatokat. Az I. táblázat a

$$\sigma = \sigma_0 + kl^{-1/2} \quad (59)$$

Hall—Petch egyenletben szereplő állandók numerikus értékeit tartalmazza különböző anyagok esetén. A táblázat adatainak nagy részét *Embury* összefoglaló cikkéből [27] vettük át. Az átvett adatoknál az eredeti szerzők helyett *Embury* cikkére hivatkozunk.

I. TÁBLÁZAT

Anyag	σ [MPa]	k [MPam ^{1/2}]	ε [%]	Szerző
Svédacél	48	0,72	0,2	[27]
Részben dekarburizált vas	46	0,31	0,2	[27]
Dekarburizált vas	37	0,21	0,2	[27]
Ferrovas E	78	0,59	—	[27]
ARMCO vas	76	0,59	—	[27]
Molibdén	110	1,8	0,2	[27]
Molibdén	400	0,54	0,1	[27]
Niobium	70	0,04	0,2	[27]
Öregített niobium	126	0,03	0,2	[27]
Réz	26	0,11	—	[37]
Réz	28	0,40	0,2	[23, 24, 25, 37]
Réz	6,4	4,72	0,2	[38]
Alumínium	16	0,07	—	[28]
Alumínium	14	0,07	0,2	[23, 24, 26]
70/30 Bronz	46	0,32	0,2	[28]
70/30 Bronz	34	0,14	0,2	[23, 24, 26]
Al—3,5 Mg	50	0,27	—	[27]
Ni ₃ Mn (rendezett)	100	1,10	—	[27]
Ni ₃ Mn (rendezetlen)	100	0,47	—	[27]
Cink	33	0,22	0,005	[27]
Mg	7	0,28	0,002	[27]
Titán	8	0,41	0,2	[27]
Titán	0,18	0,4	0,4	[39]
Fe—Co (B ₂ szuperrács rendezett)	60	6,28	—	[27]
Fe—Co (B ₂ szuperrács)	320	0,12	—	[27]

A táblázatban csak azokat az eredményeket gyűjtöttük össze, amelyek az (59) alakú egyenlettel közelítik a folyásfeszültséget. Igen sok olyan kísérleti eredmény létezik, amely legfeljebb csak egy korlátozott szemcseméret tartományban interpretálható az (59) egyenlettel [23, 24, 26, 32, 37, 28].

5. ÖSSZEFOGLALÁS

Cikkünkben áttekintettük a szemcsehatárok szilárdító szerepét. Mind az elméleti, mind a kísérleti vizsgálatok azt mutatják, hogy a szemcsehatár keményedés igen sok tényező függvénye, és sem elméletileg, sem fenomenologikusan nem kezelhető egységesen. A kísérleti vizsgálatok leggyakrabban az (59) alakú szemcseméret függésre vezetnek. Ez a kapcsolat elméletileg is sokféleképpen interpretálható, a probléma bonyolultsága miatt azonban a különböző elméletekben igen sok az esetlegesség.

Az elméletek két csoportba sorolhatók:

1. Diszlokáció felhalmozódási elméletek.
2. Alakítási keményedési elméletek.

Mindkét típusú elméletben a szemcsehatárok diszlokációmozgást akadályozó hatását kell figyelembe venni. A számítások a szemcsehatárok konkrét tulajdonságait többnyire nem használják fel, s így módon az elméletek többsége más diszlokációmozgást akadályozó hatások esetén is alkalmazható (pl. második fázisú részecskék, diszperziós keményedés stb.). Az elméleti vizsgálatok legfőbb nehézségét azonban az okozza, hogy a diszlokációk eloszlásának becslésére nem áll rendelkezésre megfelelő módszer. Fokozza a problémakör bonyolultságát, hogy a diszlokációsűrűség növekedésével a diszlokációk szubszerkezetbe rendeződhetnek, s a kialakuló cellafalak a szemcsehatárokhöz hasonlóan szilárdíthatják az anyagot. A szubszerkezet keményítő hatásával az 5. fejezet foglalkozik.

IRODALOM

1. U. F. Kocks, Met. Trans. *I*, 1121, 1970.
2. I. Kovács és L. Zsoldos, Diszlokációk és képlékeny alakváltozás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965. p. 165.
3. R. W. Armstrong, Ultrafine-Grain Metals, Syracuse University Press, Syracuse, N. Y. USA, 1970. p. 1—27.
4. R. W. Armstrong, Canadian Met. Quart. *13*, 187, 1974.
5. R. W. Armstrong, Met. Trans. *I*, 1169, 1970.
6. J. P. Hirth, Met. Trans. *3*, 3047, 1972.
7. T. Schober and R. W. Baluffi, Phil. Mag. *21*, 109, 1970.
8. T. Schober and R. W. Baluffi, Phil. Mag. *24*, 175, 1971.
9. W. Bollmann, Crystal Defects and Crystalline Interfaces, Springer—Verlag, Berlin, 1970. p. 142—213.
10. Juhász A., Magyar Fiz. Folyóirat, *26*, 543, 1978.
11. J. P. Hirth and J. Lothe, Theory of Dislocations, McGraw Hill, New York, 1968. p. 669.
12. E. O. Hall, Proc. Phys. Soc. *B 64*, 747, 1951.
13. N. J. Petch, J. Iron Steel. Inst. *174*, 25, 1953.
14. J. C. M. Li and Y. T. Chou, Met. Trans. *I*, 1145, 1970.
15. J. D. Eshelby, F. C. Frank and F. R. N. Nabarro, Phil. Mag. *42*, 351, 1951.
16. G. A. Korn és T. M. Korn, Matematikai Kézikönyv Műszakiaknak, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975. 21. fejezet.
17. A. K. Head and N. Louat, Austr. J. Phys. *8*, 1, 1955.
18. Y. T. Chou and N. Louat, J. Appl. Phys. *33*, 3312, 1962.

18. Y. T. Chou and C. S. Pande, *Met. Trans.* 3, 591, 1972.
19. K. Nakanishi and H. Suzuki, *Trans. JIM.* 15, 435, 1974.
20. H. Suzuki and K. Nakanishi, *Trans. JIM.* 16, 17, 1975.
21. J. C. M. Li and G. C. T. Liu, *Phil. Mag.* 38, 1535, 1967.
22. F. R. N. Nabarro, Z. S. Basinski and D. B. Holt, *Adv. phys.* 13, 193, 1964.
23. Kovács I., *Magyar Fiz. Folyóirat*, 25, 114, 1977.
24. M. F. Ashby, *Phil. Mag.* 21, 399, 1970.
25. M. F. Ashby, *Strengthening Methods in Crystals*, eds. A. Kelly and R. B. Nicholson, Elsevier, Amsterdam, 1971. p. 137.
26. A. W. Thompson and M. J. Baskes, *Phil. Mag.* 28, 301, 1973.
27. J. D. Embury, *Strengthening Methods in Crystals*, eds. A. Kelly and R. B. Nicholson, Elsevier, Amsterdam, 1971. p. 331.
28. A. W. Thompson, *Phil. Mag.* 29, 1125, 1974.
29. A. W. Thompson, M. J. Baskes and W. F. Flanagan, *Acta Met.* 21, 1017, 1973.
30. D. L. Holt, *J. Appl. Phys.* 41, 3197, 1971.
31. M. R. Staker and D. L. Holt, *Acta Met.* 20, 569, 1972.
32. H. Margolin and M. S. Stanescu, *Acta Met.* 23, 1411, 1975.
33. J. C. M. Li, *Trans. AIME*, 227, 239, 1963.
34. G. Langford and M. Cohen, *Met. Trans.* 1, 1478, 1970.
35. S. Miura and T. Tajima, *Met. Sci.* 4, 183, 1978.
36. T. L. Johnston and A. C. Feltner, *Met. Trans.* 1, 1161, 1970.
37. A. W. Thompson, *Acta. Met.* 25, 83, 1977.
38. M. D. Merz and S. D. Dahlgreen, *J. Appl. Phys.* 46, 3235, 1975.
39. R. J. Lederich, S. M. L. Sastry, J. E. O'Neal and B. B. Rath, *Mater. Sci. Eng.* 33, 183, 1978.

5. A SZUBSZERKEZETEK SZILÁRDSÁGNÖVELŐ HATÁSA

RAJKOVITS ZSUZSA és TASNÁDI PÉTER
ELTE, Általános Fizika Tanszék

1. BEVEZETÉS

Röntgen és elektronmikroszkópos vizsgálatok azt mutatják, hogy a képlékenyen alakított anyag szerkezete $1\text{ }\mu\text{m}$ körüli mérettartományban is inhomogén. Az ebbe a mérettartományba tartozó szerkezeteket *szubszerkezeteknek* nevezzük.

A szubszerkezeteket a deformáció hőmérséklete szerint két jellemző csoportra oszthatjuk. Az alacsony homológ hőmérsékleteken ($T < 0,5 T_{\text{op}}$, ahol T_{op} az olvadáspont hőmérséklete) képződött szubszerkezeti egységet *cellának*, a magasabb homológ hőmérsékleteken ($T > 0,5 T_{\text{op}}$) kialakulót pedig *szubszemcsének* nevezzük. Az alakítások során általában a kettő keverékéből álló szubszerkezet képződik. Biztosíthatunk azonban olyan körülményeket, amelyek között tisztán az egyik szubszerkezet tulajdonságai tanulmányozhatók.

2. A CELLÁK TULAJDONSÁGAI

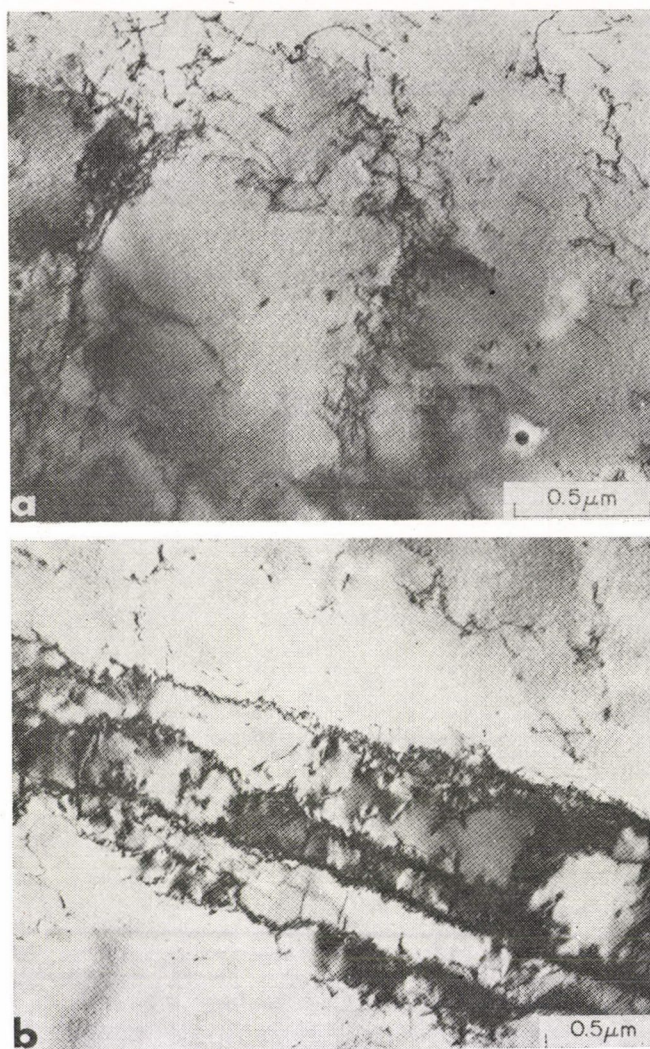
Az alacsony hőmérsékleteken, mérsékelt deformáció során kialakult szerkezetek alkalmasak a cellák tulajdonságainak tanulmányozására.

Az alakítások során az anyagban képződött diszlokációk kötegeket, diszlokációfalakat alkothatnak. Az 1. ábrán látható diszlokációfal szerkezet az anyag cellaképződést megelőző állapotára jellemző. Ez a szerkezet a tck fémekben gyakran megtalálható [1].

A cellaszerkezet jellegzetességei jól láthatók a 2. ábra elektronmikroszkópos felvételén. A cellafalak bőségesen tartalmaznak diszlokációkat, melyek diszlokációhálót alkotnak. A felvételből megállapíthatjuk azt is, hogy a cellák belsejének kontrasztja egyenletes. Ebből arra következtethetünk, hogy a cella belsejében jelentős hosszú hatótávolságú feszültségek nincsenek [1]. Az ilyen mintákról készült elektrondiffrakciós vizsgálatok arra utalnak, hogy a cellahatárok tipikus kisszögű szemcsehatárok, a cellafalak által határolt szomszédos cellák orientációkülönbsége ugyanis kicsi.

3. A SZUBSZEMCSÉK TULAJDONSÁGAI

A másik jellemző szubszerkezeti egység a szubszemcse. Ha a deformáció elég magas hőmérsékleten történik, már a deformáció során jelentős dinamikus megújulással kapcsolatos diszlokációmozgásra, átrendeződésre van lehetőség. Az alakítás és az így aktiválódott diszlokációmozgás együtt alakítja ki a jellemző szerkezetet. Ennélfogva a cellaszerkezethnél sokkal rendezettebb falú szubszerkezet alakulhat ki.

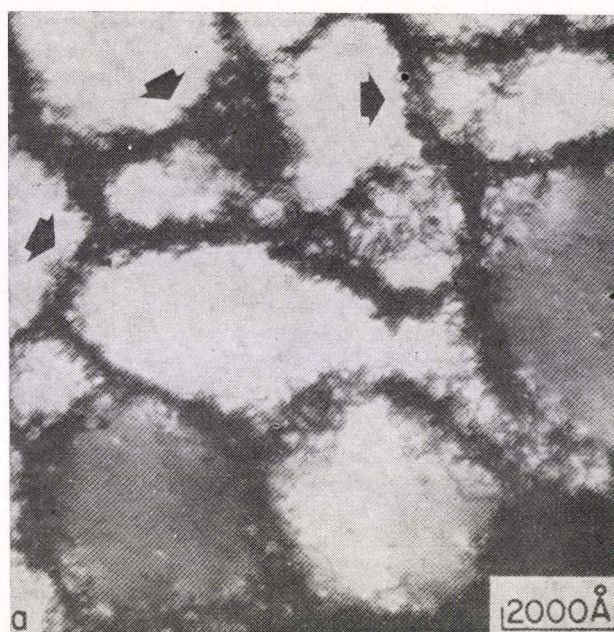


1. ábra. A cellaképződést megelőző állapotra jellemző diszlokáció-falszerkezet

A sztatikus deformációs vizsgálatok és az azt követő hőkezelés során lejátszódó megújulási folyamat együtt egy a fentiekhez hasonló szubszerkezetet eredményez [2].

Tipikus szubszemcsés szerkezet látható a 3. ábrán. A rendezett határok olyan területeket határolnak, melyek között már jelentős az orientációkülönbség.

Az említett szubszerkezetek közötti eltérő vonások az alakított anyag tulajdonságaiban is eltéréseket eredményeznek.



2. ábra. Cellaszerkezet nikkemben



3. ábra. Szubszemcsés szerkezet Al—0,1 s % ötvözetben

4. A SZUBSZERKEZETEK SZILÁRDSÁGNÖVELŐ HATÁSA

4.1. A szubszerkezetek kialakulásának körülményei

A szubszerkezetek szilárdságnövelő hatásának részletes elemzéséhez a szubszerkezetek kialakulásának körülményeit kell megvizsgálnunk.

4.1.1. A cellák szilárdságnövelő hatása

A deformáció során kialakuló cellaszerkezet az anyag alacsonyabb energiájú állapotához vezet. Az egyenletes eloszlás helyett a diszlokációk azért tömörülnek cellafalakba, mert így a diszlokáció—diszlokáció kölcsönhatás során a rendszer rugalmas energiája csökken. Holt elméleti úton is kimutatta, hogy a deformált anyagban egy jellemző méretű szubszerkezetnek kell kialakulnia [3].

A cellaméret feszültségtől, deformációtól és diszlokációsűrűségtől való függésének megállapítása egy tetszőlegesen deformált anyag esetén általában igen bonyolult feladat. Vannak azonban olyan deformációs állapotok — mint pl. az egyensúlyi kúszás —, melyek karakterisztikus cellamérettel jellemezhetők. Ilyenkor a cellaméret a cellaszerkezet kifejlődésének menetéből megjósolható [3]. A cellaképződést sok tényező befolyásolja. Mivel a diszlokációmozgást a feszültség, hőmérséklet, rugalmas állandók és a rétegződési hiba energia szabja meg, így ugyanezek a paraméterek lényegesek a cellaképződésnél is.

A cellaképződés folyamata tanulmányozható pl. egyenletes sűrűségű diszlokáció eloszlás periodikus diszlokációsűrűség fluktuációkkal szembeni stabilitásának vizsgálatával. Tekintsünk pl. párhuzamos csavardiszlokációkat. Az r távolságban elhelyezkedő csavardiszlokációk kölcsönhatási energiája [4]:

$$E_k = -\frac{Gb^2}{2\pi} \ln \frac{R_0}{r}, \quad (1)$$

ahol G a nyírási modulusz, b a Burgers vektor és R_0 a kristály mérete. Látható, hogy az r távolság csökkenésével a diszlokációk kölcsönhatási energiája csökken.

Holt az egyenletes diszlokációeloszlást egy sűrűség-ingadozással perturbálta, s megvizsgálta a perturbáció hatására a rendszer kölcsönhatási energiájában bekövetkező változást [3]. Analízisének egy érdekes eredménye, hogy bizonyos hullámhosszúságú diszlokációsűrűség fluktuációk másoknál gyorsabban terjednek az anyagban. Az ilyen módon dominánssá váló fluktuáció λ_m hullámhossza arányos a ϱ_0 egyenletes sűrűségeloszlás négyzetgyökének reciprokával, azaz

$$\lambda_m = K_c \varrho_0^{-\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

ahol K_c állandó.

A fluktuáció miatt jelentkező csoportosulás a cellafalakban nagyobb diszlokációsűrűséget eredményez a cella belsejéhez viszonyítva. A periodikusan modulált szerkezet tehát a cellafalakban jelentkezik, a domináns fluktuáció hullámhossza pedig a d átlagos cellaméret. Az átlagos cellaméret és diszlokációsűrűség közötti kapcsot

latot tehát a

$$d = \frac{K}{\sqrt{\rho}} \quad (3)$$

összefüggéssel határozhatjuk meg [3].

A (3) kifejezést *Staker* és *Holt* kísérletileg is igazolták [5]. Méréseikből megállapították, hogy az összefüggésben szereplő K tényező nagy tisztaságú anyagok esetén, az anyagi minőségtől függetlenül közelítőleg állandó. Értékét $K=16$ -nak találták.

Witcomb a K értékét a rétegződési hiba energiájával hozta kapcsolatba [6]. Megállapította, hogy különböző anyagokban azonos diszlokációsűrűség esetén az átlagos cellaméret fordítottan arányos a rétegződési hiba energiájával. Az 1. táblázat különböző szerkezetű anyagokban észlelt K értékeket tartalmaz.

1. TÁBLÁZAT

Anyag	Szerkezet	Rétegződési hiba energiája (10^{-8} J/m ²)	Holt-féle arányossági tényező, K
Mo—50 Re	b. c. c.	396	4
Fe—0,007 C	b. c. c.	200	7
Fe—3 Si	b. c. c.		7,1
Cu(OFHC)	f. c. c.	41	16

Nagyon kicsi rétegződési hibájú anyagokban nem alakul ki cellaszerkezet, hanem a diszlokációk síkbeli elrendeződése figyelhető meg [6].

Az átlagos cellaméret és a diszlokációsűrűség közötti összefüggés ismeretében megadható a folyásfeszültség és cellaméret kapcsolata is. Ugyanis az alakítási keménységre vonatkozó elméletek szerint a folyásfeszültség és diszlokációsűrűség kapcsolata a következő kifejezéssel adható meg (2., 3. fejezet):

$$\tau \simeq \alpha G b \sqrt{\rho}, \quad (4)$$

ahol τ a nyírási folyásfeszültség, G a nyírási modulusz, b Burgers-vektor, ρ a diszlokációsűrűség [7]. Behelyettesítve ρ helyébe a Holt analízis eredményét, a folyásfeszültség és az átlagos cellaméret kapcsolatára a

$$\tau \simeq \alpha K G b d^{-1} \quad (5)$$

összefüggés adódik. Az összefüggés érvényességét több kísérleti munka igazolja [5, 8]. Figyelembe véve a τ_0 Peierls—Nabarro-féle feszültséget is, a

$$\tau = \tau_0 + \alpha K G b d^{-1} \quad (6)$$

kifejezést kapjuk, amely sok fémre érvényes [1].

Kuhlmann—Wilsdorf más úton szintén eljutott a folyásfeszültség és cellaméret közötti összefüggéshez [9, 10].

A cellák szilárdságnövelő hatásában szerepet játszik a szomszédos cellák közötti orientációkülönbség is [11, 12]. Ennek vizsgálatára *Langford* és *Cohen* nagyfeszültségű elektronmikroszkópot alkalmaztak, amelyben az 1 μ m-nál kisebb méretű cellák belsejében diffrakciós vizsgálat végezhető az orientáció meghatározáshoz. Megállapították, hogy a cellák közötti orientációkülönbség hatással van a szilárdságnövelő hatásra.

pították, hogy kis alakítások esetén a cellafalbeli orientációeltérés olyan kicsi, hogy a diszlokációk szinte minden cellafalat képesek átmetszeni. Ennek megfelelően, kis alakítások után a cellafalak diszlokációerdőhöz hasonlíthatnak. Nagy alakítások hatására azonban a cellafalak többnyire „átjárhatatlanok” a diszlokációk számára, ezért ezek hatása a nagyszögű szemcsehatárokéhoz hasonlít.

Anyagonként megadható egy kritikus orientációkülönbség, mely a két szélső esetet elválasztja. Az erősen textúrált szerkezetű vashuzalon ennek értékét 2° – 10° között állapították meg [13].

Az orientáció hatását is figyelembe véve, a folyásfeszültségre a következő kifejezés adható meg [13]:

$$\sigma = \sigma_0 + \alpha_1 G_1 b_1 \sqrt{\rho_f} + \alpha_3 G_1 b_1 (\bar{d})^{-1}, \quad (7)$$

ahol σ_0 , α_1 és α_3 állandók ρ_f az átjárható falrészekben a diszlokációsűrűség és \bar{d} az átjárhatatlan cellafalak között levő átlagos távolság.

Elektronmikroszkópos felvételek analízisével ρ_f és \bar{d} értéke meghatározható, így a (7) összefüggés kísérletileg ellenőrizhető. Langford és Cohen azt találták, hogy a cellaméret reciproka és az átlagos orientációeltérés a valódi deformáció mértékével lineárisan nő [13].

4.1.2. A szubszemcsék hatása az alakítási keményedésre

Magasabb hőmérsékleten végzett alakításkor a keletkezett diszlokációk termikusan aktivált folyamat révén rendezettebb, nagyobb orientációkülönbséggel jellemezhető határokba csoportosulnak. Az így kialakuló határszerkezet a szubszemcséket tulajdonságaikban a nagyszögű szemcsehatárokhoz teszi hasonlóvá. Ebből a tényből arra következtethetünk, hogy a szubszemcsék szilárdságnövelő hatását a szemcsékre érvényes Hall—Petch típusú egyenlettel írhatjuk le (4. fejezet):

$$\tau = \tau_0 + kd^{-\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

ahol τ_0 állandó és k a szubszemcse szilárdságnövelő hatására jellemző együttható.

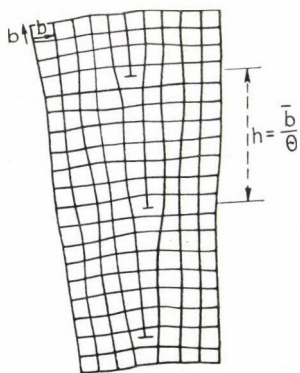
Az összefüggés szubszemcsékre vonatkozó érvényességét számos esetben kísérletileg igazolták [11, 14].

Az igen nagy szimmetriával rendelkező ún. „tilt” határok (4. ábra) jelenlétében a szubszemcsék szilárdságnövelő hatására azonban más összefüggést találtak [15]. Amikor a szomszédos szubszemcsék orientációkülönbsége 5° -nál nagyobb, akkor a folyásfeszültség és az átlagos szubszemcseméret a

$$\tau = \tau_0 + kd^{-1} \quad (9)$$

összefüggésnek tesz eleget. Ilyen esetekben mindig nagy szimmetriával rendelkező határok alakulnak ki.

A két összefüggés közötti eltérésre Li adott magyarázatot. Megállapította, hogy a (8) egyenletben



4. ábra. „Tilt” határ szerkezete

szereplő k tényező a

$$k = \frac{A}{1-\gamma} \Theta^{1/2} \quad (10)$$

kifejezés szerint függ a dőlt határok által elválasztott tartományok Θ orientációkülönbségétől (4. ábra), ahol ν a Poisson szám és A állandó [16]. Kísérleti vizsgálatok azt mutatták továbbá, hogy nagy alakítások során kialakult határok esetén az orientációkülönbség a szubszemcsemérettel fordítottan arányos [13], azaz

$$\Theta \sim \frac{1}{d}. \quad (11)$$

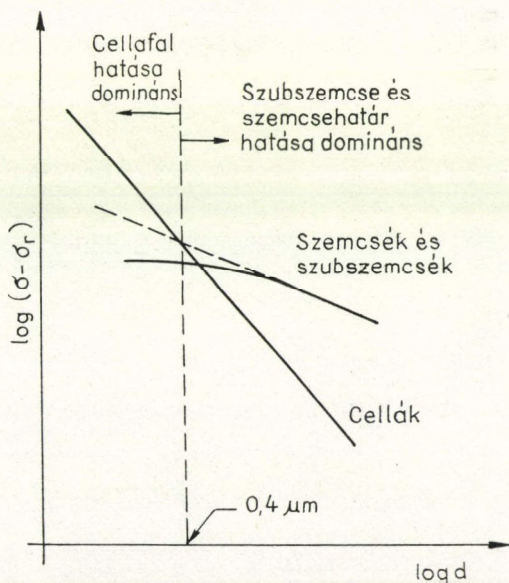
Ennek felhasználásával a (8) Hall—Petch egyenletből a (9) összefüggés adódik. Általános esetben a szubszemcsék szilárdságnövelő hatását a

$$\tau = \tau_0 + kd^{-m} \quad (12)$$

empirikus egyenlettel adhatjuk meg, ahol k és m a kísérleti körülményektől függő konstansok. Az m kitevőt az

$$m = p + \frac{1}{2} \quad (13)$$

formában két részre szokták bontani. Eszerint a szilárdságnövelő hatásban az $\frac{1}{2}$ kitevő a szemcsemérettel kapcsolatos, míg p az orientációs viszonyokra jellemző [17].



5. ábra. Sematikus ábra a különböző szerkezetek szilárdságnövelő hatására vonatkozóan

Az $m = \frac{1}{2}$ kitevő általában a nagyszögű szemcséket vagy a viszonylag alacsony hőmérsékletű alakításkor a szubszemcsék szilárdságnövelő hatását jellemzi [11]. A dinamikus megújulás, melegalakítás és fárasztásos vizsgálatok mérési eredményeihez azonban többnyire az $m = \frac{1}{2}$ esethez tartozó (12) összefüggés illeszthető jól.

Meggondolásaink azt mutatják tehát, hogy a szemcsés és szubszemcsés keményedés nem különíthető el élesen. Bizonyos esetekben a szubszemcsés keményedés hatékonyabb is lehet, mint a szemcsés keményedés. Néhány erre vonatkozó adat a 2. táblázatban található.

A különböző szerkezetek szilárdságnövelő hatását mutatja sematikusan az 5. ábra. Ebből kitűnik, hogy a különböző szerkezetek szilárdságnövelő hatása más-más mérettartományban válik dominánssá [18]. Kb. 1 μm méretű szerkezetek közül a cellák szilárdságnövelő hatása nagyobb, míg e mérettartomány fölött a szemcsék és szubszemcsék hatékonyabbak [1].

2. TÁBLÁZAT

A Hall—Petch paraméterek összehasonlítása szemcsék és szubszemcsék esetén

	Szubszemcse		Szemcse	
	σ_0 [MPam ⁻²]	k [MPam ^{-3/2}]	σ_0 [MPam ⁻²]	k [MPam ^{-3/2}]
99,995% Al	-1,95	0,08	15,7	0,07
99,998% Al	-29,5	0,09		
99,86% Al	+15,5	0,11		
99,7% Al	-12,75	0,09		
99,5% Al	6,8	0,07	15,7	0,04
99,5% Al + 1,0% Al ₂ O ₃	18,6	0,08	28,4	0,04
99,9% Al + 4,7% Al ₂ O ₃	88,2	0,06	28,4	0,04
Spec. tisztaságú Cu	0,0	0,20	2,6	0,11

IRODALOM

1. A. Thompson, Met. Trans. 81, 833, 1977.
2. J. D. Boyd and J. D. Embury, Electronmicroscopy and Structures of Materials, ed. G. Thomas, Univ. of Calif. Press, Berkeley. 1972. p. 470—82.
3. D. L. Holt, J. Appl. Phys. 41, 3197, 1970.
4. I. Kovács and L. Zsoldos, Dislocations and Plastic Deformation, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973. p. 45.
5. M. R. Staker and D. L. Holt, Acta Met. 20, 569, 1972.
6. M. J. Witcomb, Phys. stat. sol. (a), 22, 299, 1974.
7. F. R. N. Nabarro, Z. S. Basinski and D. B. Holt, Adv. Phys. 13, 193, 1964.
8. D. J. Michel, J. Mottéff, and A. J. Lovell, Acta Met. 21, 1269, 1973.
9. D. Kuhlmann—Wilsdorf, Met. Trans. 1, 3173, 1970.
10. D. Kuhlmann—Wilsdorf, Work Hardening, eds. J. P. Hirth and J. Weertman, Gordon and Breach. N. Y. 1968. p. 97.
11. R. J. Mc. Elroy and Z. C. Szekopiak, Int. Metall. Rev. 17, 175, 1972.
12. G. Langford and M. Cohen, Trans. ASM. 62, 623, 1969.
13. G. Langford and M. Cohen, Met. Trans. 6A, 901, 1975.
14. M. J. Roberts and W. Jolley, Met. Trans. 1, 1388, 1970.
15. D. Kalish and B. G. Le Fevre, Met. Trans. 6A, 1319, 1975.
16. J. C. M. Li, Trans. TAIME, 227, 239, 1963.
17. D. J. Abson and J. J. Jonas, Metal Sci. J. 4, 24, 1970.
18. C. M. Young and O. D. Sherby, J. Iron Steel Inst. 211, 640, 1973.

A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

A HULLÁMMEZŐK KVANTUMDINAMIKÁJA*

W. HEISENBERG és W. PAULI

Bevezetés. A kvantumelméletben eddig nem volt lehetséges mechanikai és elektrodinamikai törvényszerűségeket, egyrészt elektro- és magnetosztatikai kölcsönhatásokat, másrészt sugárzás révén terjedő kölcsönhatásokat ellentmondás nélkül összekapcsolni és egységes szempontból tárgyalni. Speciálisan, nem sikerült az elektromágneses erőhatások véges terjedési sebességét szabatos módon tekintetbe venni. A jelen munka célja ennek a hiánynak pótlása. A cél eléréséhez szükség lesz egy, az anyag és az elektromágneses mező közötti és ezzel az anyag és anyag közötti kölcsönhatás tárgyalását lehetővé tevő relativisztikusan invariáns formalizmus megadására. Ez a probléma — úgy látszik — alapvetően összekötődik azzal a nehézséggel, amely Dirac szerint az egyelektron-probléma relativisztikusan invariáns megfogalmazásának útjában áll; csak eme alapvető nehézség tisztázása után tudjuk az itt kitűzött feladat megoldását elérni. Mégis úgy tűnik, hogy a retardálási probléma elválasztható az említett mélyre nyúló kérdéstől; míg az utóbbit a klasszikus elméletre való támaszkodás nélkül kell megragadnunk, addig a retardálási probléma korrespondenciaszerű megfontolásokkal még megoldhatónak látszik.

Közismerten a klasszikus pontmechanikában a Hamilton-féle elmélet segítségével nem vihető keresztül a többtest-probléma relativisztikusan invariáns megfogalmazása. Ezért az sem remélhető, hogy a kvantummechanikában a többtest-probléma relativisztikusan invariáns tárgyalása a konfigurációs térben felírt differenciálegyenletekkel vagy megfelelő mátrixokkal elérhető lenne; nevezetesen egy ilyen tárgyalásmód elválaszthatatlannak látszik az elektromágneses hullámoknak a fénykvantumok bevezetésével egyenértékű kvantálásától. Így például aligha lehetne az Eddington által a kételektron-problémára megadott egyenlet**, amelyben a két világpontnak négydimenziós távolsága lényeges szerepet játszik, összhangba hozni a kísérlettel, mert ez az egyenlet olyan kölcsönhatásokat szolgáltat az elektronok között, amelyek a Maxwell-elmélet szerint várható retardált potenciáloktól teljesen elütnek. Ez a különbség nagy kvantumszámok és sok elektron határesetében is fennállna, tehát ellentmondáshoz vezet. Az itt célul kitűzött elméletnek sokkal inkább korrespondenciaszerű analogonja egyrészt a Maxwell-elmélet, másrészt az egyelektron-problémának klasszikus kontinuumelmélet értelmében átértékelt hullámelmélete. E két mezőelmélet egy formálisan kielégítő összefoglalását Schrödinger*** adta meg. Ha az egyelektron-probléma esetén a Dirac-féle egyenletből indulunk ki, akkor

* Zeitschrift f. Physik. 56, 15. (1929).

** A. S. Eddington, Proc. Roy. Soc. 121, 524, (1928); 122, 358, (1929).

*** E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 82, 265, (1927).

megkapjuk a Tetrode-tól* származó megfelelő összefüggést. Az itt célul kitűzött elmélet az előbb említett következetes mezőelmülethez úgy viszonylik, mint a kvantummechanika a klasszikus mechanikához, amennyiben ezen téremlületről kvantálással (nem kommutatív mennyiségek és funkcionálok bevezetésével) áll elő, és formális tartalma következetes folytatása azoknak a vizsgálatoknak, amelyeket Dirac**, Pauli és Jordan*** a sugárzásra, Jordan, Klein és Wigner[&] pedig a többtest-problémára vonatkozóan végzett. Megemlítendő itt Mie^{&&} próbálkozása; ennek korrespondenciaszerű analogonja az elektron Mie-féle elmélete; ez az elmélet mindenestre formális séma marad, amíg meg nem találják azt a klasszikus mező-egyenletet, amelynek integrálása kielégítő módon elektronokat szolgáltat. Tehát a mező Mie-féle kvantumelmélete, amely egyébként sok hasonlóságot mutat az itt tervbe vett elmélettel, egyelőre gyakorlatilag használhatatlan.

Az itt tervezett elméletben is akad néhány fogyatékoság. Amint már szó volt róla, a relativisztikus hullámegyenlet Dirac-tól hangsúlyozott nehézsége változatlanul fennáll. +Továbbá az elmélet képletei a sugárzás számára végtelen nullpontenergiához vezetnek és egy elektronnak önmagával való kölcsönhatását mint végtelen additív állandót tartalmazzák. Természetesen az elmélet semmiféle felvilágosítást nem nyújt az elektromos elemi részek szétsugárzási folyamatának lehetőségéről és arról, hogy a konfigurációs térben antiszimmetrikus hullámfüggvényeket a természet miért részesíti előnyben a szimmetrikusokkal szemben. Mégis sok fizikai problémánál eme nehézségek nem zavarják az elmélet alkalmazását. Az itt kifejlesztett módszerek például lehetővé teszik az Auger-effektus és rokon jelenségek elméletében bizonyos finomabb vonások matematikai tárgyalását, valamint a potenciál retardálásának figyelembevételét a stacionárius atomállapotok energiaértékeinek kiszámításánál. Ez utóbbinak főleg az ortohélium-vonalak finom-szerkezetének elmélete számára van jelentősége. Továbbá az itt keresztülvitt formalizmus az eddigi módszereket (kvantummechanika, a sugárzás Dirac-féle elmélete) mint első közelítésnek megfelelő speciális eseteket tartalmazza. Egészben véve ebből arra következtethetünk, hogy egy későbbi végleges elmélet lényeges vonásai már az itt tervezettben fellelhetők. Említsük meg még azt, hogy a gravitációs tér kvantálása, ami fizikai okokból szükségesnek látszik⁺⁺, az itt alkalmazott formalizmussal analóg módon minden új nehézség nélkül keresztülvihető lenne.

* H. Tetrode, ZS. f. Phys. 49, 858, (1928); m. vö. F. Möglich, ugyanott 48, 852, (1928).

** P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) 114, 243 és 710, (1927).

*** P. Jordan és W. Pauli jun., ZS. f. Phys. 47, 151, (1928).

& P. Jordan és O. Klein, uo. 45, 751, (1927); P. Jordan és E. Wigner, uo. 47, 631, (1928).

&& G. Mie, Ann. d. Phys. (4) 85, 711, (1928).

+ Különösen szembeötlőnek mutatkozik ez a nehézség, ahogy O. Klein, ZS. f. Phys. 53, 157, (1929) megmutatta, abban a körülményben, hogy a Dirac-féle elmélet szerint az elektronok $V = mc^2/e$ nagyságrendű potenciálugrásokon a klasszikus energiatétellel ellentétben bizonyos körülmények között akadálytalanul keresztülmehetnek. Az elmélet egyik analóg következménye az atommag felépítésének közelebbi elméleti tárgyalását egyelőre — úgy látszik — megghiúsítja.

++ A. Einstein, Berl. Ber., 1916, 688. old., főleg 696. old., ahol a gravitációs hullámok emissziójának kvantumelméleti tárgyalása szükségességét hangsúlyozza. Ezenkívül O. Klein, Zs. f. Phys. 46, 188, (1927), főleg a 188. oldalon olvasható megjegyzés.

I. ÁLTALÁNOS MÓDSZER

1. § A mezőegyenletek Lagrange- és Hamilton-féle alakja, energia- és impulzusintegrálok. Legyen L oly Lagrange-féle függvény, amely bizonyos folytonos téridő-függvényektől, valamint ezeknek a koordináták szerinti első deriváltjaitól függ. Azok a differenciálegyenletek, melyeknek a Q_α mezőmennyiségek eleget kell hogy tegyenek, a

$$\delta \int L \left(Q_\alpha \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \dot{Q}_\alpha \right) dV dt = 0 \quad (1)$$

variációs elvből származtathatók, ha a Q_α -k variációját az integrációs tartomány határára eltűnőnek tételezzük fel. Itt \dot{Q}_α a $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial t}$ idő szerinti deriváltat jelenti egy rögzített pontban, az α index különbözteti meg a tetszés szerinti véges számban előforduló állapotmennyiségeket egymástól, míg az i index a három térkoordinátára vonatkozik. A következőkben az előbbi fajtájú indexekre görög, az utóbbi fajtájúakra latin betűket fogunk használni. Közismert, hogy az (1)-ből következő differenciálegyenletek:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha} = 0. \quad (2)$$

Avégből, hogy az analógiát a közönséges pontmechanikához kidomborítsuk, bevezetjük először a csupán a hármas térfogatra integrált Lagrange-függvényt:

$$\bar{L} = \int L dV. \quad (3)$$

Ekkor a határon eltűnő δQ_α esetén parciális integrálással

$$\delta \bar{L} = \int \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \right) \delta Q_\alpha dV.$$

Ennek alapján nevezzük a

$$\frac{\delta \bar{L}}{\delta Q_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \quad (4)$$

kifejezést az \bar{L} Q_α szerinti Hamilton-féle vagy funkcionális deriváltjának a kismelt $x_1 x_2 x_3$ koordinátájú P helyen. Ez definiálható a

$$\frac{\delta \bar{L}}{\delta Q_\alpha; P} = \lim_{\delta Q_\alpha} \frac{\bar{L}(Q_\alpha + \delta Q_\alpha) - \bar{L}(Q_\alpha)}{\int \delta Q_\alpha dV}$$

hányados limeszeként, ha a számlálóban az L két értéke abban különbözik egymástól, hogy az egyik esetben csupán az egyik Q_α állapotmennyiség más térfüggvény, mint a másikban. A limesznél nemcsak a nevező integráljának kell zérushoz tartania, hanem az az intervallum is, amelyben δQ_α -t zérustól különbözőnek tételeztük

fel, egyetlen \mathbf{P} térpontra — amelyben funkcionális deriváltját képezzük — húzódik össze. Mivel triviális módon fennáll, hogy

$$\frac{\delta \bar{L}}{\delta \dot{Q}_{\alpha; P}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\alpha}} \right)_P,$$

a mezőegyenletek így írhatók fel:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \bar{L}}{\delta \dot{Q}_{\alpha; P}} = \frac{\delta \bar{L}}{\delta Q_{\alpha; P}}. \quad (2')$$

Épp úgy, mint a pontmechanikában, a (2) vagy (2') egyenletek meghatározzák az állapotmennyiségek viselkedését minden következő időpontban, ha ezek első deriváltakkal együtt egy bizonyos időpontban adottak. A pontmechanika véges sok \mathbf{q}_i állapotmennyisége helyébe lép itt az állapotmennyiségek kontinuumja vagy pontosabban szólva véges sok kontinuum, tudniillik a $Q_{\alpha}(x_1, x_2, x_3)$ állapotmennyiségek. Ezzel szemben az x_1, x_2, x_3 térkoordinátákat nem állapotmennyiségek gyanánt, hanem paraméterként kell felfogni.

A kontinuumnyi sok szabadsági fokok esetét, amelyben az állapotmennyiségek térfüggvények, a véges sok szabadsági fok esetéből határátmenettel lehet megkapni. Legyen az a térfogati tartomány, amelyben a térmennyiségeket definiáljuk az egyszerűség okából véges, és osszuk fel ezt egybevágó $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ élű paralelepipedon alakú cellákra. A folytonos $Q_{\alpha}(x_1, x_2, x_3)$ térfüggvényeket helyettesítsük lépcsős függvényekkel, amelyek értéke egy-egy cellában állandó. Ha a cellákat a három térkoordinátának megfelelően három, l, m, n „futó” számmal jelöljük, akkor véges sok $Q_{\alpha, l, m, n}$ állapotmennyiségeket kapunk. Ha pedig még az \bar{L} kifejezésében az integrált összeggel és a tér szerinti deriváltakat

$$\frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_1} = \frac{Q_{\alpha, l+1, m, n} - Q_{\alpha, l, m, n}}{\Delta x_1}$$

szerint differenciahányadosokkal pótoljuk, akkor a

$$\bar{L} = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \sum_{l, m, n} L \left(Q_{\alpha, l, m, n}, \frac{Q_{\alpha, l+1, m, n} - Q_{\alpha, l, m, n}}{\Delta x_1}, \dots, \dot{Q}_{\alpha, l, m, n} \right) \quad (5)$$

Lagrange-függvénnyel a közönséges pontmechanika mozgásegyenletei:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_{\alpha, l, m, n}} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_{\alpha, l, m, n}}. \quad (5')$$

Most meg kell mutatnunk, hogy a tér felosztására használt cellák térfogatának eltűnése határesetében a közönséges pontmechanika (5') egyenleteiből éppen a (2) vagy (2') egyenletek származnak a kontinuumnyi szabadsági fokok esetére.* Ebből a célból nyilván elegendő azt megmutatni, hogy

$$\lim \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_{\alpha, l, m, n}} \rightarrow \frac{\partial \bar{L}}{\delta Q_{\alpha; P}}.$$

* Ehhez vö. G. Mie idézett műve 4. és 5. §-át is.

Mivel az l, m, n szerinti összegben a $Q_{\alpha, l, m, n}$ koordináta mind az l, m, n cellához, mind az $l-1, m, n$ és $l, m-1, n$ és $l, m, n-1$ cellákhoz tartozó tagokban előfordul, fennáll

$$\frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_{\alpha, l, m, n}} = \left(\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}} \right)_{l, m, n} - \left[\left(\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}} \right)_{l, m, n} - \left(\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}} \right)_{l-1, m, n} \right] \frac{1}{\Delta x_1} - \dots$$

és ez a cellabeosztás tetszőleges finomításával valóban konvergál az

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}} = \frac{\delta \bar{L}}{\delta Q_{\alpha; P}}$$

egyenlethez, ahogy állítottuk.

A pontmechanikához hasonlóan itt is bevezetjük a mezőegyenletek Lagrange-féle alakja helyett ezeknek Hamilton-féle alakját. Legelőször definiáljuk a Q_{α} mezőmennyiséghez kanonikusan konjugált P_{α} „impulzust”:

$$P_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}}, \quad (6)$$

majd a H Hamilton-féle függvényt:

$$H(P_{\alpha}, Q_{\alpha}, \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_i}) = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} - L. \quad (7)$$

H -nak a $P_{\alpha}, Q_{\alpha}, \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_i}$ változók szerinti variálásával, (6) alapján következik:

$$\begin{aligned} \delta H &= \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial P_{\alpha}} \delta P_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial Q_{\alpha}} \delta Q_{\alpha} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_i}} \delta \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_i} \right) = \\ &= \sum_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} \delta P_{\alpha} - \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}} \delta Q_{\alpha} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_i}} \delta \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

tehát fennáll először

$$\frac{\partial H}{\partial P_{\alpha}} = \dot{Q}_{\alpha}, \quad (8)$$

és másodszor

$$-\left(\frac{\partial H}{\partial Q_{\alpha}} \right)_{P_{\alpha}} = \left(\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}} \right)_{\dot{Q}_{\alpha}}, \quad -\left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_i}} \right)_{P_{\alpha}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_i}} \right)_{\dot{Q}_{\alpha}} = P_{\alpha i}. \quad (9)$$

A zárójel mellett kiírt változót a kérdéses differenciálás alkalmával állandónak kell tartani, a későbbi célok érdekében pedig bevezettünk egy új $P_{\alpha i}$ rövidítést.

Tekintettel (2)-re, a (8) és (9)-ből következnek a kanonikus téregyenletek:

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha}, \quad \dot{P}_\alpha = - \left[\frac{\partial H}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \right], \quad (10)$$

vagy a

$$\bar{H} = \int H dV \quad (11)$$

bevezetésével az

$$\dot{Q}_{\alpha;P} = \frac{\delta \bar{H}}{\delta P_{\alpha;P}}, \quad \dot{P}_{\alpha;P} = - \frac{\delta \bar{H}}{\delta Q_{\alpha;P}} \quad (I)$$

összefüggések. Ezek a

$$\delta \int L dV dt = \delta \int \left[\sum_\alpha P_\alpha \dot{Q}_\alpha - H \left(P_\alpha, Q_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} \right) \right] dV dt = 0 \quad (12)$$

variációs elvből adódnak, ahol most P_α és Q_α függetlenül variálódó térfüggvények, amelyek variációi a határon el kell hogy tűnjenek. A kanonikus mezőegyenletek meghatározzák a P_α és Q_α térfüggvények további időbeli lefutását, ha ezek egy bizonyos $t=t_0$ pillanatban tetszőleges módon adottak.

A következő számításoknál egyébként a variációs elvnek csak a (12) alakját használjuk és lényegtelen, hogy vajon P_α kiküszöbölésével (12) integrandusza átalakítható-e csupán Q_α , $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}$ és \dot{Q}_α függvényévé. Attól a feltevéstől is függetlenül tehetjük magunkat, hogy H nem tartalmazza P_α térbeli deriváltjait, de erre a későbbi alkalmazások szempontjából nem lesz szükség.

Most feltételezzük, hogy — ami eddig nélkülözhető volt — a H Hamilton-függvény az időt explicite nem tartalmazza, és azt állítjuk, hogy ebben az esetben a H mennyiség időben állandó. Parciális integrálással ugyanis azonnal megkapjuk, hogy

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \int \sum_\alpha \left(\frac{\delta \bar{H}}{\delta P_{\alpha;P}} \dot{P}_{\alpha;P} + \frac{\delta \bar{H}}{\delta Q_{\alpha;P}} \dot{Q}_{\alpha;P} \right) dV_P,$$

ahol (ahogy ezentúl bizonyos térfogati integrálok időbeli állandóságának bizonyításánál mindig) az integrációs határra vonatkozó tagokat* elhagyjuk. Az egész térre kiterjesztett integrálásnál ez azt jelenti, hogy a térmennyiségeknek a térbeli végtelenben elég gyorsan kell eltűnniük. Ha ezt feltételezzük, akkor a $\frac{d\bar{H}}{dt}$ -re az (I) szerint megadott kifejezésből azonnal következik \bar{H} időbeli állandósága. Minden fizikai alkalmazásnál a mennyiség (épp úgy, mint a pontmechanika Hamilton-féle függvénye) a szám-tényezők alkalmas választásával a rendszer teljes energiájaként értelmezhető.

* Ezek a határfelületen fellépő energiaáramként értelmezhetők

$$\int df \sum_r \left[\cos(n, x_i) \sum_\alpha \left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \dot{Q}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}} \dot{P}_\alpha \right) \right]$$

alakú felületi integrálok.

A \bar{H} energiaeintegrálon kívül léteznek még egyéb integrálok:

$$G_k = - \int \sum_{\alpha} P_{\alpha} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_k} dV \quad (k = 1, 2, 3) \quad (13)$$

ezek a rendszer teljes impulzusának komponenseiként értelmezhetők. Az energiaeintegrál analógiájára itt azt kell feltételezni, hogy H a térkoordinátákat sem tartalmazza explicit, és ismét meg kell engedni a felületi integrálok elhagyását. Valóban, (13)-ból ismételt parciális integrálással következik:

$$\begin{aligned} \frac{dG_k}{dt} &= - \int \sum_{\alpha} \left(\dot{P}_{\alpha} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_k} - \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial x_k} \dot{Q}_{\alpha} \right) dV = \\ &= \int \sum_{\alpha} \left(\frac{\delta H}{\delta Q_{\alpha}} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_k} + \frac{\delta H}{\delta P_{\alpha}} \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial x_k} \right) dV \end{aligned}$$

és a

$$\frac{\delta H}{\delta Q_{\alpha}} = \frac{\partial H}{\partial Q_{\alpha}} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_i}}, \quad \frac{\delta H}{\delta P_{\alpha}} = \frac{\partial H}{\partial P_{\alpha}}$$

kifejezések behelyettesítésével ebből:

$$\frac{dG_k}{dt} = - \int \sum_{\alpha} \left[\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_i}} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial H}{\partial x_k} \right] dV,$$

ami teljesen átalakítható felületi integrállá, ezért a feltevés szerint eltűnik, úgy, hogy G_k tényleg időben állandó. Ha egyetlen térbeli irány sincs kitüntetve, akkor L és innen H invariáns a koordinátatengelyek elforgásával szemben, tehát a G_k -k egy vektor komponensei, ahogy ennek lennie kell.

2. § Kanonikus felcserélési relációk folytonos tér-idő függvények-re. Energia és impulzustétel a kvantumdinamikában. Eléggé felkészültünk arra, hogy a mezőelméletben is megtehessük az átlépést a klasszikus fizikából a kvantumfizikába. Ehhez először olyan módszert használunk, amely megfelel a kvantummechanika operátor- vagy mátrix-formalizmusának, arra a módszerre pedig, amely a koordinátatérbeli Schrödinger-féle differenciálegyenlettel analóg, csak később térünk ki röviden. Az utóbb említett módszer formális átvitele a mezőelméletbe a térfogatelemnek a függvénytérben való értelmes definiálásának matematikai nehézségébe ütközik. Az előbbi módszernek ezenkívül az az egyik előnye, hogy a független változók kiválasztásában nagyobb szabadsággal jár, mivel könnyebben lehet vele kanonikus transzformációkat végrehajtani. Egy másik előnye az, hogy a fizikai törvények alakja, a mi esetünkben a mezőegyenletek és a Hamilton-függvény kifejezése, közvetlenül átvehető a klasszikus elméletből. A klasszikus és a kvantumfizika közötti különbség ennél a módszernél közismerten abban fejeződik ki, hogy a fizikai mennyiségeket most már általában nem felcserélhető operátorok helyettesítik. A kvantummechanika esetén e fizikai állapotmennyiségek függenek egyrészt az időtől és másrészt diszkontinuusan a különböző szabadsági fokokat megkülönböztető egy (vagy több) indextől. A mezőfüggvények kvantumdinamikája esetén a megnevezett indexek

(részben) átmennek a folytonosan változó x_1, x_2, x_3 térkoordinátákba, amelyek azután épp úgy, mint a t idő, közönséges számok (c -számok) gyanánt kezelhetők.

Hogy megkapjuk a folytonos mezőmennyiségek esetére a f. r.-kat*, végrehajtjuk — amint az előző paragrafusban — a határátmenetet a véges sok szabadsági fok esetéről úgy, hogy az (5) Lagrange-függvényből indulunk ki, amely a tér végtelen finom cellabeosztásának határesetében a (3) Lagrange-függvénybe megy át. Vezessük be a közönséges δ -szimbólumot; ennek definíciója:

$$\delta_{ll'} = \begin{cases} 0, & \text{ha } l \neq l' \\ 1, & \text{ha } l = l' \end{cases} \quad (14)$$

továbbá a

$$\delta_{l,m,n;l',m',n'} = \delta_{ll'} \delta_{mn'} \delta_{nn'}$$

rövidítést és a cella térfogatára a

$$\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

jelölést. Ekkor véges sok szabadsági foknál a közönséges kvantummechanika szerint a f. r.-k

$$p_{\alpha,lmn} Q_{\beta,l'm'n'} - Q_{\beta,l'm'n'} p_{\alpha,lmn} = \frac{h}{2\pi i} \delta_{lmn;l'm'n'} \delta_{\alpha\beta}, \quad (15)$$

amihez még hozzájön a különböző Q -k egymás közötti és a különböző p -k egymás közötti felcserélhetősége. Itt most

$$p_{\alpha,lmn} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_{\alpha,lmn}} = \Delta V \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\alpha,lmn}}$$

úgy, hogy határértékben:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} P_{\alpha,l,m,n} = P_{\alpha}(x_1, x_2, x_3).$$

Ha a (14) egyenletben a ΔV -vel való osztás után áttérünk a $\Delta V \rightarrow 0$ határra, akkor a jobb oldalon zérust kapnánk. Mégis értelmes eredményt nyerünk akkor, ha (15)-t először az l', m', n' indexek tetszőleges f lépcsősfüggvényével (ami c -szám) megszorozzuk és egy bizonyos V' térbeli tartomány valamennyi cellájára összegezzük. A határátmenetben az f függvényt úgy konvergáltatjuk egy $f(x_1, x_2, x_3)$ folytonos térfüggvényhez, hogy közben a

$$\sum_{l',m',n'} f(l', m', n') \Delta V$$

összeg a kiválasztott V' térfogatra vett

$$\int_V f(x'_1, x'_2, x'_3) dV'$$

* Itt és a következőkben használjuk a felcserélési relációkra az f. r. rövidítést.

integrálba menjen át. Először azt kapjuk, hogy

$$\sum_{l' m' n'} f(l' m' n') \Delta V \cdot \left[\frac{P_{\alpha, lmn}}{\Delta V} Q_{\beta, l' m' n'} - Q_{\beta, l' m' n'} \frac{P_{\alpha, lmn}}{\Delta V} \right] = \\ = \frac{h}{2\pi i} \delta_{\alpha\beta} \begin{cases} f(l, m, n), & \text{ha } l, m, n \text{ cella } V' \text{-ben} \\ 0, & \text{ezenkívül.} \end{cases}$$

Végtelenül finommá vált cellabeosztás határesetében

$$\iiint_{V'} f(x'_1 x'_2 x'_3) dV' \{P_{\alpha}(x_1 x_2 x_3) Q_{\beta}(x'_1 x'_2 x'_3) - Q_{\beta}(x'_1 x'_2 x'_3) P_{\alpha}(x_1, x_2, x_3)\} = \\ = \frac{h}{2\pi i} \delta_{\alpha\beta} \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3), & \text{ha } x_1, x_2, x_3 \text{ pont } V' \text{-ben} \\ 0, & \text{ezenkívül.} \end{cases} \quad (16)$$

Itt egyébként az x_1, x_2, x_3 és x'_1, x'_2, x'_3 szerepe felcserélhető. Ezt az eredményt célszerű a Dirac-féle $\delta(x)$ szinguláris függvény segítségével megfogalmazni, amelynek definíciója

$$\int_a^b f(x) \cdot \delta(x) dx = \begin{cases} f(0), & \text{ha } x = 0 \text{ (a, b)-ben} \\ 0, & \text{ezenkívül.} \end{cases} \quad (17)$$

Könnyen belátható, hogy $\delta(-x) = \delta(x)$ vehető. Továbbá fennáll ekkor az x_1, x_2, x_3 komponensű \mathbf{r} vektor bevezetésével és a

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3), \quad \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

rövidítéssel:

$$\iiint_{V'} f(x'_1, x'_2, x'_3) \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' = \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3), & \text{ha } x_1, x_2, x_3 \text{ } V' \text{-ben} \\ 0, & \text{ezenkívül.} \end{cases} \quad (17')$$

Írjunk röviden $P_{\alpha}(x_1, x_2, x_3)$ és $Q_{\alpha}(x_1, x_2, x_3)$ helyett P_{α} -t és Q_{α} -t, $P_{\alpha}(x'_1, x'_2, x'_3)$ és $Q_{\alpha}(x'_1, x'_2, x'_3)$ helyett pedig P'_{α} és Q'_{α} -t és mint további rövidítést alkalmazzuk a

$$[F, G] \equiv FG - GF$$

zárójeles kifejezést. Ekkor a kanonikus f. r.-k a folytonos mezőmennyiségek esetén a következőképpen írhatók:

$$[Q_{\alpha}, Q'_{\beta}] = 0, \quad [P_{\alpha}, P'_{\beta}] = 0 \\ [P_{\alpha}, Q'_{\beta}] = [P'_{\alpha} Q_{\beta}] = \frac{b}{2\pi i} \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (\text{II})$$

Megjegyzendő, hogy ezek a relációk két különböző térbeli helyre, de mindig ugyanazon időpontra érvényesek, és hogy két különböző időpontban felvett mezőmennyiségekből álló zárójeles kifejezések értékeiről egyelőre semmit sem mondunk. Ha ellenben a δ függvény deriváltját a szokásos módon definiáljuk, azaz

$$\int_a^b f(x) \delta'(x) dx = \begin{cases} -f'(0), & \text{ha } x = 0 \text{ (a, b)-ben} \\ 0, & \text{ezenkívül} \end{cases} \quad (17'')$$

ami (17)-ből formálisan parciális integrálással és a határra vonatkozó tagok elhagyásával származik, akkor a (II) f. r.-kat a térkoordináták szerint differenciálhatjuk. Így kapjuk például

$$\begin{aligned} [P'_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}] &= \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'); \\ [P_\alpha \frac{\partial Q'_\alpha}{\partial x'_i}] &= \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ [\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i} Q'_\alpha] &= \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'); \\ [\frac{\partial P'_\alpha}{\partial x'_i}, Q_\alpha] &= \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (18)$$

ahol az utolsó egyenlet a $\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ azonosságból következik.

A továbbblépés érdekében a nem felcserélhető mennyiségek függvényének differenciálását kell definiálnunk:

$$\frac{\partial F(Q_1, Q_2, \dots)}{\partial Q_1} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(Q_1 + \delta, Q_2, \dots) - F(Q_1, Q_2, \dots)}{\delta},$$

ahol δ egy (ki nem írt egységoperátorral szorzott) c -szám. Ilyen definícióval fennáll a szorzat differenciálásának közönséges szabálya:

$$\frac{\partial(F_1 F_2)}{\partial Q_1} = F_1 \frac{\partial F_2}{\partial Q_1} + \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} F_2,$$

itt a tényezők sorrendjére azonban vigyázni kell.

Legyen F a $P_\alpha, \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}, Q_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}$ függvénye, amely egyelőre ezeknek a függvényeknek csupán egyetlen térpontban felvett értékeitől függ. Ekkor még mindig, a közönséges kvantummechanika megfelelő fejtegetéseihez hasonlóan, könnyen bebizonyítható, hogy:

$$\begin{aligned} [F, Q'_\alpha] &= \frac{h}{2\pi i} \left[\frac{\partial F}{\partial P_\alpha} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right], \\ [P'_\alpha, F] &= \frac{h}{2\pi i} \left[\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Ezek az összefüggések ugyanis a (II) és (18) alapján nyilván helyesek, ha F -et a $P_\alpha, Q_\alpha, \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}$ mezőmennyiségek egyikével helyettesítjük, és belátható, hogy

$F_1 + F_2$ és $F_1 \cdot F_2$ esetére is fennállnak, ha F_1 -re és F_2 -re helyesnek tételeztük fel őket. Továbbá integrálással (19)-ből megkapjuk közvetlenül a f. r.-kat az

$$\bar{F} = \int F dV$$

integrálra:

$$[\bar{F}, Q_\alpha] = \frac{h}{2\pi i} \left(\frac{\partial F}{\partial P_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}} \right)_{x_i=x'_i} \text{ ha}$$

$$[P'_\alpha, \bar{F}] = \frac{h}{2\pi i} \left(\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \right)_{x_i=x'_i} \text{ ha.}$$

Ezek a $\frac{\delta \bar{F}}{\delta P_\alpha}$ és $\frac{\delta \bar{F}}{\delta Q_\alpha}$ szimbólumoknak (4)-hez hasonló bevezetésével egyszerűen így írhatók:

$$[\bar{F}, Q_\alpha] = \frac{h}{2\pi i} \frac{\delta \bar{F}}{\delta P_\alpha}, \quad [\bar{F}, P_\alpha] = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\delta \bar{F}}{\delta Q_\alpha}, \quad (20)$$

ahol a variációt mindig ugyanazon térbeli helyen kell képezni, amelyre a zárójeles kifejezések térmennyiségei vonatkoznak.

Most már áttérhetünk a mezőegyenletek tárgyalására. Ezeket a klasszikus elmélet (I) kanonikus alakjából vesszük át:

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\delta \bar{H}}{\delta P_\alpha}, \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\delta \bar{H}}{\delta Q_\alpha}, \quad (I)$$

avval a különleges kiegészítéssel, hogy az itt előforduló parciális differenciálást a fent meghatározott értelemben kell használni. E mellett általában \bar{H} tényezőinek sorrendjére különleges előírások szükségesek, amelyeket a klasszikus minta nem ad meg egyértelműen. A későbbi alkalmazásoknál azonban \bar{H} (lényegében) a mezőmennyiségek kvadratikus alakja lesz, ekkor tehát a mezőegyenletek (lényegében)* lineárisak úgy, hogy (I) előírás szerint éppen olyan alakúak, mint a megfelelő klasszikus egyenletek.

A (20) következtében a mezőegyenleteket így írhatjuk fel:

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{2\pi i}{h} [\bar{H}, Q_\alpha], \quad \dot{P}_\alpha = \frac{2\pi i}{h} [\bar{H}, P_\alpha],$$

ezekből azután egy, a fentihez hasonló gondolatmenettel minden egyes ott vizsgált F mennyiségre

$$\dot{F} = \frac{2\pi i}{h} [\bar{H}, F], \quad (21)$$

tehát

$$\bar{F} = \int F dV$$

* Az anyaghullámok Hamilton-függvénye és mezőegyenletei tartalmazzák a ψ és ψ^* anyagi mezőmennyiségek szorzatát a Φ_v elektromágneses potenciállal. Látni fogjuk azonban, hogy elméletünkben ψ és ψ^* felcserélhető Φ_v -vel úgy, hogy ez a körülmény nem zavar.

számára is

$$\dot{\bar{F}} = \frac{2\pi i}{h} [\bar{H}, \bar{F}] \quad (21')$$

következik.*

Az utolsó egyenletből két, az elmélet ellentmondásmentes felépítésére nézve alapvetően fontos végkövetkeztetést vonhatunk le. Először legyen (21')-ben $\bar{F} = \bar{H}$, ahonnan $[\bar{H}, \bar{H}] = 0$ miatt

$$\dot{\bar{H}} = 0, \quad H = \text{const} \quad (22)$$

adódik. Tehát itt is érvényes az energiatétel** (természetesen feltesszük, hogy H nem tartalmazza explicit az időt, mivel (21) csak olyan mennyiségekre érvényes, amelyek ezt a feltételt kielégítik). Másodszor tegyük (21)-ben F helyébe a $[Q_\alpha, Q'_\beta]$, $[P_\alpha, P'_\beta]$, $[P_\alpha, Q'_\beta]$, $[P'_\alpha, Q_\beta]$ zárójeles kifejezések egyikét. Mivel (II) szerint ezek mind c -számok (helyesebben egységoperátorral szorzott c -számok), H -val felcserélhetők úgy, hogy a zárójeles kifejezések idő szerinti deriváltjai (rögzített helyen) eltűnnek. Ez azt jelenti, hogy ha a (II) f. r.-kat egy bizonyos $t = t_0$ időpontra feltételezzük, az (I) mezőegyenletek következtében a szomszédos időpontra és így minden időpontra visszakapjuk őket. Bebizonyítottuk tehát, hogy (I) és (II) egymással összefér.

Most alkalmazzuk (20)-at a (13) által definiált

$$G_k = - \int \sum_\alpha P_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} dV \quad (13)$$

impulzusintegrálra. Midőn (20)-ban \bar{F} -et G_k -val azonosítjuk, kapjuk:

$$[G_k, Q_\alpha] = \frac{ih}{2\pi} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}, \quad [G_k, P_\alpha] = \frac{ih}{2\pi} \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_k}.$$

Általánosítással következik ebből minden (a térkoordinátákat explicit nem tartalmazó) vizsgált fajtájú F mennyiségre:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = - \frac{2\pi i}{h} [G_k, F], \quad (23)$$

ezek az összefüggések (21)-hez csatlakoznak. Háromdimenziós térfogatra vett integrálással következik ebből

$$\int \frac{\partial F}{\partial x_k} dV = 0$$

* Ennek a relációnak szerepe az, hogy segítségével elkerülhetjük az olyan egyenleteket, mint

$$\dot{F} = \sum_\alpha \left[\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} \dot{Q}_\alpha + \frac{\partial F}{\partial P_\alpha} \dot{P}_\alpha + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \frac{\partial \dot{Q}_\alpha}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}} \frac{\partial \dot{P}_\alpha}{\partial x_i} \right) \right],$$

amely megengedhetetlen lenne.

** Megjegyezzük, hogy itt a kvantummechanika régebbi leírásával ellentétben, nem alkalmazuk a feltevést, hogy H -t diagonális alakra kell hozni. Ugyanis ez bár fontos, de az egyenletek fizikai alkalmazásának nem az egyetlen lehetséges esete.

miatt, az $\bar{F} = \int F dV$ létezése mellett,

$$[G_k, \bar{F}] = 0$$

és speciálisan az $\bar{F} = \bar{H}$ esetre (21) szerint

$$\dot{G}_k = 0, \quad G_k = \text{const.} \quad (24)$$

Ezáltal megmutattuk az impulzusintegrál létezését a kvantumdinamikában. Még egy megjegyzést kell tennünk a (13)-ban szereplő P_α és $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}$ tényezők sorrendjét illetően. Bár (23) és (24) érvényessége független ettől a sorrendtől, mégis (18) szerint, mivel ezen függvények ugyanazon térbeli helyen felvett értékeiről van szó, $\left[P_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} \right]$ mint $\delta'(x)$ szinguláris és határozatlan az $x=0$ helyen. Az, hogy a $P_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}$ és $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} P_\alpha$ kifejezések milyen kombinációját kell alkalmazni G_k integranduszában, előre nem határozható meg.

A mezőmennyiségeket leíró operátorok mátrix előállításánál és abban a speciális esetben, amikor a \bar{H} energia és a G_k impulzus diagonális mátrixok, F egy tetszőleges F_{nm} mátrixelemére (21) és (23)-ból következnek a

$$\dot{F}_{nm} = \frac{2\pi i}{h} (\bar{H}_n - \bar{H}_m) F_{nm}, \quad \frac{\partial F_{nm}}{\partial x_k} = -\frac{2\pi i}{h} (G_{k,n} - G_{k,m}) F_{nm}$$

differenciálegyenletek úgy, hogy F_{nm} elem függése tértől és időtől szükségképpen harmonikus hullám alakú:

$$F_{nm} = a_{nm} e^{\frac{2\pi i}{h} [(H_n - H_m)t - (G_n - G_m)r]}, \quad (25)$$

ahol \mathbf{G} G_k komponensű impulzusvektort jelenti. Az operátorok speciális előállításától függetlenül (21) és (23) ismételt alkalmazásával az ismert módon adódik minden F mennyiségre

$$F(x'_1, x'_2, x'_3, t') = e^{\frac{2\pi i}{h} [H(t'-t) - (G, r' - r)]} F(x_1, x_2, x_3, t) e^{-\frac{2\pi i}{h} [H(t'-t) - (G, r' - r)]}. \quad (26)$$

A jelen paragrafus befejezéseként megemlítjük az egyenletek integrálásának mód-szere gyanánt a mezőmennyiségek sajátrezgések szerinti sorbafejtését. Ez eddig az egyetlen módszer, amely gyakorlatilag keresztülvihetőnek bizonyult. A mezőmennyiségeket mint a térkoordináták függvényét sorbafejtjük egy ortogonális függvényrendszer szerint:

$$P_\alpha = \sum_q a_{\alpha q}(t) u_q(x_1, x_2, x_3), \quad Q_\alpha = \sum_q b_{\alpha q}(t) u_q^*(x_1, x_2, x_3), \quad (27)$$

ahol

$$\int u_q u_\sigma^* dV = \delta_{q\sigma} \quad (28)$$

és az inverz képletek:

$$a_{\alpha q}(t) = \int P_\alpha u_q^*(x_1, x_2, x_3) dV; \quad b_{\alpha q}(t) = \int Q_\alpha u_q(x_1, x_2, x_3) dV. \quad (27')$$

Itt az u_q -kat c -függvényeknek, de az a_x -kat és b_x -kat ugyanúgy, mint a P_x -kat és Q_x -kat q -számoknak kell tekinteni.

Azt, hogy az ortogonális függvényrendszer diszkrét sorozatot alkosson, úgy biztosíthatjuk, hogy vagy olyan üregben vizsgáljuk a mezőt, melynek falainál bizonyos határfeltételeknek kell teljesülniük (állóhullámok), vagy ahogy pl. a kristályrács elméletében szokás, a mezőt elég hosszú térbeli periódussal periodikus lefutásra korlátozzuk (haladó hullám).

Az a és b f. r.-jára (II) szerint adódik:

$$[a_{\alpha q}, b_{\beta \sigma}] = \int [P_{\alpha}, Q'_{\beta}] u_q^* u'_{\sigma} dV dV' = \frac{\hbar}{2\pi i} \delta_{\alpha\beta} \int u_q^* u_{\sigma} dV,$$

következésképpen a (28) szerinti kanonikus alak

$$[a_{\alpha q}, b_{\beta \sigma}] = \frac{\hbar}{2\pi i} \delta_{\alpha\beta} \delta_{q\sigma}. \quad (29)$$

A \bar{H} Hamilton-függvény az a és b függvényébe megy át és az a és b változóiban felírható kanonikus egyenletekre vezet. Az ortogonális függvényrendszer választásában természetesen teljes szabadságunk van. Ha sikerül ezt úgy választani, hogy \bar{H} szeparálható, akkor minden mátrixot könnyen felírhatunk. Egyéb esetekben alkalmas kiindulási rendszer mellett perturbáció-elméletet kell alkalmaznunk, akár a Schrödinger-féle $\varphi(b_1, b_2, \dots)$ függvények bevezetésével, akár az eredeti mátrixelméleti módszer szerint.

3. § A felcserélési reláció relativisztikus invarianciája invariáns Lagrange-függvény mellett. Eddig csak olyan f. r.-król volt szó, amelyek a mezőmennyiségek két térbeli pontban felvett értékeit ugyanazon időpontban kötik össze. Az (I) mezőegyenletek azonban implicite meghatározzák a két különböző időpontra vonatkozó f. r.-kat. Használható elmélettől meg kell követelni, hogy a Lagrange-féle függvény relativisztikus invarianciája mellett a f. r.-k is megtartsák alakjukat, ha egyik koordináta-rendszerről Lorentz-transzformációval egy másikra térünk át. Ennek a paragrafusnak az a feladata, hogy ennek a követelménynek teljesülését bizonyítsa.

Ha egyik koordináta-rendszerről Lorentz-transzformációval egy másikra térünk át, akkor a zárójeles kifejezések értékei (II)-ben két okból is megváltoznak. Először a P_x és Q_x mennyiségek általában nem skalárok, tehát egy megadott világponthoz bizonyos módon transzformálódnak. Másodszor a f. r.-kba a vesszős koordináta-rendszerben a vesszőtlentől eltérő világpontokat kell felvenni, miközben az utóbbihoz közös t koordináta, az elsőhöz viszont közös t' érték tartozik. A zárójeles kifejezéseknek az utóbbi körülmény megkövetelte változását nehéz véghezvinni, mert ezek általános képleteit az időadatok véges különbségei esetén nem tudjuk felállítani. Ezt a nehézséget mégis megkerülhetjük úgy, hogy infinitezimális Lorentz-transzformációra szorítkozunk. Ebben az esetben ugyanis bármilyen $f(t')$ fizikai mennyiséget $f(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(t' - t)$ -vel pótolunk és $\frac{\partial f}{\partial t}$ -t, valamint a hozzátartozó f. r.-kat (I)-ből vehetjük.

Ezen transzformációk összességének csoporttulajdonságai miatt az egyenletrendszer invarianciája magától következik véges transzformációkra is. Eszerint a következőkben úgy fogunk eljárni, hogy a zárójeles kifejezések változásait infinitezimális Lorentz-transzformációnál — a két megnevezett körülmény következtében — külön-külön kiszámítjuk, és ezután megvizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett kompenzálják egymást.

Ha a zárójeles kifejezések megváltozása először említett okának taglalásával kezdjük, akkor elsősorban általános kijelentéseket kell tennünk a P_α és Q_α mennyiségek Lorentz-transzformációjának módjáról. Célszerű lesz az $x_4 = ict$ képzetes időkoordináta, továbbá a korábban P_α -val jelölt mennyiség helyett a

$$P_{\alpha 4} = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_4}} = icP_\alpha \quad (30)$$

bevezetése úgy, hogy

$$\frac{\partial P_{\alpha 4}}{\partial x_4} = \dot{P}_\alpha = -\frac{\delta \bar{H}}{\delta Q_\alpha}, \quad \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_4} = \frac{1}{ic} \dot{Q}_\alpha = \frac{1}{ic} \frac{\delta \bar{H}}{\delta P_\alpha} = \frac{\delta \bar{H}}{\delta P_{\alpha 4}}, \quad (30')$$

$$[P_{\alpha 4}, \bar{Q}_\beta] = \frac{hc}{2\pi} \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}), \quad (31)$$

ahol most Q_β téridőbeli helyének jelölésére a felülvonást használjuk és a vesszőt a másik koordináta-rendszerre való átmenet jelölésére tartjuk fenn. Formálisan egyenrangúakként lépnek fel a következőkben $P_{\alpha 4}$ mellett a már a (9)-ben bevezetett

$$P_{\alpha i} = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} = -\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \quad (9)$$

mennyiségek, amelyekre azonban nem érvényesek olyan egyszerűen megadható f. r.-k Q_β -val és $P_{\beta 4}$ -gyel, mint a (31) egyenlet. Itt hangsúlyozni kell, hogy (9)-ben a $P_{\alpha i}$ -re használt két kifejezés egyezése H bizonyos tényezőinek fel nem cserélhetősége miatt általában nem áll fenn mindig. Csak, ha L a \dot{Q}_α és $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}$ kvadratikusan alakja állandó együtthatókkal (még esetleg egy csak a Q_α változóinak függvényével megtoldva), akkor lehet a (9) levezetésénél alkalmazott érvelést közvetlenül átvinni. Ekkor általában érvényes:

$$P_{\alpha\mu} = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\mu}} \quad (32)$$

itt és a következőkben a μ_1, \dots indexek mindig 1—4-ig haladnak, a latin indexek csak a térbeli koordinátákra vonatkoznak és 1—3-ig mennek, míg az α, β, \dots indexek a különböző $P_{\alpha 4}$ és Q^β mennyiségeket különböztetik meg. Az utóbbi mennyiségeknek sem számára, sem transzformációs törvényeire nem veszünk fel speciális feltevéseket. Mégis (32)-ből könnyen következik*: Ha az

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu, \quad a_{\mu\alpha} a_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu} \quad (33)$$

* Ez attól függetlenül érvényes, hogy vajon L a \dot{Q}_α mellett még a $P_{\alpha 4}$ -ket is tartalmazza-e vagy sem.

ortogonális koordináta-transzformációnál (ahol a kétszer előforduló indexre összegezni kell) a Q mennyiségek

$$Q'_\alpha = A_{\alpha\beta} Q_\beta \quad (34)$$

szerint transzformálódnak, akkor a $P_{\alpha\mu}$ mennyiségek

$$P'_{\alpha\mu} = a_{\mu\nu} B_{\alpha\beta} P_{\beta\nu} \quad (35)$$

szerint transzformálódnak, ahol a B és A együtthatók összefüggése:

$$A_{\alpha\gamma} B_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (36)$$

Ez annyit jelent, hogy a B mátrix az A mátrix transzponáltjának reciproka. Ebből pedig következik, hogy P és Q azonos indexeire mindig szabad kontrakciót végezni, s így például $\sum_\alpha P_{\alpha\mu} Q_\alpha$ vektor, $\sum_\alpha P_{\alpha\mu} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\nu}$ pedig tenzor lesz.

Ha a véges transzformációról infitezimálisra térünk át, amelynél $a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon s_{\mu\nu}$, $A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon t_{\alpha\beta}$, továbbá (33) és (36) szerint $s_{\mu\nu} = -s_{\nu\mu}$, $s_{\nu\nu} = 0$, $B_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \varepsilon t_{\beta\alpha}$ áll fenn, miközben az ε^2 nagyságrendű mennyiségeket elhanyagoljuk, akkor (33), (34) és (35)-ből

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon s_{\mu\nu} x_\nu, \quad s_{\mu\nu} = -s_{\nu\mu}, \quad (33')$$

$$Q'_\alpha = Q_\alpha + \varepsilon t_{\alpha\beta} Q_\beta \quad (34')$$

$$P'_{\alpha\mu} = P_{\alpha\mu} - \varepsilon t_{\beta\alpha} P_{\beta\mu} + \varepsilon s_{\mu\nu} P_{\alpha\nu}. \quad (35')$$

Ezután számítsuk ki a vesszős mennyiségek zárójeles kifejezéseit, amelyekben egyelőre rögzítjük az (x_μ) és (\bar{x}_μ) világpontokat, ahol a mezőmennyiségeket vizsgáljuk.

Ekkor

$$[Q'_\alpha, \bar{Q}'_\beta] = [Q_\alpha, \bar{Q}_\beta] + \varepsilon t_{\alpha\gamma} [Q_\gamma, \bar{Q}_\beta] + \varepsilon t_{\beta\delta} [Q_\alpha, \bar{Q}_\delta],$$

$$[P'_{\alpha 4}, \bar{Q}'_\beta] = [P_{\alpha 4}, \bar{Q}_\beta] + \varepsilon s_{4\nu} [P_{\alpha\nu}, \bar{Q}_\beta] - \varepsilon t_{\gamma\alpha} [P_{\gamma 4}, \bar{Q}_\beta] + \varepsilon t_{\beta\gamma} [P_{\alpha 4}, \bar{Q}_\gamma],$$

$$[P'_{\alpha 4}, \bar{P}'_{\beta 4}] = [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta 4}] + \varepsilon s_{4\nu} [P_{\alpha\nu}, \bar{P}_{\beta 4}] + \varepsilon s_{4\nu} [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta\nu}] - \\ - \varepsilon t_{\gamma\alpha} [P_{\gamma 4}, \bar{P}_{\beta 4}] - \varepsilon t_{\gamma\beta} [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\gamma 4}].$$

Ezek a kifejezések lényegesen egyszerűsödnek, ha a vesszőtlen koordináta esetében a zárójeles kifejezések (II), illetve (31) értékeit vesszük. Ekkor ugyanis eltűnik minden $t_{\alpha\beta}$ -t, mint tényezőt tartalmazó tag. Az első és utolsó egyenletben ez triviális, a második egyenletben pedig (egy közös állandó tényező erejéig) a

$$-t_{\gamma\alpha} \delta_{\gamma\beta} + t_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\gamma} = -t_{\beta\alpha} + t_{\beta\alpha} = 0$$

járulékot szolgáltatják. Tehát csak az $s_{4\nu}$ tényezőjű tagok maradnak, amelyekben egyébként $s_{44} = 0$ miatt ν -t az 1—3-ig haladó k indexszel helyettesíthetjük úgy, hogy

$$\left. \begin{aligned} [\bar{Q}'_\alpha, \bar{Q}'_\beta] &= 0 \\ [\bar{P}'_{\alpha 4}, \bar{Q}'_\beta] &= \frac{hc}{2\pi} \delta(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}) \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon s_{4k} [P_{\alpha k}, Q_\beta] \\ [P_{\alpha 4}, \bar{P}'_{\beta 4}] &= \varepsilon s_{4k} [P_{\alpha k}, \bar{P}_{\beta 4}] + \varepsilon s_{4k} [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta k}]. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Most áttérhetünk a zárójeles kifejezéseknek a világpont változásából származó második részére. Mindig megengedett a koordináta-rendszer kezdőpontját a két világ-pont egyikébe helyezni, ami tehát rögzített marad. Ez a kettő közül bármelyik lehet, mert már megmutattuk, hogy a négydimenziós világ $t = \text{const.}$ metszetéből egy másik párhuzamos szomszédos metszetre áttérve a f. r.-k semmit sem változnak. Ha az első pontot, P -t választjuk rögzítettnek, akkor a második, \bar{P} pont koordinátái a vesszőtlen koordináta-rendszerben $x_i = \bar{x}_i$, $x_4 = 0$, míg a \bar{P}' pontéi a vesszős koordináta-rendszerben ugyanezen $x_i = \bar{x}_i$, $x'_4 = 0$ értékek lesznek. A vesszőtlen rendszerben tehát a \bar{P} pont koordinátái $(\bar{x}_i, 0)$, de a \bar{P}' pont koordinátái ugyanebben a rendszerben $x'_4 = 0$ miatt $(\bar{x}_i - \varepsilon s_{ik} \bar{x}_k, -\varepsilon s_{4k} \bar{x}_k)$. Tehát bármely két F_1 és F_2 mennyiség esetén:

$$[F_1(P), F_2(\bar{P}')] = [F_1(P), F_2(\bar{P})] - \varepsilon s_{vk} \bar{x}_k \left[F_1(P), \frac{\partial F_2(\bar{P})}{\partial \bar{x}_v} \right].$$

Ha a koordináta-rendszer origóját ismét tetszőlegesnek hagyjuk, akkor a zárójeles kifejezések teljes változása:

$$\begin{aligned} [Q'_\alpha, Q'_\beta(\bar{P}')] - [Q_\alpha, Q_\beta(\bar{P})] &= -\varepsilon s_{vk} (\bar{x}_k - x_k) \left[Q_\alpha, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial \bar{x}_v} \right] \\ [P'_{\alpha 4}, Q'_\beta(\bar{P}')] - [P_{\alpha 4}, Q_\beta(\bar{P})] &= -\varepsilon s_{vk} (\bar{x}_k - x_k) \left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial \bar{x}_v} \right] + \varepsilon s_{4k} [P_{\alpha k}, \bar{Q}_\beta] \\ [P'_{\alpha 4}, P'_{\beta 4}(\bar{P}')] - [P_{\alpha 4}, P_{\beta 4}(\bar{P})] &= -\varepsilon s_{vk} (\bar{x}_k - x_k) \left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{P}_{\beta 4}}{\partial \bar{x}_v} \right] + \varepsilon s_{4k} \{ [P_{\alpha k}, P_{\beta 4}] + [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta k}] \}. \end{aligned} \quad (38)$$

Itt meg kell jegyeznünk, hogy az s_{vk} -es tagokban a v összegezési index 4-re szorítkozhat. Az első és utolsó egyenlet esetén az illető zárójeles kifejezések eltűnése miatt ez triviális, a középső egyenletre nézve pedig abból következik, hogy az $(\bar{x}_k - x_k)$ tényezőt tartalmazó tagokat csak akkor kell megtartani, ha e tényezőt a δ -függvénynek egy x_k -szerinti járulékos deriváltja ismét kiejti; ez a következőkben is fontos lesz.

$v = 1, 2, 3$ esetén ekkor $\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial \bar{x}_v} \right]$ arányos a $\frac{\partial}{\partial x_v} \delta(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}})$ differenciálhányadossal, $v = k$ esetén $s_{kk} = 0$ miatt a tag eltűnik úgy, hogy itt is csak $v = 4$ marad meg.

Ha a (II) f. r.-knak a $t' = \text{const.}$ nem párhuzamos szomszédos metszetre is érvényben kell maradniok, akkor minden antiszimmetrikus $s_{\mu\nu}$, azaz minden s_{4k} esetén a felírt képletekben az ε -os tagok kompenzálják egymást. Azaz fenn kell állnia:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{x}_k - x_k) \left[Q_\alpha, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial x_4} \right] &= 0 \\ (\bar{x}_k - x_k) \left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial x_4} \right] &= [P_{\alpha k}, \bar{Q}_\beta], \\ (\bar{x}_k - x_k) \left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{P}_{\beta 4}}{\partial x_4} \right] &= [P_{\alpha k}, \bar{P}_{\beta 4}] + [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta k}]. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

A (39) egyenletek bizonyításához feltesszük, hogy H nem tartalmazza P tér szerinti deriváltjait. Ekkor mindjárt az első egyenlet magától teljesül, mert a $\left[Q_\alpha, \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_k}\right]$ zárójeles kifejezés ekkor csak a δ függvényt magát, nem pedig tér szerinti deriváltjait tartalmazza. A második egyenlet is könnyen igazolható. Mindenekelőtt jobb oldala (II) és (19) szerint:

$$\frac{2\pi}{hc} [P_{\alpha k}, \bar{Q}_\beta] = \frac{\partial P_{\alpha k}}{\partial P_{\beta 4}} \delta(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}) = - \frac{\partial^2 H}{\partial P_{\beta 4} \partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}} \delta(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}),$$

míg bal oldalára adódik:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{hc} (\bar{x}_k - x_k) \left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial x_k} \right] &= \frac{2\pi}{hc} (\bar{x}_k - x_k) \left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial H}{\partial P_\beta} \right] = \\ &= (\bar{x}_k - x_k) \frac{\partial}{\partial Q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial P_\beta} \delta + (\bar{x}_k - x_k) \sum_i \frac{\partial}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \frac{\partial H}{\partial P_\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \delta. \end{aligned}$$

Mivel az $(\bar{x}_k - x_k)$ tényezőt a δ -függvény egy deriváltjának kompenzálnia kell, $(\bar{x}_k - x_k)$ szerinti parciális deriválás után csupán

$$- \frac{\partial}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}} \frac{\partial H}{\partial P_\beta}$$

marad meg, ami a jobb oldal értékével megegyezik*. Valamivel több számítást igényel (39) utolsó egyenlete. Először is ezen egyenlet jobb oldala (19) szerint

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{hc} \{ [P_{\alpha k}, \bar{P}_{\beta 4}] + [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta k}] \} &= \left(- \frac{\partial P_{\alpha k}}{\partial Q_\beta} + \frac{\partial P_{\beta k}}{\partial Q_\alpha} \right) \delta + \\ &+ \sum_i \left(\frac{\partial P_{\alpha k}}{\partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}} + \frac{\partial P_{\beta k}}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \delta = \\ &= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial Q_\beta \partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}} - \frac{\partial^2 H}{\partial Q_\alpha \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_k}} \right) \delta - \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i} \partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}} + \frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_k}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \delta. \end{aligned}$$

* A különböző változók szerinti differenciálás felcserélhetősége szigorúan érvényes a mátrixok szerinti differenciálásnál is, ahogy ez a műveletnek az előző paragrafusban megadott definíciójából kiderül.

A (39) utolsó egyenletének bal oldala pedig:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2\pi}{hc} (\bar{x}_k - x_k) \left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{P}_{\beta 4}}{\partial x_4} \right] = \\
 & = \frac{2\pi}{hc} (\bar{x}_k - x_k) \left[P_{\alpha 4} - \frac{\partial H}{\partial Q_\beta} \right] + \frac{2\pi}{hc} (\bar{x}_k - x_k) \sum_i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{H}}{\partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial \bar{x}_i}} \right] = \\
 & = \frac{\partial^2 H}{\partial Q_\beta \partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}} \delta + (\bar{x}_k - x_k) \sum_i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial Q_\alpha \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}} \delta + \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}} \frac{\partial \delta}{\partial \bar{x}_j} \right] = \\
 & = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial Q_\beta \partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}} - \frac{\partial^2 H}{\partial Q_\alpha \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_k}} \right) \delta - \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}} \right) \delta + \\
 & + \sum_i \sum_j (\bar{x}_k - x_k) \frac{\partial^2 \delta}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_j} \frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_j} \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}.
 \end{aligned}$$

Az utolsó kifejezés első tagja máris megegyezik a (*) megfelelő tagjával, míg az utolsó tag csak vagy $i=k$ vagy $j=k$ esetén ad el nem tűnő járulékot. Az első esetben a járulé-

$$- \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_k}} \frac{\partial \delta}{\partial \bar{x}_i},$$

a második esetben pedig

$$- \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}} \frac{\partial \delta}{\partial \bar{x}_i},$$

ami a (*)-nak $\frac{\partial \delta}{\partial \bar{x}_i}$ -vel szorzott tagjával megegyezik. Az egyetlen hátra levő tag:

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}} \right) \delta(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}).$$

Ennek eltűnése különleges, a f. r.-k relativisztikus invarianciájával kapcsolatos kiegészítő követelménynek látszik.

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}} \right) = 0. \quad (40)$$

Ezt ugyan nem minden tetszés szerinti relativisztikusan invariáns L Lagrange-függvény és a hozzá tartozó H Hamilton-függvény elégíti ki, de mindazok kielégítik, ame-

lyeknél a (9) egyenlet fennáll és amelyekkel a fizikai alkalmazások folyamán találkozunk. Ugyanis ezek esetén a Q_α -k tér szerinti deriváltjaiban a kvadratikus tagoknak (magasabb hatványok egyáltalán nem lépnek fel) mindig állandó együtthatók vannak. Ezáltal a következő alkalmazásokra kiterjedő mértékben bebizonyítottuk a f. r.-k invarianciáját.

A f. r.-k alakjából következik ekkor, hogy térszerűen elválasztott

$$(\sum_i \Delta x_i^2 - c^2 \Delta t^2 > 0)$$

pontok esetén a zárójeles kifejezések véges távolságban eltűnnek (a f. r.-k infinitezimális jellege). Közelebbi másfajta vizsgálatokból következik, hogy ez a helyzet egy fénykúpon fekvő vagy időszerűen elválasztott pontok esetén általában nem áll fenn. A zárójeles kifejezések értéke ekkor véges távolságú pontok esetén is különbözik a zérustól, és csak speciális esetekben adható meg. Ez a helyzet megfelel a kvantummechanikában annak, hogy a t időhöz tartozó pl. $q(t)$ koordináta a t' időhöz tartozó koordinátával nem felcserélhető; a megfelelő zárójeles kifejezések általában explicite nem adhatók meg.

(21) és (23)-ból következik, hogy

$$J_k = -icG_k = \int \sum_\alpha P_{\alpha 4} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} dV,$$

$$J_4 = \int \left(\sum_\alpha P_{\alpha 4} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_4} - L \right) dV = \bar{H} = E \quad (41)$$

egy négyesvektor komponenseit alkotják, amely a teljes energiát és a teljes impulzust foglalja magában. Ugyanis ezek a relációk ekkor a

$$\frac{\partial F}{\partial x_\nu} = \frac{2\pi}{hc} [J_\nu, F] \quad (42)$$

alakot veszik fel. Későbbiekben J_k vektorjellegét közvetlen számítással igazoljuk.

Fordította:
Csoma Zsigmond

KÖNYVISMERTETÉS

J. R. Smith (ed.-s.): *Theory of chemisorption Topics in Current Physics 19. kötet*
Springer — Verlag, Berlin

A kemisorpció tanulmányozása az alap- és alkalmazott kutatások egyik legdinamikusabban fejlődő területe. Az ide vonatkozó publikációk mennyisége évről évre rohamosan növekszik, és az jellemzi, hogy a kísérleti jellegű közlemények száma jóval meghaladja az elméleti munkákét. Éppen ezért vált időszerűvé jelen monográfia kiadása.

A 240 oldal terjedelmű mű hét fejezetre oszlik. Az első fejezet a kiadó által írt rövid bevezető. A 2. fejezetben (*S. C. Ying*) találhatjuk meg a következő fejezetek szempontjából fontos elméletek rövid összefoglalását, elsősorban a lokális sűrűségfüggvény (LDF) fogalmának definícióját, ennek *Kohn* és *Sham* szerinti particionálását, a kicserélési és korrelációs függvény *Gunnarson* és *Lundkvist*, továbbá a kinetikus energia *Hohenberg*, *Kohn* és *Sham* által kifejlesztett számítási módszereit fémfelületeken adszorbeált egyes molekulákkal kapcsolatban. Foglalkozik a fenti módszerek segítségével végzett számítások eredményeinek közlésével is.

A 3. fejezetben *J. A. Appelbaum* és *D. R. Hamann* félvezetők felületén létrejövő kemisorpcióval foglalkozik. Röviden tárgyalják a tiltott sávban található felületi lokalizált állapotok energia nivóit. A számítási módszerek közül elsősorban a szerzők által kifejlesztett szelfkonzisztens (SC) pseudopotenciál (PP) módszert és *Pandey* és *Phillips* szemiempirikus (SE) tight binding (TB) módszerét elemzik. Az alkalmazásoknál elsősorban a hidrogén félvezetők felületén történő adszorpciójával foglalkoznak, különös tekintettel a lokális állapotsűrűségek (LDS) *Van Hove* szingularitásaira és e számítások PES mérési eredményekkel történő összehasonlítására.

A 4. fejezetet (*F. J. Arlinshaus*, *J. G. Gay*, *J. R. Smith*) az átmeneti fémek kemisorpciójának szentelték. Kísérletileg talán ez a legjobban dokumentált terület, amely a d elektronok különleges sajátosságai folytán elméletileg is igen vonzó. A szerzők az elméleti módszerek közül a lokális „muffintin” (MT), majd a Slater—Koster, Bullett és Cohen, továbbá a fejlettebb Smith és Mattheiss TB módszereket érintik. Nagyobb figyelmet szentelnek az SC módszerekre, ezek közül is a Gauss bázison alapuló, továbbá a numerikus bázist használó Wang—Freeman módszereknek. A teljesen SC módszerek közül Cohen PP módszerét, továbbá Louie kevert bázisú PP módszerét érintik. Bő teret kap a szerzők által kidolgozott SC-lokális pálya módszer (LO), melyet nitrogén rézfelületen történő kemisorpciója esetében LDS számítására alkalmaznak.

Az 5. fejezet tárgya klaszterek kemisorpciója. E fejezet tárgyalásmódja áll legközelebb a kvantumkémiahoz. A klaszter fogalmának definiálása után rátér a különböző HF módszerek (RHF, UHF, EHF, GHF, GVB) ismertetésére, majd a különböző SE módszereket érinti (EHT, CNDO, BEBO). Az LDF módszerek közül az Xa, az MT potenciált használó MSX-a és az átfedő—MT OMSX-a módszereket ismerteti. A legnagyobb teret természetesen a szerző által kifejlesztett Adams—Gilbert formalizmuson alapuló LO módszer kapta. Előnyét az X-a módszerekkel szemben a szilárd testet szimuláló potenciál helyes figyelembevételében látja. Az alkalmazásoknál elsősorban H és Ni kölcsönhatásaival foglalkozik. (pl. $7\text{ Ni} + 1\text{ H}$; $2\text{ Ni} + 20 + 4\text{H}$).

A 6. fejezet címe: Felületi állapotok és kemisorpció o-sávval rendelkező perovszkiteken (*T. Wolf-ram*, *S. Ellatioglu*). Az említett struktúra rövid ismertetése után BEBO-klaszter módszerrel végzett számítások eredményeit közli BO_6 , ill. a felületet szimuláló BO_6 típusokra. Itt elsősorban az LDS, a valenciasáv d keveredettsége, a felületi 0 vakanciaállapotok és a PES kísérleti eredményekkel való összehasonlítás képezi figyelmük tárgyát.

A 7. fejezet vállalta magára az összegezés és a kritika szerepét (*T. L. Einstein*, *J. A. Hertz*, *J. R. Schrieffer*). Elsősorban az LDF koncepció helyességét vitatják, és a megszorítások nélküli ULDF használatát javasolják. A fejezet célkitűzését egyik alfejezetének címe tükrözi a legjobban: Túl a HF módszeren. A kiindulás az Anderson modellpotenciál. Ezt elsősorban különböző tagokkal egészíti ki (Hubbard tagok). Foglalkoznak az árnyékolási és képtöltéseket leíró többtest-probléma

megoldásával, a kontinuum állapotok szerepével. Az alkalmazandó számítási módszereket az inter-atom Anderson-paraméter nagysága szerint osztályozzák. Kis paraméter esetén a Gomer—Schrieffer—Paulson VB módszert, közepes nagyságú paraméter esetére a spin fluktuációs v. paramagnon modell, kis paraméter esetére HF módszereket javasolnak. Végül a PES spektroszkópia elméleti alapjait fejtetik.

A könyv fejezeteinek végén bő irodalomjegyzék található, amely számos egészen új (1979) utalást is tartalmaz. Az egyes fejezetek tartalma az elmélyítés igénye nélkül gyakran átfedi egymást. Néhány ábránál lemaradt a magyarázó szöveg. A szerzők gyakran nem súlyoznak eléggé a könyv címe által felkínált két lehetőség között, azaz, hogy magukkal a számítási módszerekkel vagy az utóbbiak eredményeinek ismertetésével foglalkozzanak-e inkább. Hiányolom, hogy több ide vonatkozó fontos elmélet, pl. az intermediér állapotok elmélete, a Kronig—Penney modell, nem kaptak helyet a műben. A területről való átfogó kép ismertetése vagy az egyes elméletek vagy modellek elmélyítése gyakran elhalványul a saját eredmények közlésére irányuló törekvés tükrében. A szerzők mentségére szóljon, hogy a kemiszorpció elmélete még egyáltalán nem kidolgozott. A hiányosságok mindenképpen elhalványulnak a könyv azon érdeme mellett, hogy tömören és jól foglalja össze egy érdekes és fejlődő tudományág eredményeit.

A felületi jelenségek tanulmányozása az interdiszciplinaritás egyik klasszikus példája, amelynek össz tudományos és technikai jelentősége szintén felbecsülhetetlen. Ennek megvilágítására pusztán négy kiemelt példa alkalmas: A szén gázosításának katalizátorproblémái, a nagy teljesítményű elektromos cella kérdése, a biológiai membránokkal és a kristálynövekedéssel kapcsolatos problémakörök. Az itt felmerülő kérdéseknek a mű által szorgalmazott mélyebb megértése számos tudományág fejlődésének új útjait jelölheti ki, és így e könyv a legkülönbözőbb területeken működő szakemberek számára lehet ösztönző, gondolatébresztő olvasmány.

R. K.

J. M. André, J. L. Bredas, J. Delhalle, J. Ladik, G. Leroy, C. Moser (ed.-s.):
Recent Advances in the Quantum Theory of Polymers — Proceedings, Namur 1979 — Lecture
Notes in Physics, 113
Springer — Verlag

A szervetlen, szerves és biopolimérek fizikai és kémiai tulajdonságainak megértése és előrejelzése elektronszerkezetük teljes ismeretét igényli. Ez motiválta a Namurban összegyűlt 35 tudós törekvését, hogy a polimérekben végzett számítások jelenlegi eredményeinek bemutatása céljából a szimpoziumon elhangzott összes előadás teljes szöveg- és ábraanyagát megjelentessék.

A 306 oldal terjedelmű mű 23 előadás anyagát tartalmazza. Az egyes előadások témaköre három fő területre összpontosul, mégpedig a kísérlet (3), a rendezett (16) és a rendezetlen (31) szerkezetek elméleti kutatásaira. Ezenkívül egy előadás foglalja össze a jelenlegi helyzetet és perspektívákat.

A kísérleti részben polimér kristályok előállítása, szerkezete és a topokémiai reakciók alapelvei képezik V. Enkelmann előadásának tárgyát. Polimér rendszerek tanulmányozására alkalmazott kísérleti technikákról nyújt összefoglalást D. Bloor, míg egydimenziós TTF—TCNQ rendszerek vezetőképességi adatait J. J. Anré előadása elemzi.

A független elektron módszerek közül elsősorban utóbbiak crystal orbital (CO) EHT, CNDO és ab initio változatait, továbbá a floating spherical gaussian orbital módszert tárgyalják, különös tekintettel a szelfkonzisztens megoldásoknál fellépő instabilitásokra (M. Kertész). A mátrixelemek kiszámításához szükséges rácsösszegek számítási módszereivel két előadás foglalkozik (J. L. Bredas, L. Piel). Lokalizált pályatechnikák (G. Leroy) és a sűrűségfunkcionál formalizmus (W. J. Schneider) ismertetése is megtalálható a gyűjteményben. A korrelációt HF szinten figyelembe vevő módszerek közül a DODS és UHF (M. Kertész), továbbá az alternáló pálya, spinsűrűséghullám és töltéssűrűséghullám módszerekről (J. L. Calais) is képet nyerünk. G. Nicolas az ab initio módszereket szimuláló (SAMO) és a transzferálható kötött pályák lineáris kombinációján alapuló (LCBO) módszerek alkalmazhatóságát elemzi. A korrelációt szorosabb értelemben figyelembe vevő módszerekről (CI, CEPA, klaszterkifejtés) J. Ladik számol be.

Az alkalmazások között az XPES, PES és ESCA spektrumok számítása (J. Delhalle), infravörös frekvenciák számítása és konformációs analízis (C. E. Blom), fonon spektrumok számítása (P. E. Van Camp), (itt több pozitív utalás történik a Pulay—Török iskola eredményeire), mágneses anomáliák és értelmezésük és elsősorban a transzportjelenségek tanulmányozása szerepel, különös tekintettel a Peierls állapotokra és a szilárd test feladat ún. „broken symmetry” megoldásaira (S. Suhai).

A rendezetlen struktúrák számítása terén a rendezetlenség fogalmkörébe (J. P. Gaspard) nyertünk betekintést, majd pedig két előadás foglalkozik az utóbbi struktúrák elektronszerkezetének

számításánál leginkább alkalmazott két módszer, a virtuális kristály és a koherens potenciál közelítés bemutatásával (*M. Seel, J. P. Gaspard*). Utóbbi szerző a perturbálatlan Green-függvény diagonális elemeire a legközelebbi szomszéd közelítésben láncotrt kifejezést alkalmaz. Anderson modellen alapuló számítások eredményeit találhatjuk meg *F. Martins* előadásában.

Az előadásgyűjtemény jó betekintést nyújt a polimerek szerkezetével kapcsolatos kutatások jelenlegi állapotába és nagyszerűen kiegészíti a csaknem azonos nevekből álló kollektíva által 1977-ben kiadott „Quantum theory of polymers” c. monográfiát. A gyűjteményben megjelent előadások tematikus eloszlásának vizsgálata azt mutatja, hogy a klasszikus kvantumkémiái módszerek (HF — LCAO — SCF) CO változata az egyik leghatékonyabb módszer polimerek elektronszerkezetének számítására. Különös örömmre szolgált, hogy e módszer kifejlesztésében, tökéletesítésében és kiterjesztésében magyar tudóskollektíva vállalt oroszánrészt (*Ladik J., Kertész M., Biczó G.*), és a gyűjteményben helyet kapott előadások között is megkülönböztetett helyet foglalnak el fenti szerzők művei. Sajnálatos, hogy az intermedier állapotokkal kapcsolatos előadás nem hangzott el a szimpoziumon.

Itt jegyezném meg, hogy nem tudom mennyire közismert országunk tudományos társadalma előtt az a tény, hogy ezen a területen jogosan beszélhetünk magyar iskoláról, és a kutatások továbbfejlesztése ebben az irányban éppen e gyűjtemény tanulmányozása alapján feltétlenül indokolt.

A többi előadás tematikájától némileg eltérően I. B. Bozovic a lineáris tércsoportok elméletével, G. Nouchi pedig a molekulakristályok és az elektromágneses sugárzás kölcsönhatásaival foglalkozik.

Fentiek alapján nyilvánvaló, hogy a gyűjtemény az elméleti és gyakorlati szakemberek széles spektrumának szól. Túlmenően a szigorú értelemben vett polimérkémián, az érdeklődők a biopolimérek fizikája (a DNS és a fehérjék) és a szilárdtestfizika vonatkozásában is számos utalást találhatnak a műben. Jellemző példa ez arra, hogy egy interdiszciplinárisnak tűnő tudományág, ha megfelelő egzaktussággal nyúlnak a problémák megoldásához, hamar képes felmutatni olyan eredményeket, melyek az anyatudományok számára is értékes és továbbhaladásra ösztönző elemeket rejthetnek magukban.

(R. K.)

Wigner Jenő:
Csoportelméleti módszer a kvantummechanikában
Akadémiai Kiadó, 1979.

Kevés olyan tudományos munka akad, melyet megírása után évtizedekkel is nem csupán valamiféle áhítatos megemlékezés céljából, hanem mindennapi használatra emelnek le a könyvtárak polcairól. Az ilyen kivételes sorsú könyvek közé tartoznak azok a monográfiák, melyeket a kvantumelméletet megalkotó nagy nemzedék kiváló képviselői írtak az alapvető gondolatok és módszerek letisztulásának betetőzéseként: Dirac és Naumann munkái a kvantummechanika alapjairól, és nem utolsósorban Wigner Jenő 1931-ben megjelentetett csoportelméleti könyve. Wigner munkájának időtállóságát jól mutatja, hogy az első német nyelvű kiadáshoz képest az 1959-es angol nyelvű kiadás lényegében változtatás nélkül jelenhetett meg; az utóbbi alapján készült el a nemrég megjelent magyar fordítás, *Györgyi Géza és Sebestyén Ákos* szakmailag és nyelvilag is az eredetivel egyenértékű tolmácsolásában.

A könyv röviden, logikailag tisztán összefoglalja a kvantummechanika alapjait, tárgyalja a csoportok matematikai elméletét, kiegészítve saját eredményeivel (kvantummechanikai vektorösszeadás), és megmutatja, hogy az atomi szinképek csaknem minden fontos szabályszerűsége levezethető a csoportelmélet segítségével az atomi kölcsönhatások szimmetriatulajdonságaiból. Részletesen foglalkozik a csoportábrázolásokkal, a szimmetrikus csoporttal és a forgáscsoporttal, valamint a diszkrét tér-idő szimmetriákkal (tértükrözés, időtükrözés).

Ezeket az eredményeket a maga idején nem mindenki értékelte egyöntetűen; sokan arra hivatkoztak, hogy a mozgásegyenletekből úgyis minden következik, fölösleges külön elméletet kidolgozni a szimmetriák következményeinek vizsgálatára. Wigner érdeme, hogy rámutatott: a szimmetria megfontolások két szempontból is fontosak. Egyrészt, a mozgásegyenletek rendszerint csak közelítésben megkapható megoldásaival szemben könnyen áttekinthető, egzakt eredményeket adnak, melyek a konkrét mozgásegyenletek érvényességi körénél általánosabbak lehetnek. Másrészt, a szimmetriaelvek mintegy „szupertörvényeknek” tekinthetők, melyek ugyanúgy szabályozzák a lehetséges fizikai törvényeket, mint az utóbbiak a lehetséges fizikai eseményeket.

Ezeket a gondolatokat az idő teljes mértékben igazolta. Az atommagok, majd az elemi részecskék kutatása hosszú időn át nem tudott megbirkózni a helyes mozgástörvények felállításának problémájával, de a kölcsönhatások szimmetriatulajdonságainak felismerésével számos szabályszerűséget

lehetett megállapítani a szubatomi részek viselkedésében. Az elemi részek fizikája nem kis ideig az elemi rész-szimmetriák fizikája volt. S ha ma úgy érezzük, hogy a helyes alapvető mozgástörvények feltárásának küszöbén állunk, az éppen egy „szuperelv”, a mértékszimmétria bevezetésének köszönhető, melynek segítségével, úgy tűnik, minden kölcsönhatás az elektrodinamika mintájára kezelhető.

Az elmondottak miatt a csoportelmélet ma a fizikai kutatás egyik legfontosabb matematikai segédeszköze, s e téren Wigner könyve ma is az egyik legjobban használható munka. Éppen ezért ajánlható mindazoknak az egyetemi hallgatóknak, kutatóknak, akik a csoportelmélettel és főképp annak fizikai alkalmazásaival alaposan meg akarnak ismerkedni.

Nagy Tibor

G. A. Agoston: Color Theory and Its Application in Art and Design
Springer Series in Optical Sciences. Vol. 19.
Springer — Verlag. 1979.

Ritkán kerül kezünkbe olyan könyv, mint Agostoné, amelynek — a címnél is több oldalú felhasználhatósága volna. Agoston arra törekedik, hogy szinte teljesen felmérje mindazt, amit az emberiség a színről, a színekeverésről, a komplementer színekről, az egyenletes színskálákról, a fluoreszkáló és a nemfluoreszkáló anyagokról stb. eddig felismert. Teszi ezt olyan stílusban, hogy a tudományos és technikai alappal nem rendelkező olvasói is megérthessék, vagy legalábbis megsejthessék, merre van kérdéseikre a felelet. A színek szerepe technikai kérdés is. A világító diódák esetén például a szám tévedésmentes gyors felismerés, szintén színkérdés is. A színnek a művészetben való szerepe biológiai, orvosi kérdés is. A barna szín, a szürke szín mögött nem fényhullámhossz áll közvetlenül, hanem fényérzékelésünk. Egyáltalában nem mindegy egy emberi szervezetet kutató számára, mit jelent számunkra a szín, a színkontraszt, a színek élénksége, harmóniája vagy éppen diszharmóniája. Stevens a fényesség pszichofizikai törvényét már jó pár éve meghatározta. Tudomásom szerint az egyes színek és ezek együttes hatásának pszichofizikai törvénye még ismeretlen. Agoston könyve az ebben az irányban érdeklődő kutatót is segítheti.

(T. Gy.)

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Sándor István

A kézirat nyomdába érkezett: 1980. XI. 12. — Terjedelem: 9,10 (A/5) ív
80-4951 — Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Dobó József igazgató

TARTALOMJEGYZÉK

SZILÁRDSÁGNÖVELŐ MECHANIZMUSOK FÉMEKBEN I.

Szerkesztő:

KOVÁCS ISTVÁN

<i>Kovács István: A fémek képlékeny alakváltozása és szilárdsága</i>	187
<i>Vörös György és Kovács István: Felületencentrált köbös egykristályok alakítási keményedése</i>	201
<i>Juhász András: Tércentrált köbös fémek alakítási keményedése</i>	215
<i>Tasnádi Péter és Rajkovits Zsuzsa: A szemcseszerkezet szilárdságnövelő hatása</i>	235
<i>Rajkovits Zsuzsa és Tasnádi Péter: A szubszerkezetek szilárdságnövelő hatása</i>	255

A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

<i>W. Heisenberg és W. Pauli: A hullámmezők kvantumdinamikája</i>	263
---	-----

KÖNYVISMERTETÉS

<i>J. R. Smith (ed.): Theory of chemisorption</i>	283
<i>J. M. André, J. L. Bredas, J. Delhalle, J. Ladik, G. Leroy, C. Moser (ed.-s): Recent Advances in the Quantum Theory of Polymers</i>	284
<i>Wigner Jenő: Csoportelméleti módszer a kvantummechanikában</i>	285
<i>G. A. Agoston: Color Theory and Its Application in Art and Design</i>	286

307.226

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

GÁSPÁR REZSŐ, KISS DEZSŐ, KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR
ÉS SZALAY SÁNDOR
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI
PÁL LÉNÁRD

XXIX. KÖTET

4. FÜZET



AKADÉMIAI KIADÓ
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST 1981

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klasszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10-10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóiratról évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelemben.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Turchányi György egyetemi tanár

Biofizikai Intézet

1444 Budapest VIII., Postafiók 263

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 90 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a KULTÚRA Külkereskedelmi Vállalat, 1389 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmi ismertetőt írnak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közölik. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írnak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.

SZILÁRDSÁGNÖVELŐ MECHANIZMUSOK FÉMEKBEN II.

SZERKESZTŐ: KOVÁCS ISTVÁN

6. BEFAGYASZTÁSI KEMÉNYEDÉS

BÉRCES GYÖRGY

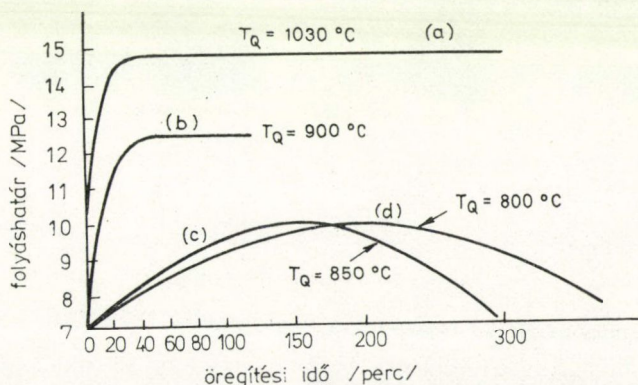
ELTE, Általános Fizika Tanszék

1. BEVEZETÉS

Befagyasztási keményedésnek (quench hardening) nevezzük azt a jelenséget, amikor fémekben magas hőmérsékletről történő gyors hűtés, esetleg ezt követő alkalmas öregítés után megnő a folyáshatár.

A jelenséget az 1950-es években fedezték fel. *Li* és munkatársai Zn egykristályon azt vizsgálták, hogy a hűtési sebesség milyen hatással van az alakítási keményedésre és a folyáshatárra [1]. Viszonylag kis, $30\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{perc}$ alatti hűtési sebességeket alkalmaztak, de így is észrevehető növekedést tapasztaltak a folyáshatárban. Feltételezték, hogy a hűtés során visszamaradó vakanciák okozzák a keményedést, de nem részletezték a keményedés mechanizmusát. A vakanciák szerepét a keményedésben elsőként *Maddin* és *Cottrell* elemezték mélyrehatóan [2]. Nagy hűtési sebességet alkalmaztak, hogy elkerüljék a befagyasztás alatti vakanciacsoportosulást. A kísérletekhez különböző tisztaságú ($99,6-99,997\%$), rúd alakú Al egykristályokat használtak, amelyeket olvadáspont közeléből edzetek le. Igazolták azt az elképzelést, hogy a vakanciák nagyobb szerepet játszanak a keményedésben, mint a befagyasztási feszültség, továbbá feltételezték, hogy a vakanciák abszorbeálódnak a már létező diszlokációkon, kisebb részük pedig kondenzálódik üregek, vagy diszlokációhurkok formájában.

Polikristályos Cu huzalon *Kimura* és munkatársai végeztek méréseket [3]. Az 1. ábrán egy $0,25\text{ mm}$ átmérőjű minta folyáshatára látható az öregítési idő függ-



1. ábra: $0,25\text{ mm}$ átmérőjű polikristályos rézhuzal folyáshatára az idő függvényében, $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os öregítési hőmérsékleten

vényében, vízbe történő edzés esetén. Az öregítési hőmérséklet 100°C volt. Ha a befagyasztási hőmérséklet nagyobb mint 900°C , kis kezdeti növekedés tapasztalható a folyáshatárban, amely gyorsan nő, majd eléri egy maximális értéket, ami megmarad a további öregítés során. Ha a befagyasztási hőmérsékletet növeljük, akkor a maximális keményedés értéke növekszik, a maximális keményedés felének eléréséhez szükséges idő (félidő) viszont csökken. Ha a befagyasztási hőmérséklet kisebb mint 850°C , nem tapasztalható kezdeti növekedés a folyáshatárban. Ekkor az öregítés során a folyáshatár növekedés az edzési hőmérséklettől független maximumot vesz fel, amelynek eléréséhez szükséges idő csökken a befagyasztási hőmérséklet növelésével. A további öregítés a minta kilágyulásához vezet.

Kimura és munkatársai arra a megállapításra jutottak, hogy a 900°C fölötti hőmérsékletekről történő edzés esetén a keményedést elsősorban rögzített (prizmatikus) diszlokációhurkok képződése okozza. Ha alacsonyabb hőmérsékletekről történik a befagyasztás (850°C alatt), a vakanciák eltűnése a már meglevő diszlokációkon történik, lépcsők és kiterjedt lépcsők kialakulása mellett.

Shiotani különböző hőmérsékletekről leedzett nagytisztaságú Al minták keményedését vizsgálta közvetlenül az edzés, majd szobahőmérsékleten történt hevertetés után [4]. A folyáshatárt alacsony hőmérsékleteken is mérte. A keményedés hőmérsékletfüggetlen részét a diszlokációk és a vakanciakondenzációval létrejött diszlokációhurkok közötti kölcsönhatással, míg a hőmérsékletfüggő részt a diszlokációhurkok átmetszéséből adódó hatással értelmezte.

A befagyasztási keményedésben nagy szerepük van a vakanciáknak és ezekből kialakuló másodlagos hibáknak, amelyek elektronmikroszkópos felvételeken megfigyelhetők [5, 6, 7]. Többet vizsgálták elméleti úton, hogy ezek a hibák milyen mértékben járulnak a keményedéshez [8–14]. A befagyasztási keményedés jelenségtöről részletes elemzések is találhatók az irodalomban [15, 16].

A jelen dolgozatban áttekintjük a befagyasztás során keletkező hibáknak a diszlokációkkal való kölcsönhatását és az ebből származó folyáshatár növekedést.

2. VAKANCIÁK ÉS VAKANCIACSOPORTOK KÖLCÖNHATÁSA DISZLOKÁCIÓKKAL

A befagyasztás során keletkező többletvakanciák és ezek csoportosulásai a diszlokációkkal kölcsönhatásba léphetnek a következő formákban [16]:

a) Kölcsönhatás diszpergált üregekkel (egyes vakanciák, divakanciák, kisméretű üregek). Az ilyen hibák akadályozzák a diszlokációk mozgását és a diszlokációk áthaladása után is változatlanok maradnak.

b) Vakanciaeltűnés diszlokáción, lépcsőképződés.

c) Vakanciakondenzációval képződő diszlokációhurkok, illetve üregek kölcsönhatása diszlokációkkal.

Ezen kölcsönhatások, illetve folyamatok által okozott szilárdságnövekedés meghatározásához ismerni kell az adott hibatípus és a diszlokáció között ható erőt (vagy kölcsönhatási energiát), mint a távolság függvényét, valamint a hibák eloszlását a diszlokációvonal mentén. A számítások célja a folyáshatár (a kritikus nyírófeszültség) meghatározása.

3. DISZPERGÁLT ÜREGEK HATÁSA A KEMÉNYEDÉSRE

3.1. A folyáshatár függése a vakancia koncentrációtól

Vakanciák, vagy kis méretű üregek és diszlokációk kölcsönhatása a rugalmas kontinuum alapegyenleteiből számítható. A rugalmas kölcsönhatási energia (mechanikai kölcsönhatás) a moduluszhatásból származik [17]. A moduluszhatásból adódó energia a ϑ szögtől (2. ábra) függetlenül mindig vonzást eredményez mind csavar-diszlokáció mind éldiszlokáció esetén.

Vizsgáljuk meg, hogy a diszpergált üregek milyen mértékben növelhetik a folyáshatárt. Tegyük fel, hogy a vakanciák, vagy kis üregek a diszlokációval egy x_0 sugarú hengeren belül (x_0 néhány atomtávolság) léphetnek kölcsönhatásba. Ezen a hengeren belül a vakanciát befoghatja a diszlokáció és magához rögzítheti egy K_{\max} erővel. Legyen a vakanciák eloszlása a diszlokációvonal mentén, a diszlokáció csúszósíkjában egyenletes. Ha külső feszültséget alkalmazunk, akkor a diszlokáció a rögzítési pontok között kihajlik mindaddig, amíg a külső feszültségtől származó, a diszlokációra ható

$$F = \tau bl \quad (1)$$

erő (ahol τ a külső erőktől származó feszültség csúszósíkba eső, a csúszási irányban ható komponense, l a kihajló diszlokációs szakasz hossza, b a Burgers-vektor) egyenlő nem lesz a diszlokáció vonalmenti feszültségéből adódó erővel. A kihajlott diszlokáció egyensúlyi helyzetét jellemezhetjük a θ szög és a diszlokáció T_L vonalmenti feszültségének segítségével (3. ábra):

$$2T_L \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \tau bl. \quad (2)$$

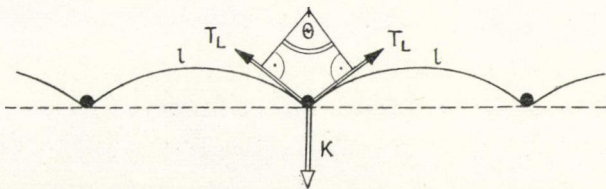
A diszlokáció tehát mindaddig rögzítve van a hibákon, amíg teljesül a

$$2T_L \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq K_{\max} \quad (3)$$

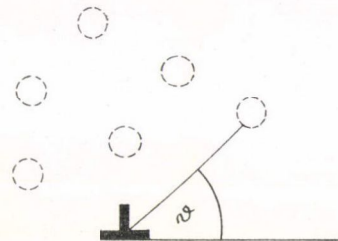
összefüggés.

A hiba erősségét jellemezhetjük azzal a

$$\frac{\theta_0}{2} = \arcsin\left(\frac{K_{\max}}{2T_L}\right) \quad (4)$$



3. ábra. Diszlokációt rögzítő ponthibák



2. ábra. Éldiszlokáció-vakancia kölcsönhatáshoz

szöggel (3. ábra), amelynél nagyobb szögben nem tud kihajolni a diszlokációvonal a rögzítési pontban. Erős hibára $\theta_0 \approx \pi$, míg gyenge hibának azt nevezzük, amelyre $\theta_0 < 20^\circ$.

Éldiszlokáció és vakancia között az E_{\max} maximális kötési energia általában 0,1–0,2 eV nagyságrendű [17]. Ha figyelembe vesszük, hogy a vakancia és diszlokáció között fellépő erő akkor maximális, amikor a köztük levő x_0 távolság a rácsállandónak egy-kétszerese [18], a $K_{\max} \approx \frac{E_{\max}}{x_0}$ összefüggés alapján egy durva becslést adha-

tunk a kölcsönhatási erő nagyságára. A vonalmenti feszültség értékére a $T_L \approx \frac{1}{2} \mu b^2$ összefüggést alkalmazva [19], ahol μ a mátrix nyírási modulusza, b a diszlokáció Burgers-vektora (pl. alumíniumban $\mu = 2,7 \cdot 10^4$ N/mm²; $b = 2,86 \cdot 10^{-10}$ m), a (4) összefüggés felhasználásával a vakancia erősségét jellemző θ_0 -ra:

$$\theta_0 < 6^\circ$$

adódik. Tehát a vakanciák igen gyenge hibának tekinthetők.

Ha τ_0 -al jelöljük azt a feszültséget, amely 0 K-en szükséges a diszlokáció hibákról való leszakításához, akkor a (2) egyenletből

$$\tau_0 = \left(\frac{\mu b}{l} \right) \cdot \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \quad (6)$$

adódik. Gyenge hibáknál a kritikus mértékben kihajló diszlokációs szakasz l hossza nagyobb, mint a hibák közötti átlagos távolság (Λ) a csúszósíkban, mert a leszakadás már kis feszültségeknél bekövetkezik, amikor a közeli rögzítési pontok között a diszlokáció nem tud eléggé kihajolni. Így a leszakadás a helyileg távolabbi rögzítési pontok között történik meg. *Friedel* megmutatta, hogy a leszakadó szakasz hosszának a várható értéke [11]:

$$l = \left(\frac{\mu b \Lambda^2}{\tau_0} \right)^{1/3} \quad (7)$$

A (6) és (7) egyenletekből a folyáshatár növekedésre

$$\tau_0 = \left(\frac{\mu b}{\Lambda} \right) \cdot \sin^{3/2} \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \quad (8)$$

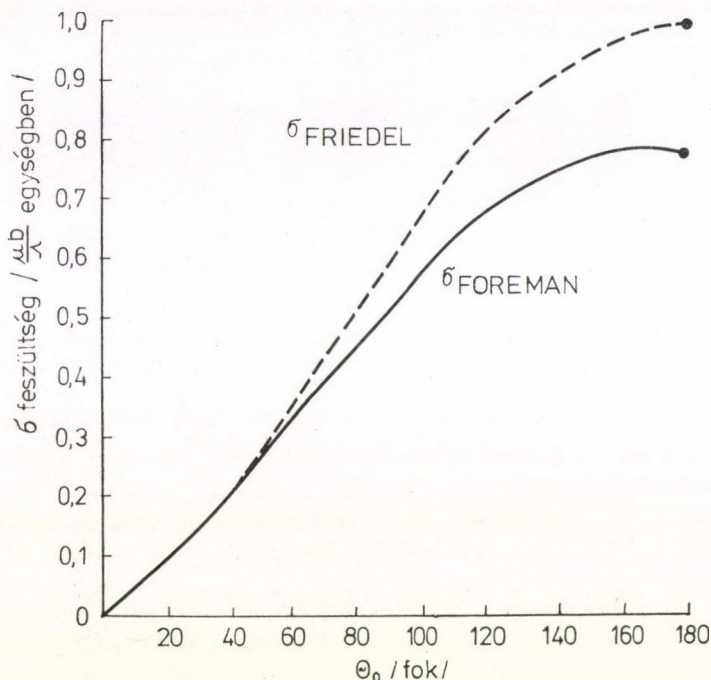
adódik. A csúszósíkban levő hibák közötti átlagos Λ távolság azonban kifejezhető a C hibakonzentrációval és a b atomtávolsággal

$$\Lambda = \frac{b}{\sqrt{C}} \quad (9)$$

(4) és (9) felhasználásával:

$$\tau_0 = \frac{1}{b^3} (K_{\max})^{3/2} \sqrt{\frac{C}{\mu}} \quad (10)$$

Foreman és Makin számítógép segítségével modellezték a diszlokáció mozgását, a csúszósíkban véletlenszerűen elhelyezkedő ponthibák között [13]. A diszlokáció mozgatásához szükséges feszültség gyenge hibáknál nagyon jól egyezett a Friedel-féle eredménnyel ((8) egyenlet). A 4. ábra a számítógép segítségével kapott és a Friedel-féle összefüggést mutatja a ponthiba erősségére jellemző θ_0 szög függvényében.



4. ábra. Diszlokációvonal ponthibákról való leszakításához szükséges feszültség a hiba erősségét jellemző θ_0 szög függvényében

A modell alumínium esetén a következő eredményt adja:

$$\tau_0 = 302 \sqrt{C} \text{ (MPa)}. \quad (11)$$

Olvadásponttól történő befagyasztás esetén $C \approx 10^{-4}$, amivel a maximális folyáshatár növekedésre $\tau_{0m} \approx 3,0$ MPa adódik.

3.2. A termikus aktiválás hatása

A diszlokációnak a hibáktól történő elszakadását a hőmozgás elősegíti, így várható, hogy a hőmérséklet emelkedésével csökken a folyáshatár értéke τ_0 -hoz képest. A folyáshatár hőmérséklet-függése a következő egyenlettel vehető figyelembe (1. fejezet):

$$\dot{\epsilon} = A e^{-\frac{\Delta G(\tau, T)}{kT}}, \quad (12)$$

ahol $\dot{\epsilon}$ a nyúlási sebesség, ΔG a folyamat aktiválási szabadentalpiája. Az A faktor tartalmazza a diszlokációsűrűséget, a diszlokációszakasz hosszát, Burgers-vektorát, a hibák koncentrációját, valamint az atomok rezgési frekvenciáját [16]. A ΔG aktiválási szabadentalpia első közelítésben (1. fejezet):

$$\Delta G = U_0 - \tau(T) b l x_0, \quad (13)$$

ahol $\tau(T) b l x_0$ a csúsztató feszültség munkáját jelenti az l hosszúságú diszlokációs szakasz mentén, amíg az a rögzítő hibáról leszakad. A (12) és (13) egyenletekből a folyáshatár hőmérsékletfüggésére:

$$\tau(T) = \tau_0 - \frac{kT}{b l x_0} \ln \left(\frac{A}{\dot{\epsilon}} \right) \quad (14)$$

adódik. Reális adatok felhasználásával (14)-ből az adódik, hogy a vakanciák rögzítő hatása ~ 200 K fölött megszűnik a leszakadás termikus aktiválása következtében.

A befagyasztás után a vakanciák kisebb-nagyobb csoportosulásokat hoznak létre, amelyekből a diszlokációk nehezebben tudnak elszakadni mint az egyes hibáktól. Divakanciák esetében figyelembe kell venni a tetragonális torzulásokból származó kölcsönhatási energiát, valamint az átvágási munkát. Kimura és Maddin szerint [15] a divakanciák egy kritikus hőmérséklet felett ($T_c \approx 100$ K) képesek „kibillenni” a diszlokáció csúszósíkjából és azzal párhuzamosan rendeződnek, ezáltal a diszlokáció nem metszi át őket.

4. LÉPCSŐKÉPZŐDÉS DISZLOKÁCIÓKON

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a vakanciák rögzítettek és a diszlokációk képesek leszakadni róluk. Elképzelhető azonban, hogy a diszlokációk magukkal viszik a vakanciákat, ha:

a) a hőmérséklet nagy és a vakanciák a diszlokációvonal mentén képesek mozogni,

b) a diszlokáció mozgása lassú a vakanciákról való leszakadáshoz.

Ilyen esetekben a kölcsönhatás eredményeként egyszerű diszlokációkon lépcsők, kiterjedt diszlokációkon pedig kiterjedt lépcsők keletkezhetnek. Egymást metsző mozgó diszlokációk további lépcsőképződést eredményeznek. Ha a mozgó diszlokáció környezetében összegyűlt vakanciák koncentrációja elér egy kritikus értéket, azok üreget alkotnak, majd az üreg ellapul és zárt diszlokációhurok alakul ki. Ez a hurok kölcsönhatásba lép az eredeti diszlokációval, és kiterjedt lépcső képződik.

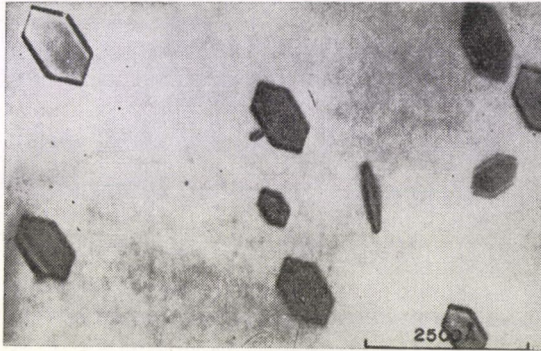
A lépcsőképződés akadályozza a diszlokáció mozgását, ami szintén szilárdságnövekedést okoz. Maddin és Cottrell szerint az éldiszlokáción keletkező lépcsők mozgatásához szükséges feszültség 0 K-en [2]:

$$\tau_L = \frac{E_m}{b^2 l}, \quad (15)$$

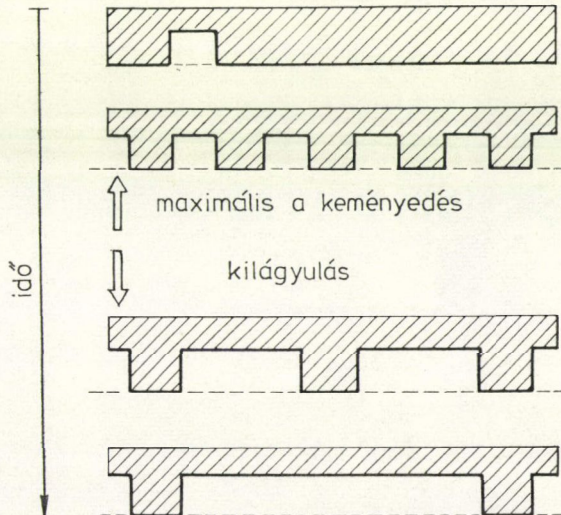
ahol E_m a diszlokációvonalon levő lépcsők mozgási aktiválási energiája, b a diszlokáció Burgers-vektora, l a lépcsők közötti távolság. Felületen centrált köbös fémekben befagyasztás után a jellemző értékek: $l \approx 10^{-8}$ m, $E_m \approx 0,2$ eV, $b \approx 3 \cdot 10^{-10}$ m.

A folyáshatár növekedés $\tau_L \approx 36$ MPa. Mivel a lépcsők mozgási aktiválási energiája viszonylag kicsi, ezért a folyamat termikusan aktiválható. Ezért a lépcsőképződés az édiszlokáción a folyáshatárban elsősorban alacsony hőmérsékleten jelentkezik.

A kiterjedt lépcsők hatását *Kimura* tárgyalta részletesen [3]. Az 1. ábrán látható keményedési folyamat úgy magyarázható, hogy a 900 °C feletti hőmérsékletéről történő befagyasztásnál vakanciakondenzációval rögzített diszlokációhurkok keletkeznek (5. ábra), amelyek stabil képződmények a további öregítéssel szemben. A diszlokációhurkok képződésének a sebessége a befagyasztott vakancia koncentrációval van kapcsolatban, amely magasabb hőmérsékletéről történő edzésnél nagyobb. Ezért a maximális keményedésig eltelt idő a növekvő befagyasztási hőmérséklettel csökken, a maximális keményedés mértéke pedig nő.



5. ábra. 600 °C-ról befagyasztott nagy tisztaságú Al-mintában megfigyelhető prizmatikus diszlokáció hurkok



6. ábra. Vakanciák beépülése a diszlokációvonalba

Ha az edzési hőmérséklet 850°C alatt van, a vakanciák eltűnése a diszlokációkon lépcsőképződés formájában történik. Ezt a folyamatot sematikusan a 6. ábrán tüntettük fel. Diffúzió útján egyre több vakancia épül be a diszlokációvonalba, egyre nő a lépcsők száma, ami a folyáshatár növekedését eredményezi. Egy idő után a vakanciák további lépcsőképző hatása már az anyag kilágyulásához vezet. Ezért ha a vakanciák száma egy bizonyos értéknél nagyobb, akkor a keményedés maximuma független a befagyasztási hőmérséklettől, feltéve, hogy a diszlokációk száma minden esetben azonos. A keményedés maximumáig eltelt idő viszont növekvő hőmérséklettel csökken.

5. DISZLOKÁCIÓHURKOKTÓL SZÁRMAZÓ KEMÉNYEDÉS

Diszlokációhurok és egyenes diszlokáció közötti rugalmas kölcsönhatást Kroupa és Hirsch vizsgálták azzal a feltevéssel, hogy a diszlokációhurok kör alakú (diszlokációgyűrű), a diszlokáció pedig egyenes, amely nem deformálódik a kölcsönhatás során a végtelen és izotrop mátrixban [12]. A számolásokból kiderült, hogy elegendő figyelembe venni a gyűrű hatását a mozgó diszlokáció csúszósíkjának egy R sugarú környezetében (R a diszlokációgyűrű sugara). Ebben a térrészben levő gyűrű által az egyenes diszlokációra kifejtett erő:

$$F = \frac{1}{8} \mu b^\circ b, \quad (16)$$

ahol μ a mátrix nyírási modulusza, b° a diszlokációgyűrű, b pedig az egyenes diszlokáció Burgers-vektora (7. ábra).

Jelölje l a szomszédos gyűrűk közötti távolságot a diszlokációvonal mentén. Ez a távolság függ a gyűrűk csúszósíkjai átlagos A távolságától, valamint a gyűrűk és a diszlokációvonal közötti E kölcsönhatási energiától [11]:

$$l \cong A \left(\frac{AT_L}{E} \right)^{1/3}. \quad (17)$$

Felhasználva, hogy $T_L \cong \frac{1}{2} \mu b^2$ és

$$E \cong \left(\frac{\mu b^2}{8} \right) R, \quad (18)$$

valamint

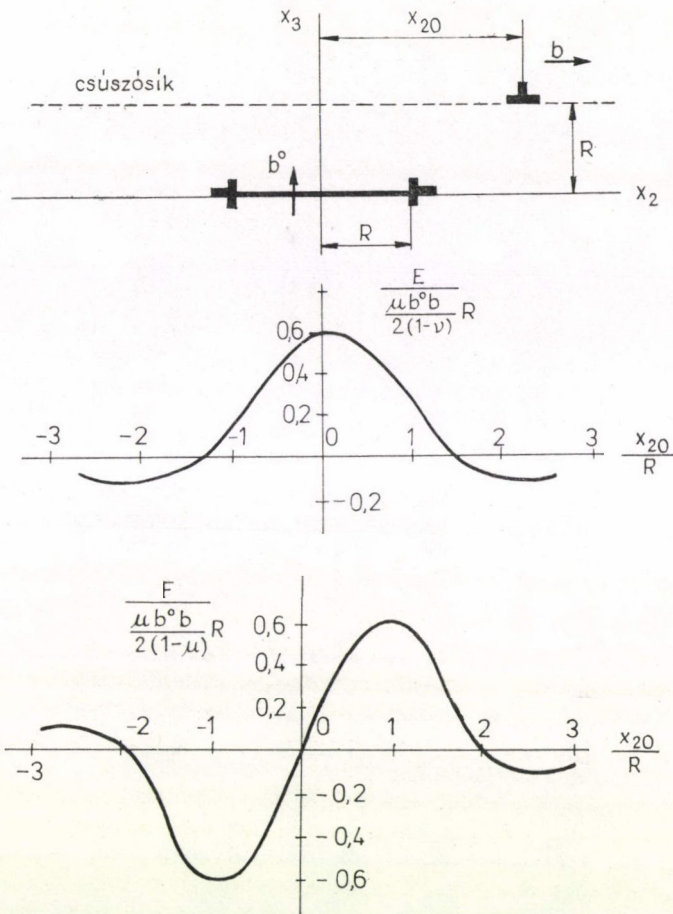
$$A = \frac{1}{\sqrt{2Rn}}, \quad (19)$$

ahol n a térfogategységben levő gyűrűk száma [12], adódik az

$$l \cong R^{-1} n^{-2/3} \quad (20)$$

összefüggés. Ezzel a τ_K csúsztató feszültség az

$$F = \tau_K b l \quad (21)$$



7. ábra. Éldiszlókáció és diszlókációgyűrű közötti erő és kölcsönhatási energia

egyenletből határozható meg, a (16) és (20) egyenletek felhasználásával:

$$\tau_K = \frac{1}{8} \mu b^\circ R n^{2/3}. \quad (22)$$

Ebből alumíniumra az $n \approx 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, $R \approx 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ adatokkal $\tau_K \approx 1,5 \text{ MPa}$ keménységnövekedés adódik, ami lényegesen kisebb a megfigyeltnél [2]. A diszlókáció és a gyűrűk közötti E kölcsönhatási energia igen nagy (ha $R \approx 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$, akkor $E \approx 25 \text{ eV}$), ezért a gyűrűktől származó keményedés hőmérsékletfüggése várhatóan kicsiny.

Fleischer aszimmetrikus rácstorzulásokból (tetragonális hibáktól) származó keményedési járulékokat vizsgált [9, 10]. A kis méretű diszlókációgyűrűk hatása ilyen

hibaként vehető számba (8. ábra). Számításai szerint az $\frac{1}{3}\langle 111 \rangle$ Burgers-vektorú gyűrű rugalmas terében egy diszlokáció mozgatásához szükséges feszültség a következő:

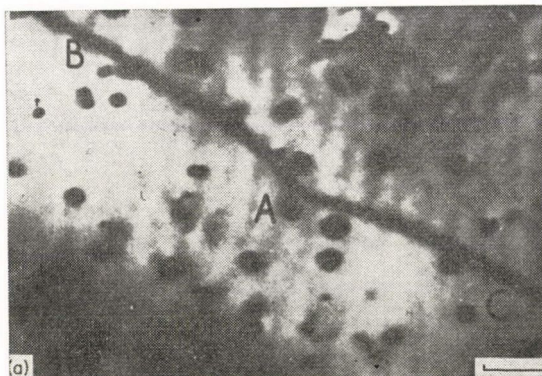
$$\tau_F = \frac{\mu b}{3A}, \quad (23)$$

ahol A a gyűrűk közötti átlagos távolság a csúszósíkokban. Ez az eredmény kb. egy nagyságrenddel nagyobb folyáshatár növekedést jelent mint a (22) alatti kifejezés.

A Fleischer modellből a folyáshatár hőmérsékletfüggésére a

$$\left(\frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0} \right)^{1/2} + \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1/2} = 1 \quad (24)$$

egyenlet adódik, ahol $\Delta\tau_0$ és $\Delta\tau$ a folyáshatár értéke 0 K-en, illetve T hőmérsékleten, T_0 pedig állandó. Alumíniumban Westmacott a diszlokációgyűrűktől származó keménységet ezzel az összefüggéssel értelmezte, és jó egyezést kapott [6].



8. ábra. Diszlokációhurok-diszlokációvonal kölcsönhatásához

A diszlokációhurok és diszlokációk között a rugalmas kölcsönhatáson kívül még számos további kölcsönhatás is felléphet, amelyek hatással vannak a keménységre. Ezek közül röviden áttekintjük az alábbi kettőt.

a) Érintkezési kölcsönhatás: mozgó diszlokációk és diszlokációhurok találkozásakor igen stabil képződmények jöhetnek létre, és a diszlokációnak a hurokról történő leválasztásához nagy aktiválási energia szükséges, ezért az ebből adódó keménység gyakorlatilag független a hőmérséklettől. Foreman részletes számolásokat végzett és az érintkezési kölcsönhatásból származó keménységre a

$$\tau_e = \frac{1}{4} \mu b (nd)^{1/2} \quad (25)$$

összefüggést kapta [14], ahol n a térfogategységben levő gyűrűk száma, d az átlagos átmérőjük. Ha $n \approx 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ és $d \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ m}$, akkor alumínium esetén $\tau_e \approx 11 \text{ MPa}$.

b) Diszlokációhurkok átmetszéséből adódó keményedés: a mozgó diszlokáció a kristályban átmetszheti a diszlokációhurkokat, ezáltal lépcsők, vagy kiterjedt diszlokációk képződnek. Ha az ehhez szükséges energia alacsony (néhány tized eV), akkor az átmetszésből adódó szilárdságnövekedés hőmérsékletfüggő és egy a (14)-hez hasonló egyenlettel írható le.

6. DISZLOKÁCIÓK KÖLCSÖNHATÁSA ÜREGEKKEL

Elektronmikroszkópos felvételek szerint befagyasztás után számos anyagban képződnek kisebb, nagyobb üregek. Ezek az üregek is akadályozzák a diszlokációk mozgását (9. ábra).

Coulomb azt találta, hogy a kristályban véletlenszerűen elhelyezkedő üregektől származó folyáshatár növekedés a hőmérséklet függvényében:

$$\tau_v = \frac{\mu b}{2\beta A} (1 - BT), \quad (26)$$

ahol μ a nyírási modulusz, b Burgers-vektor, A az üregek közötti átlagos távolság, β pedig egységnyi nagyságrendű állandó, amely függ az üregek sugarától [8]. *Coulomb* megmutatta, hogy ha az üregek sugara nagyobb mint b néhányszorosa, akkor B értéke elhanyagolható, azaz a keményedés független a hőmérséklettől.

Kroupa és *Hirsch* a diszlokációk és az üregek közötti rugalmas kölcsönhatási energiára az

$$E = \frac{1}{5} \mu b^2 R \quad (27)$$

összefüggést kapták, ahol R az üregek sugara [12]. Hasonló gondolatmenettel, mint ahogy a diszlokációhurkoktól származó keményedés tárgyalásánál történt, az üregektől származó folyáshatár növekedés:

$$\tau_v = \frac{\mu b}{10} R n^{2/3}. \quad (28)$$

A térfogategységben levő R sugarú üregek n száma kifejezhető a C vakanciakonzentrációval:

$$n = \frac{C}{4/3 R^3 \pi}, \quad (29)$$

amit visszahelyettesítve a (28)-as egyenletbe:

$$\tau_v \cong \frac{\mu b}{26} \frac{C^{2/3}}{R} \quad (30)$$



9. ábra. Zóna-finomított rézben keletkező üregek hatása a diszlokációk mozgására

adódik. Látható, hogy a keményedés fordítottan arányos a vakanciakondenzációval létrejött üregek sugarával. Túlságosan kisméretű üregekre viszont E kicsiny (ha $R \approx 4b$, akkor $E \approx 3$ eV), ezért a diszlokációk elszakadását az üregektől a hőmozgás elősegíti, így a (30) összefüggés szigorúan véve csak a $T=0$ K-en igaz.

IRODALOM

1. C. H. Li, J. Washburn and E. R. Parker, *Trans. AIME*, 197, 1223, 1953.
2. R. Maddin and A. H. Cottrell, *Phil. Mag.* 46, 735, 1955.
3. H. Kimura, R. Maddin and D. Kuhlmann—Wilsdorf, *Acta Met.* 7, 154, 1959.
4. N. Shiotani, H. Kimura, R. R. Hasiguti and R. Maddin, *Acta Met.* 15, 287, 1967.
5. R. M. J. Cotterill: *Lattice Defects in Quenched Metals*, Academic Press, New York, 1965. p. 97.
6. K. H. Westmacott, *Phil. Mag.* 14, 239, 1966.
7. P. G. Manu Mare and H. P. Leighly, *Acta Met.* 24, 1047, 1976.
8. P. Coulomb, *Acta Met.* 7, 556, 1959.
9. R. L. Fleischer, *Acta Met.* 10, 835, 1962.
10. R. L. Fleischer, *J. Appl. Phys.* 33, 3504, 1962.
11. J. Friedel, *Electron Microscopy and Strength of Crystals*, Wiley, New York, 1962. p. 605.
12. F. Kroupa and P. B. Hirsch, *Dislocations in Solids*, Faraday Soc., London, 1964. p. 49.
13. A. J. E. Foreman and M. J. Makin, *Phil. Mag.* 14, 911, 1966.
14. A. J. E. Foreman, *Phil. Mag.* 17, 353, 1968.
15. H. Kimura and R. Maddin, *Lattice Defects in Quenched Metals*, Academic Press, New York, 1965. p. 319.
16. H. Kimura and R. Maddin, *Quench Hardening in Metals*, North-Holland Publ. Co. Amsterdam, 1971.
17. Kovács I., *Magy. Fiz. Folyóirat*, 18, 1, 1970.
18. I. Kovács, *Archives of Mechanics*, 1981, megjelenés alatt.
19. Kovács I. és Zsoldos L., *Diszlokációk és képlékeny alakváltozás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.

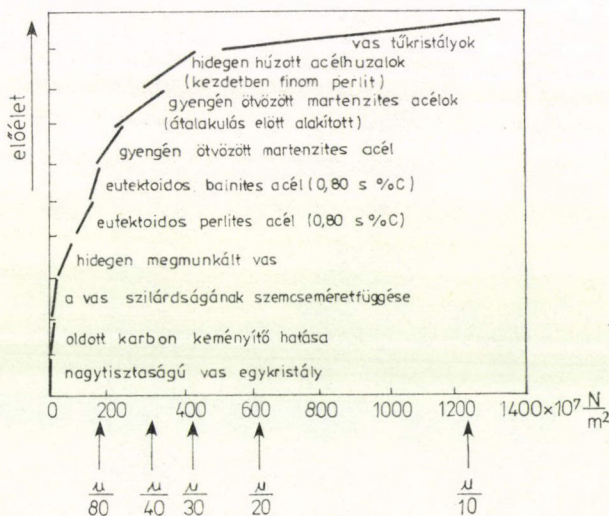
7. SZILÁRDOLDATOS KEMÉNYEDÉS

UNGÁR TAMÁS ÉS HONYEK GYULA

ELTE, Általános Fizika Tanszék

1. BEVEZETÉS

A fémek mechanikai tulajdonságai jelentősen megváltoznak idegen atomok hozzáadásával. Az ötvözők mennyiségének és eloszlásának függvényében az ötvözetek szilárdsági és képlékenységi paraméterei rendkívül széles skálán mozognak. Jól mutatja ezt az 1. ábra, amelyen a vas szakítószilárdsága látható a széntartalom mennyiségének és eloszlásának, valamint bizonyos esetekben az alakításnak a függvényében. Az ábrából leolvasható, hogy mind az ötvözés, mind az alakítás a szilárdság növekedését eredményezi.



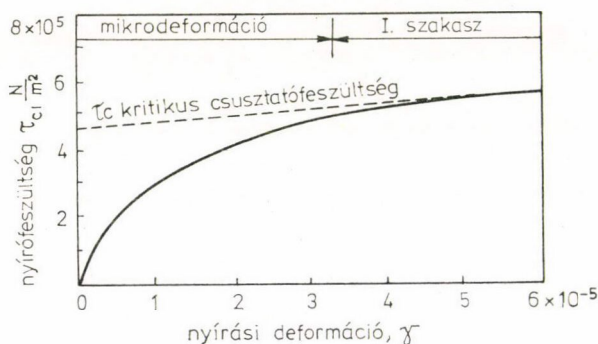
1. ábra. A vas szakítószilárdsága a széntartalom, valamint az alakítás függvényében

Ötvözetekből készült végtermék előállítás folyamatában szinte valamennyi kohászati eljárás első lépése a szilárdoldat állapot létrehozása. Az olvadáspontnál nem sokkal alacsonyabb hőmérsékleten végzett oldó hőkezelést általában gyors hűtés (edzés) követi, amelynek során rendszerint egy erősen túltelített szilárdoldat állapot jön létre. Bár a szilárdoldat állapotú fém már önmagában is általában kedvezőbb mechanikai sajátságokat mutat mint az ötvözetlen, tiszta fém, a mechanikai

tulajdonságok jelentős mértékben tovább javíthatók különböző nemesítő hőkezelések révén, melyek során a szilárdoldat túltelítettsége a második fázisú kiválások kialakulásával megszűnik. Az így kapott kiválásos ötvözetek keményedésével a 8. fejezet foglalkozik részletesen.

A szilárdoldatok szilárdságnövelő mechanizmusa két szempontból lényeges kérdés. Egyrészt még a sokkal hatékonyabb kiválásos keményedés esetén is a második fázisú részecskékkel mindig marad egyensúlyban bizonyos mennyiségű oldott atom, amelynek a fajlagos szilárdságnövelő hatása nem nagy ugyan a kiválásokhoz képest, de mégsem elhanyagolható. Másrészt a szilárdoldatok esetében a szilárdságnövelő mechanizmusok elemi lépése, azaz egy diszlokációnak a mozgását gátló akadályon való keresztülhaladása, illetve ebben az elemi aktusban a diszlokáció és az akadály kölcsönhatása szinte modellszerűen áll előttünk. Ez azt jelenti, hogy a szilárdoldatos keményedés mechanizmusának a pontos megértése, amitől még egyébként távol vagyunk, közelebb visz a szilárdságnövelő mechanizmusok megértéséhez általában is.

A szilárdoldatos keményedést jellemző legfontosabb mechanikai paraméter a τ_c kritikus csúsztatófeszültség, amelyet kísérletileg a nyírófeszültség — nyírási deformáció görbe I., lineáris szakaszának a feszültségtengelyre való extrapolálásával kaphatunk meg a 2. ábrán látható módon. A vizsgálatokat általában egykristályokon szokás végezni, mivel ekkor nincsenek szemcsehatár, ill. szemcseméret effektusok, amelyeknek a szilárdságnövelő hatása összemérhető a szilárdoldatos keményedéssel. Amikor a csúsztatófeszültség a τ_c kritikus értéket eléri, az anyagban képlékeny alakváltozás indul meg, mert ekkor a diszlokációk viszonylag nagy távolságokra elmozoghatnak. A szilárdoldatos keményedés elméletének feladata az, hogy modellek segítségével meghatározza τ_c függését a hőmérséklettől, az ötvözőanyag koncentrációjától, eloszlásától, valamint a szennyező-diszlokáció kölcsönhatási erő természetétől.



2. ábra. A kritikus csúsztatófeszültség meghatározása a nyírófeszültség-nyírási deformáció görbe alapján

A szilárdságnövelő mechanizmusok vizsgálata minden esetben valamilyen diszlokáció-akadály kölcsönhatás elemzéséből áll. Jelen esetben ezek az akadályok az oldott ötvöző atomok. Az oldott atomok az alpmátrix rácspontjaihoz képesti elhelyezkedésük szerint lehetnek helyettesítéses, vagy atomközi (intersticiós) helyeken. Egy-máshoz képesti elhelyezkedésük alapján pedig eloszlásuk lehet véletlenszerű vagy rendezett.

A diszlokáció-oldott atom kölcsönhatás vizsgálható a mozgékonyság szempontjából is. Súrlódásos esetről beszélünk akkor, ha a diszlokációk mozgékonyak, míg az oldott atomok nem mozognak. Ilyenkor az oldott atomok környezetében levő feszültségtér fékezi a diszlokációk mozgását. Bizonyos esetekben a külső feszültség hatására meginduló diszlokációk maguk köré gyűjtik az ötvöző atomokat, amelyekkel mozgásuk során találkoznak, és amikor ez az oldott atomokból álló „felhő” már elegendően kiterjedt, akkor teljesen megakadályozza a diszlokáció további mozgását. Ez az úgynevezett blokkolás jelensége.

A diszlokációk és az oldott atomok között mindig van vonzó kölcsönhatás. Ugyanis, ha az oldott atomok mérete nagyobb az alapmátrix atomjainak méreténél, akkor az ötvözők a diszlokációk dilatált zónájában gyűlnek össze, míg ha az oldott atomok mérete kisebb, akkor a diszlokációk komprimált tartománya felé törekszenek. A mozgás közbeni blokkolás feltétele az, hogy az ötvöző atomok diffúziója elég nagy legyen ahhoz, hogy követni tudják a diszlokáció mozgását. A hőmérséklet csökkenésével előfordulhat, hogy az oldott atomok mozgékonyasága annyira lecsökken, hogy azok befagynak. Ebben az esetben egy megfelelő külső feszültség elérése után a diszlokációk kiszabadulhatnak a szennyezőfelhőből és így az anyag képlékenysége nagymértékben megnövekszik.

Amikor mind a diszlokációk, mind az oldott atomok mozgékonyak, fellép az úgynevezett Portevin-Le Chatelier effektus. A diszlokáció a mozgása során egy kritikus sebességet elérve kiszabadul az oldott atomok „felhőjéből” és mozgása szabaddá válik. A felgyorsult diszlokáció mozgása azonban az alakítási keményedés miatt lefékeződik és ezáltal az oldott atomok ismét utolérlik a diszlokációt és a folyamat kezdődik elől-ről. A diszlokációmozgásnak ez az instabilitása a feszültség-deformáció görbe adott szakaszának szaggatottságában nyilvánul meg.

A további fejezetekben áttekintjük a felületcentrált köbös (fcc) és a tércentrált köbös (bcc) fémek szilárdoldatos keményedésére vonatkozó kísérleti és elméleti eredményeket.

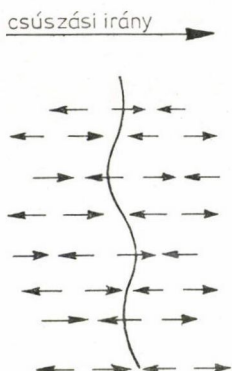
2. SZILÁRDOLDATOS KEMÉNYEDÉS FCC FÉMEKBEN

A szilárdoldatos keményedéssel kapcsolatos elméleti vizsgálatok több mint három évtizedes múltra tekintenek vissza. *Mott* és *Nabarro* ma már klasszikusnak számító műveit [1] számos kísérleti és további elméleti munka követte [2–17], amelyeknek alapján most már kirajzolódnak a jelenség lényeges vonásai.

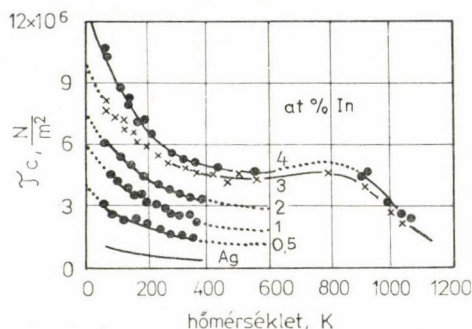
A szilárdoldatos keményedés mechanizmusára vonatkozóan kezdetben két alapvető elképzelés alakult ki. Az egyik szerint a diszlokációk mozgását akadályozó oldott atomok külön-külön, egyenként lépnek kölcsönhatásba a mozgó diszlokációval és mint pontszerű, elszigetelt akadályok fejtik ki a hatásukat. Ennek a modellnek a részletes kidolgozása *Fleischer* [3] és *Friedel* [4] nevéhez fűződik. A másik elképzelés szerint egy-egy diszlokáció a körülötte statisztikusan elhelyezkedő ötvöző atomok hosszú hatótávolságú feszültségterében van elhelyezve. A diszlokációt véletlenszerűen körülvevő szennyező atomok feszültségtere a diszlokáció két oldalán egymással ellentétes irányú erőket fejt ki. Ha a kristályra külső erő nem hat, akkor ezek az erők kiegyenlítik egymást és a diszlokáció egyensúlyban van. Jól látható ez a 3. ábrán. Külső feszültség hatására a diszlokáció kimozdul ezen lokálisan stabil egyensúlyi helyzetből és így a szennyezők által a diszlokációra ható erők eredője most már ellen-

tétes lesz a külső erőkből származó csúsztató feszültséggel, ami a diszlokációmozgás akadályozását eredményezi. A diszlokáció-szennyező kölcsönhatásnak ezt a mechanizmust elsőként Mott és Nabarro dolgozták ki [1], amit a későbbiekben számos szerző jelentős mértékben továbbfejlesztett [8, 10, 15, 16.].

Az említett két modell alapkérdése az, hogy miként függ a szilárdoldat τ_c kritikus csúsztatófeszültsége az oldott atomok koncentrációjától. Egyik modell sem tűzi ki célul azonban, hogy a τ_c hőmérsékletfüggéséről is számot adjon.



3. ábra. A diszlokációvonal mentén elhelyezkedő oldott atomokból származó erők kiegyenlítik egymást a diszlokáció csúszósíkjában, ha a kristályra külső erő nem hat.



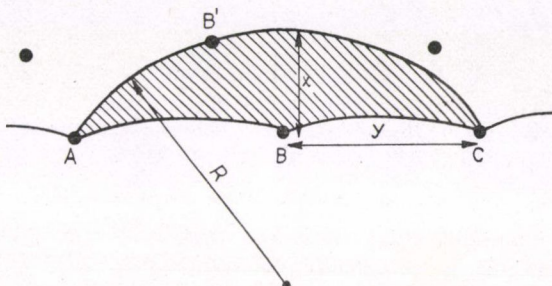
4. ábra. Ag—In ötvözetek kritikus csúsztatófeszültsége a hőmérséklet függvényében

A kritikus csúsztató feszültség szennyező koncentrációtól és hőmérséklettől való függésére a 4. ábrán láthatunk példát Ag—In egykristályokon végzett vizsgálatok alapján [18]. Az ábrából kitűnik, hogy alacsony hőmérsékleteken τ_c erőteljesen csökken adott szennyező tartalom mellett, ugyanakkor egy bizonyos hőmérséklet fölött, amit általában τ_p plato hőmérsékletnek szokás nevezni, τ_c a hőmérséklettől függetlené válik és csak az oldott atom koncentrációval növekszik. Az ábrán az is látható, hogy az olvadásponthoz közeledve τ ismét jelentősen csökken adott szennyező tartalom mellett. Ezzel a jelenséggel azonban nem kívánunk foglalkozni.

A kritikus csúsztató feszültség koncentráció függésének korai vizsgálatait, általában a T_p vagy ennél nagyobb hőmérsékletre vonatkoznak. Feltham [7, 13], valamint Butt és Feltham [17] voltak az elsők, akik rámutattak arra, hogy τ hőmérséklet és koncentráció függése csak egy olyan egységes termodinamikai modellel írható le, amelyben expliciten szerepel a diszlokáció szennyező atom kölcsönhatási energia. Elméleti vizsgálataikat Basinski és munkatársai [12], valamint Basinski [14] igen széles körű kísérleti vizsgálatainak eredményeire alkalmazták.

2.1. A szennyező-diszlokáció kölcsönhatás Friedel modellje [4]

Igen kis ötvözőtartalom esetén a szennyezők átlagos távolsága olyan nagy lehet, hogy a diszlokációvonal kicsiny hajlatok révén követi az egyes szennyezőket, amelyekkel közvetlen érintkezésbe kerülve a diszlokációra rögzítő hatást gyakorolnak. Az 5. ábrán a kezdetben az ABC szennyezőkhöz rögzített diszlokáció a külső erő hatására leszakad a B atomról és továbbhalad a B' atomig. Feltesszük, hogy ebben az elemi



5. ábra. A diszlokációmozgás elemi lépése a Friedel modell esetén

lépésben az A -tól balra, illetve a C -től jobbra fekvő diszlokáció szakaszok nem mozognak. R -rel jelölve az $AB'C$ ív görbületi sugarát és y -nal a diszlokáció mentén fekvő szennyező atomok átlagos távolságát felírhatjuk az alábbi geometriai összefüggést:

$$2xR \cong y^2, \quad (1)$$

amely megadja a diszlokáció előrehaladásának x távolságát.

Legyen a diszlokáció vonalmenti feszültsége E , ami jó közelítéssel $1/2 Gb^2$, ahol G a nyírási modulusz [19], továbbá b a Burgers-vektor és c a szennyezők koncentrációja, akkor a diszlokációra ható csúsztató feszültség:

$$\tau = \frac{E}{Rb}. \quad (2)$$

Tegyük fel továbbá, hogy a diszlokáció által súrolt terület egy-egy elmozdulás során átlagosan az egy szennyező atomra jutó átlagos területtel egyenlő. Ezt Friedel-féle feltételnek nevezzük. Ezzel

$$xy \cong \frac{b^2}{c}. \quad (3)$$

Az (1)–(3) egyenleteket összevetve a szennyezők átlagos távolsága és a diszlokációra ható nyíró feszültség között az alábbi összefüggés adódik:

$$y = \left(\frac{2Eb}{c\tau} \right)^{1/3}. \quad (4)$$

Tételezzük fel, hogy a τ nyíró feszültséggel megfeszített diszlokációt csak a rögzítő szennyező atom tartja vissza. Ekkor a diszlokáció a szennyező atomra f erőt gyakorol, ami a következőképpen adható meg:

$$f = \tau b y. \quad (5)$$

A diszlokáció leszakadásának pillanatában legyen $f = f_0 = \tau_c b y$. Az (5) egyenletet ezzel a feltétellel (4)-be helyettesítve megkapjuk az oldott atomok által a tiszta mátrixhoz képest okozott többlet kritikus csúsztató feszültséget:

$$\tau_c = \frac{f_0^{2/3}}{b^2 (2E)^{1/2}} c^{1/2}. \quad (6)$$

Kissé eltérő megfontolások alapján teljesen azonos eredményre jutott *Fleischer* is [20].

A (6) egyenlet azt jelenti, hogy a plato hőmérsékleten a kritikus csúsztató feszültség az oldott atom koncentráció $1/2$ -ik hatványával arányosan növekszik, amennyiben az f_0 szennyező-diszlokáció kölcsönhatási erő nem függ c -től. Ez az utóbbi feltevés azonban a kísérletek tanúsága szerint nem mindig teljesül [3, 9].

2.2. Az oldott atomok és a diszlokáció közötti kölcsönhatási erő természete

A diszlokáció és a mozgását akadályozó szennyező atomok közötti kölcsönhatást a lehetséges kölcsönhatási mechanizmusoknak megfelelően a következő paraméterekkel jellemezhetjük.

a) Az oldott atomok mérete általában eltér a mátrix atomjainak méretétől. Ez a hatás a rácsparaméter, ill. a b Burgers-vektor koncentrációfüggésével az alábbi mennyiséggel vehető figyelembe [2, 3]:

$$\delta = \frac{1}{b} \left(\frac{db}{dc} \right). \quad (7)$$

b) Az oldott atomok megváltoztatják az anyag G nyírási modulusát is. Ezt a következőképpen vehetjük figyelembe [2, 3]:

$$\eta = \frac{1}{G} \left(\frac{dG}{dc} \right). \quad (8)$$

A méret és modulusz hatásokat figyelembe véve *Fleischer* [3] a következő félempirikus kifejezést adta meg a τ_p , plato feszültség koncentráció és kölcsönhatási erő függésére:

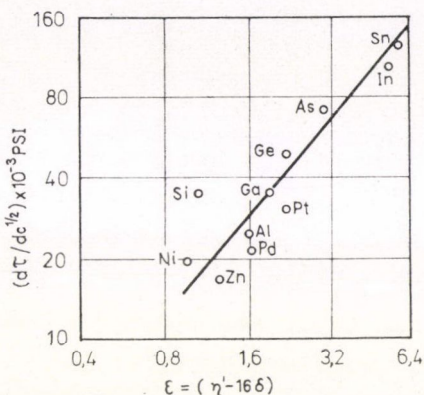
$$\tau_p = \frac{G}{Z} \varepsilon^{3/2} c^{1/2} + \tau_{00}, \quad (9)$$

ahol

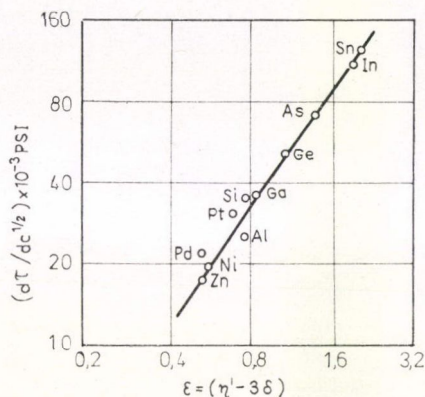
$$\varepsilon = |\eta' - \alpha\delta|, \quad \eta' = \eta/(1 + |\eta|/2), \quad Z = 760, \quad \alpha = 3$$

csavar diszlokációk és ± 16 éldiszlokációk esetén, végül τ_{00} a tiszta mátrix kritikus csúsztatófeszültsége.

Cu alapú egykristály ötvözeteken végzett nagy számú vizsgálat eredményei alapján a (9) kifejezés elemzése a 6. és 7. ábrán látható. A 6. ábra $d\tau/d\sqrt{c}$ változását mutatja az ε kölcsönhatási paraméter függvényében azzal a feltevessel, hogy a szilárdság növekedést éldiszlokációk okozzák, tehát $\alpha = \pm 16$ mellett. Az ábrából látható, hogy a mérési-pontok több-kevesebb szórással egy egyenes mentén fekszenek. Az ábrázolás log-log léptékben történt és az egyenes meredeksége a (9) kifejezéssel összhangban $3/2$.



6. ábra. Cu alapú ötvözeteken mért kritikus csúsztatófeszültség-koncentráció összefüggések egybevetése a Fleischer modellel éldiszlokáció kölcsönhatást feltételezve



7. ábra. Cu alapú ötvözeteken mért kritikus csúsztatófeszültség-koncentráció összefüggések egybevetése a Fleischer modellel csavardiszlokáció kölcsönhatást feltételezve.

A kísérlet és a modell lényegesen jobb egyezését mutatja a 7. ábra. Ebben az esetben α értéke 3 a csavar diszlokációknak megfelelően. Az ugyancsak log-log ábrázolásból az egyenes meredeksége ismét $3/2$, a (9) egyenlettel egyezésben. A 6. és 7. ábra eredményeinek összevetéséből Fleischer arra a következtetésre jutott, hogy a szilárdoldatos keményedésben a csavar diszlokációknak lényegesebb szerepe van, mint az éldiszlokációknak. Ez a következtetés azonban fizikailag azonnal kétségessé válik, ha tekintetbe vesszük azt a tényt, hogy az éldiszlokáció-szennyező kölcsönhatás általában sokkal jelentősebb a csavardiszlokáció-szennyező kölcsönhatásnál [19]. Más, pl. nióbium [21], ezüst [6], ólom [22], arany [9], magnézium [23] és tantál [24] alapú ötvözetrendszeren végzett vizsgálatok sem támasztják alá a (9) kifejezésben szereplő kölcsönhatás függést.

Mind a Friedel-modell, amelynek eredményét a (6) egyenlet fejezi ki, mind a Fleischertől származó továbbfejlesztése ((9) egyenlet) a diszlokációnak egyetlen elszigetelt szennyezőről való leszakadását tekinti a szilárdoldatos keményedés elemi aktusának. Ez biztosan jó az egészen híg oldatok esetében, de ha a szennyező koncentráció már olyan nagy, hogy a diszlokációvonal már nem érintheti a diszlokáció mentén elhelyezkedő valamennyi szennyezőt, akkor figyelembe kell venni a sok szennyező diszlokáció kölcsönhatást.

A kiválasztott keményedés kísérleti tapasztalatai alapján tudjuk [25] (8. fejezet), hogy ha a kiválasztott diszperzitása eléri a $10^{17} - 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ értéket, akkor még inko-

herens, kemény részecskék esetén sem képes az Orowan mechanizmus működni, mert a diszlokációnak nagyon kis ívben kellene kihajlani, ami óriási vonalmenti feszültségeket eredményezne. Ilyenkor, ha a részecske átvágása nem lehetséges, a diszlokáció keresztcsúszással megkerüli a részecskét, ezzel is csökkentve a görbültségét. A fenti részecske sűrűségek 1, ill. 10 ppm koncentrációnak felelnek meg, ami a szilárd oldatok esetében extrém híg oldatot jelent.

2.3. Sok szennyező diszlokáció kölcsönhatás

Eltételezve az extrém híg oldatok esetétől, a diszlokáció nem érintheti a vonala mentén elhelyezkedő összes szennyező atomot. Az oldott atomok, elsősorban a méret hatásukból származó hosszú hatótávolságú feszültségtéren keresztül erőt fejtenek ki a közelükben fekvő diszlokációra. Mint ezt a bevezetőben említettük, az egyes atomoktól származó erőkomponensek kiegyenlítődnek a diszlokáció mentén, ha külső feszültség nem hat a kristályra, amint ez a 3. ábrán látható. Külső erő hatására azonban a diszlokáció kimozdul az egyensúlyi helyzetéből, ezért egy eredő visszatérítő erő jelenik meg. Az ebből eredő folyáshatár növekedést *Mott és Nabarro* [1, 2] a következő egyszerű megfontolások alapján határozták meg.

Tételezzük fel, hogy a diszlokáció mentén az egyes szennyezőktől τ_i amplitúdóval és λ hullámhosszúsággal váltakozó nagyságú csúsztató feszültség hat. τ_i előjele véletlenszerűen változik, az átlaga tehát zérus, λ pedig az oldott atomok átlagos térbeli távolsága: $\lambda = bc^{-1/3}$. Külső erő hatására a diszlokációmozgás elemi lépése a következő. A mozgó diszlokációvonal egy $L \gg \lambda$ szakasza egyszerre kihajlik és kiszakad L/λ számú szennyező atom rögzítő hatásából. Eközben a mozgó szakasztól jobbra, ill. balra fekvő diszlokáció szakaszok mozdulatlanok maradnak. Formailag ez a diszlokáció mozgás nagyon hasonló a Friedel modellhez, csak míg az utóbbiban a diszlokációnak egy L hosszúságú szakasza egyetlen szennyezőről szakadt le, most egy ugyanilyen szakasz egyszerre sok szennyezőt hagy maga mögött.

Minden egyes szennyező $\tau_i b \lambda$ erőt gyakorol a diszlokációra, csak ezek véletlenszerű különböző előjelűek. A diszlokáció L hosszúságú mozgó szakaszára $\tau_i b \lambda (L/\lambda)^{1/2}$ eredő erő hat [2]. A folyás akkor következik be, amikor a $\tau_p b L$ külső erő ezzel meg-egyezik, ahol τ_p a kritikus csúsztató feszültség, amire a következő kifejezés adódik:

$$\tau_p = \tau_i (\lambda/L)^{1/2}. \quad (10)$$

Mott és Nabarro [2] τ_i értékét az egyetlen szennyező atom által a diszlokációra kifejtett nyíró feszültség térbeli átlagából határozták meg, a következő kifejezés alapján:

$$\tau_i = \frac{\int_{b|\lambda}^{\lambda} (G\delta/r^3) 4\pi r^2 dr}{\int_b^{\lambda} 4\pi r^2 dr} \cong -G\delta c \ln c, \quad (11)$$

ahol δ a (7)-ben definiált méretfaktor és az integrálást a b -vel egyenlőnek választott levágási sugártól kell elvégezni.

Figyelembe véve a diszlokáció görbületi sugara és vonalmenti feszültsége közötti (2) összefüggést, τ_p a következő lesz:

$$\tau_p = G\delta^2 c^{5/3} (\ln c)^2. \quad (12)$$

Ez a kifejezés, bár igen körültekintő elméleti megfontolás eredményeként adódott, a kísérletekkel messzemenően nincs összhangban.

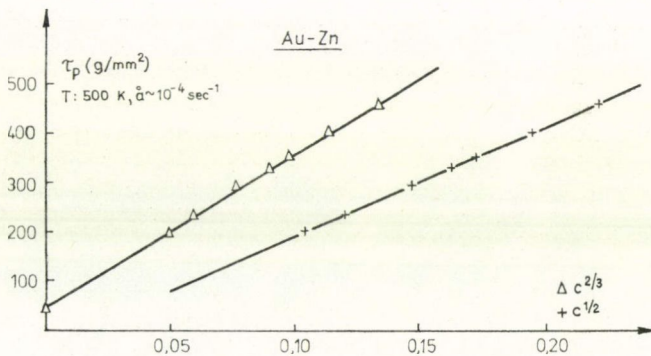
Számos próbálkozás történt a kísérletek és a (12) kifejezés közötti ellentmondás megszüntetésére [8, 16], amelyek közül a legeredményesebb és fizikailag legkézenfekvőbb Labuschtól [10] származik, aki a Mott és Nabarro-modell minden lényeges elemét megtartva, pontosabb átlagolási eljárással a folyáshatár növekedésre a következő eredményt kapta:

$$\tau_p = \frac{G}{Z^*} \varepsilon^{4/3} c^{2/3} + \tau_{00}, \quad (13)$$

ahol Z^* értéke kb. 550, ε és τ_{00} jelentése pedig ugyanaz mint (9)-ben.

2.4. Az egyes modellek összevetése a kísérleti eredményekkel

Jax, Kratochvil és Haasen nagyszámú irodalmi és saját mérés alapján megvizsgálták a szilárdoldatos keményedést 17 különböző Cu, Ag és Au alapú ötvözetben [9]. A kísérleti eredményeket összevetették mind a (9), mind a (13) kifejezésekkel. Mindkét esetben részletesen elemezték egyrészt a plato feszültség koncentrációfüggését, másrészt a szennyező atom diszlokáció kölcsönhatás természetét.



8. ábra. Au—Zn ötvözetek kritikus csúsztatófeszültsége a Zn koncentráció 1/2, ill. 2/3-os hatványának függvényében

τ_p koncentrációfüggésére jellemző példa látható a 8. ábrán. Az ábra Au alapú, Au—Zn ötvözet 500 °C-on, 10^{-4} sec^{-1} kompressziós sebesség mellett meghatározott plato feszültségét mutatja a Zn tartalom 1/2, ill. 2/3-os hatványának függvényében. Látható, hogy bár a mérési pontok mindkét esetben jól illeszkednek egy-egy egyeneshez, a 2/3-os koncentrációfüggés elvi szempontból határozottan jobb, mint az 1/2-es, mivel az egyenes tengelymetszete $c=0$ mellett a 2/3 hatványkitevőnél jól adja meg τ_{00} értékét. Az ábrából kitűnik, hogy az 1/2-es kitevő esetén τ_{00} negatívnak adódna,

ami nyilvánvaló ellentmondás. Au—Cd, Au—In és Au—Ga ötvözeteken ugyanez az ábrázolás hasonló módon azt mutatta, hogy az $1/2$ -es kitevő mellett τ_{00} értéke túl alacsonynak adódik, szemben azzal, hogy a $2/3$ -os kitevővel a $c=0$ -hoz extrapolált τ_p jól megegyezik a valódi τ_{00} -al.

Ezek a vizsgálatok tehát azt mutatják, hogy a $2/3$ -os hatványkitevő jobban írja le a szilárdoldatos keményedést, mint az $1/2$ -es. Ez azt jelenti, hogy az oldott atomok által mozgásában akadályozott diszlokáció egy-egy elemi lépés során nem egyes, elszigetelt szennyezőkről szakad le, hanem egyszerre nagyszámú szennyező feszültségteréből szakad ki, hogy aztán ismét sok szennyező együttes feszültségterével kölcsönhatásba kerülve újra elakadjon.

A következő kérdés a szennyező-diszlokáció kölcsönhatás természetének, vagyis a (9) és (13) egyenletekben az ε paraméternek a kísérletekkel való összevetése.

Számos korábbi vizsgálat azt mutatta, hogy a diszlokáció-szennyező kölcsönhatásban mind a mérethatásnak, mind a moduluszhatásnak lényeges szerepe van [3, 26, 27]. Elsősorban *Fleischer* [3] korábbi vizsgálatait továbbfejlesztve, *Jax*, *Kratochvil és Haasen* [9] az ε kölcsönhatási paramétert a következő, két különböző módon adták meg:

$$\varepsilon_0 = |\eta'| + \alpha|\delta| \quad (14)$$

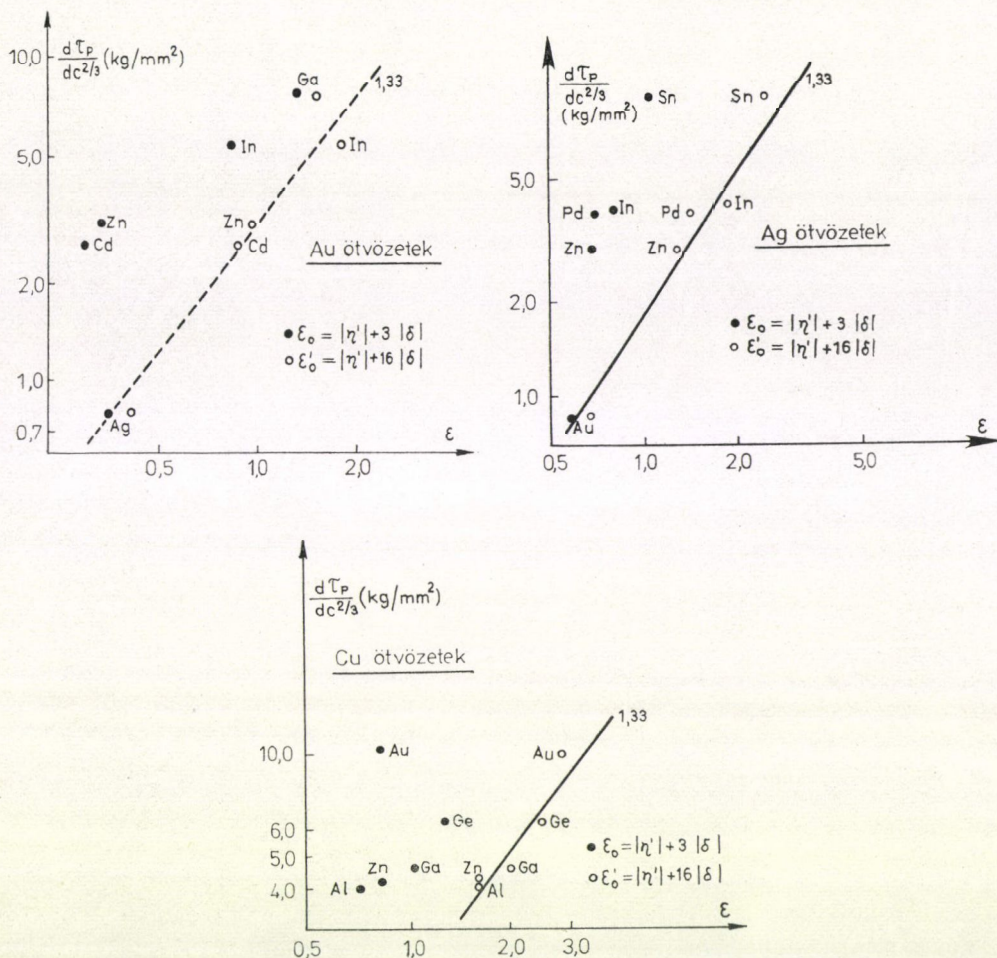
$$\varepsilon_1 = (|\eta' + 16\delta| + |\eta' - 16\delta|)/2. \quad (15)$$

A δ , η , η' és α paraméterek definíciója azonos a (7), (8) és (9) kifejezésekben megadottakkal.

A 2.2. pontban láttuk, hogy *Fleischer* [3] Cu ötvözeteken végzett vizsgálatait az általa bevezetett ε paraméter esetén ((9) egyenlet) jobban illeszkedtek $\alpha=3$ értéke mellett, mint $\alpha=16$ esetén. Ez indokolja a (14) és különösen a (15)-ben felírt kölcsönhatási paraméterek bevezetését. Nem lehet fizikai realitása ugyanis egy olyan kölcsönhatási paraméternek, amely csak a csavardiszlokációk és szennyezők közötti kölcsönhatás esetén működik jól.

Éldiszlokáció szennyező atom kölcsönhatás esetén felvetődik az az elvi kérdés, hogy a csúszósík különböző oldalán fekvő szennyezők ellentétes előjelű misfit feszültségteréből származó erőket milyen átlagolással kell figyelembe venni a kölcsönhatási paraméterben. Egy éldiszlokáció ellentétes oldalán elhelyezkedő szennyező atom által kifejtett maximális kölcsönhatási erő $|\eta' - 16\delta|$, ill. $|\eta' + 16\delta|$ -val arányos. Amennyiben $|\eta'|$ és $16|\delta|$ értékei nem különböznek egymástól jelentősen, úgy a (14)-ben felírt ε_0 paraméter $\alpha=16$ mellett jól adja meg a kölcsönhatást és a szennyező koncentrációt a névleges érték felének lehet venni. Abban az esetben azonban, ha $|\eta'| \gg 16|\delta|$, vagy $16|\delta| \gg |\eta'|$, az éldiszlokáció komprimált, ill. dilatált zónájában elhelyezkedő szennyezők hatását valamilyen átlagolással lehet figyelembe venni, ami a legegyszerűbben a számtani középvel tehető meg. Így jön létre az ε_1 paraméter.

Az ε_0 paraméterrel elvileg még az is megvizsgálható, hogy a csavardiszlokációknak lehet-e szerepe a szilárdoldatos keményedésben. A 9. ábra $d\tau_p/dc^{2/3}$ változását mutatja ε_0 függvényében $\alpha=3$, ill. 16 esetén, nagyszámú Au, Ag és Cu alapú ötvözet esetében. A log-log ábrázolás alapján a mérési pontokhoz illesztett egyenesekből még ε hatványkitevője is meghatározható. Az ábrából kitűnik, hogy a csavardiszlokációknak megfelelő kölcsönhatási paraméterrel számolt mérési pontok meglehetősen statisztikusan helyezkednek el az ábrán, ugyanakkor az éldiszlokációkkal számolt pontok a mérési hibán belül igen jól fekszenek egy-egy $3/4$ hatványkitevőnek megfelelő merekségű egyenes mentén.

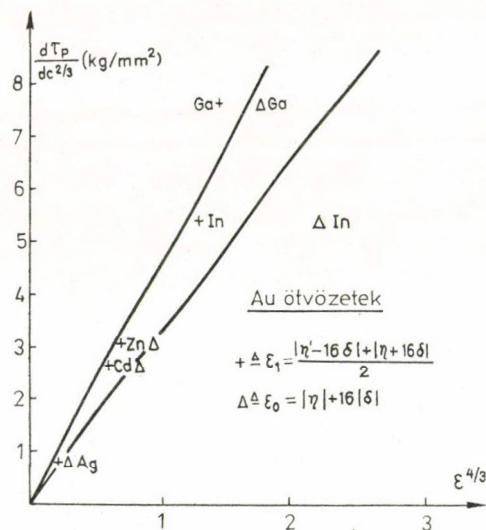


9. ábra. Au, Ag és Cu alapú ötvözeteken mért $d\tau_p/dc^{2/3}$ értékek változása az ε_0 paraméter függvényében csavardiszlókációk ($\alpha=3$) és éldiszlókációk ($\alpha=16$) esetén

Végül Jax és munkatársai [9] megvizsgálták az éldiszlókációkkal számolt ε_0 és az átlagolással nyert ε_1 paraméterek közötti különbséget. A 10. ábra $d\tau_p/c^{2/3}$ változását mutatja ε_1 , ill. ε_0 4/3-ik hatványának függvényében, Au alapú ötvözetek esetében. Látható, hogy ε mindkét definíciója mellett a mérési eredmények viszonylag jól illeszkednek egy-egy egyeneshez, az ábra szerint talán az ε_1 -hez tartozó pontoknak az egyenestől való eltérése kisebb.

Az eddigiek alapján azt mondhatjuk tehát, hogy a szilárdoldatos keményedés a plato hőmérsékleten, fck fémekben úgy megy végbe, hogy a diszlókáció mozgását egy-egy elemi lépés során sok szennyező kollektív módon akadályozza, továbbá, hogy a keményedésben az éldiszlókációk játszik a döntő szerepet és a diszlókáció-szennyező kölcsönhatásban a méret és modulusz hatások együttesen lépnek fel.

Felvetődik az a kérdés, hogy a diszlokáció mozgás elemi lépésében a mozgást akadályozó szennyező atomok száma, és így az akadályozó hatás mechanizmusa nem változik-e az ötvözet koncentrációjával. Kézenfekvő ugyanis, hogy extrém híg szilárd



10. ábra. Au alapú ötvözeteken mért $d\tau_p/dc^{2/3}$ értékek változása az ε_1 , ill. az ε_0 paraméterek $4/3$ -ik hatványának függvényében

oldatok esetében mégiscsak egy-egy szennyező elszigetelten tartja vissza a mozgó diszlokációt, úgy ahogy azt a Friedel—Fleischer modellben láttuk. Ezen kérdés elméleti megoldását tűzte ki célul Nabarro [15], aki a diszlokáció-szennyező kölcsönhatás természetét vizsgálva megmutatta, hogy a külső feszültség hatására kihajló diszlokáció szakasz a szennyező atomok minőségétől és koncentrációjától függően különböző számú szennyező atommal lép egyszerre kölcsönhatásba. Ennek megfelelően természetesen a kihajló szakasz hossza is függ a szennyezők fajtájától és koncentrációjától. Vizsgálataink eredményeképpen határesetekként adódnak a (9), ill. (13) kifejezések, amelyek a Friedel—Fleischer, ill. a Mott—Nabarro—Labusch modelleknek megfelelő folyáshatár értékek. A Nabarro elmélet alapvető megfontolásait a következő pontban tekintjük át.

2.5. A szennyező-diszlokáció kölcsönhatás elmélete [15]

Legyen a diszlokáció csúszósíkjában elhelyezkedő akadályok (egyes idegen atomok, vagy atomcsoportok) koncentrációja c . Egy akadálnak a diszlokációra ható feszültségterét modellezzük egy U_0 mélységű potenciálvölgygel, amely négy egymásba simuló parabolaívából áll. Az $f(y)$ erőfüggvény akkor a 11. ábrán látható módon négy egyenes szakaszból áll, ahol a középső kettő egymás folytatása. Az akadály az $y=0$ pontban helyezkedik el. A diszlokációvonal az y irányban halad és maga a diszlokációvonal merőleges az ábra síkjára. Az akadály potenciálterének hatótávolságát jelöljük $2w$ -vel, tehát az akadály csak a $-2w < y < 2w$ tartományon belül elhelyezkedő diszlokációval lép kölcsönhatásba.

Könnyen belátható, hogy az egymástól L_0 átlagos távolságra elhelyezkedő akadályok, ezek koncentrációja és w között az alábbi összefüggés áll fenn [15]:

$$2L_0cw = 1. \quad (16)$$

A külső feszültség hatására kihajló és δy -nal előremozduló diszlokációra a mozgás irányába $f_m\delta y/w$, míg az ellenkező irányban $2E\delta y/L_0 = 4cwE\delta y$ nagyságú erők hatnak, ahol f_m a szennyező által a diszlokációra gyakorolt erő maximuma. A diszlokáció addig van stabil helyzetben, amíg $4cwE\delta y > f_m\delta y/w$.

Jelöljük a 11. ábrán az ábra síkjára merőleges irányt z -vel. y és z együttesen határozzák meg a diszlokáció csúszósíkját és az akadály helykoordinátái legyenek $(0,0)$. Jelöljük a diszlokációnak a z irányban az akadálytól távolosó részeinek y koordinátáját y_0 -lal. Ha a diszlokáció a $z=0$ pontban is távol fekszik az akadálytól, tehát $y_0 < -2w$ (feltételezzük ugyanis, hogy a diszlokációvonal egyenes és párhuzamos a z tengellyel), akkor nincs kölcsönhatás az akadály és a diszlokáció között. A 11. ábrán ilyen helyzetet jelöl az A pont. Amikor $-2w < y_0 < -w$, akkor (a B pontnak megfelelően) a diszlokációra ható, ellentétes irányú erőket egyrészt a $2E/L$, másrészt az f_m/w meredekségű egyenesek jellemzik. Legyen most $2E/L > f_m/w$ (E a diszlokáció vonalmenti feszültsége). Ekkor már fellép a vonzó kölcsönhatás az akadály potenciáltere és a diszlokációelem között, ami azt eredményezi, hogy a kölcsönható diszlokációszakasz közelebb kerül az origóhoz. A 11. ábrán a B' pont lesz a diszlokáció egyensúlyi helyzete, amelyet a szaggatott vonal és az $f(y)$ erőgörbe metszéspontja határoz meg. Amint $y_0 \rightarrow 0$ (C pont), a diszlokáció elem a potenciálvölgy aljához közeledik, ahol az erők már gyengék, az egyensúlyi C' pont közel van C -hez. Hasonlóan, amikor $w < y_0 < 2w$ (D pont) a potenciálvölgy visszatartja a diszlokációelemet a D' pontban. Végül $y_0 = 2w$ esetén (E pont) megszűnik a kölcsönhatás, ilyenkor $y = y_0$. Ebben a folyamatban a külső feszültség eredő munkája zérus, ezért ezt adiabatikus esetnek nevezzük. Ilyenkor a kétfajta erő meredekségének arányát kifejező B paraméterre fennáll a következő egyenlőtlenség

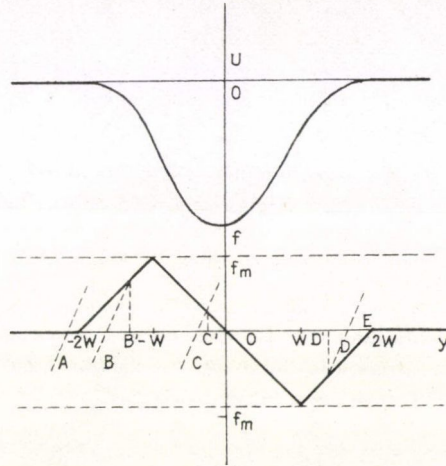
$$B < 1, \quad (17)$$

ahol

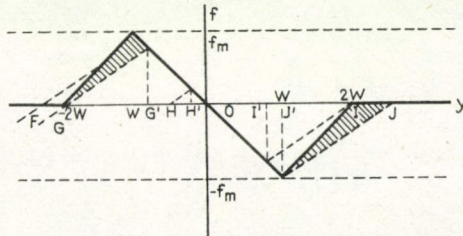
$$B = \frac{Lf_m}{2wE}.$$

A disszipatív esetet ($B > 1$) a 12. ábrán szemléltettük. Az $y_0 < -2w$ esetben (F pont) ilyenkor sincs kölcsönhatás a diszlokáció és a potenciálvölgy között. Amikor a kölcsönhatás megkezdődik ($y_0 = -2w$, G pont) a potenciálvölgy a diszlokációelemet azonnal a G' pontba rántja, amelynek a koordinátája a következő:

$$y = -\frac{2w}{B+1}. \quad (18)$$



11. ábra. Egy diszlokáció csúszósíkjában fekvő akadály potenciálterének modellje és az ebből származtatható erő; adiabatikus eset: a diszlokáció vonalmenti feszültségéből származó erő a távolsággal gyorsabban nő, mint az akadály hatása miatt fellépő erő



12. ábra. Disszipatív eset: az akadály hatásából származó erő a távolsággal gyorsabban nő, mint a diszlokáció vonalmenti feszültségének a járuléka; a vonalkázott területek a disszipálódott energiát adják meg

Amint $y_0 \rightarrow 0$ (H pont) y szintén zérushoz tart (H' pont). Amikor $y=2w$ (I pont) a kölcsönható diszlokációs szakasz még I' -ben marad és a kölcsönhatás csak később szűnik meg, amikor y_0 eléri a J pontot, amelynek koordinátája

$$y = w(B+1). \quad (19)$$

Ekkor a J' pontban tartózkodó diszlokáció elem kiszakad a vonzó potenciálvölgyből és J' -ből a J pontba ugrik át. A folyamat alatt disszipálódott U energiát a 12. ábrán látható két vonalkázott terület adja meg, amelyre könnyű belátni, hogy

$$U = \frac{wf_m}{2}(B-1)\frac{B+3}{B+1}. \quad (20)$$

A diszlokáció egységnyi hosszára ható erő az akadályról való leszakadás pillanatában $b\tau_c$ és egy elemi lépés során súrolt terület $1/c$. Ha a deformáció során csak az imént említett disszipatív mechanizmus érvényesül, akkor a külső feszültségek munkáját a következő módon is írhatjuk:

$$U = \frac{b\tau_c}{c}. \quad (21)$$

A fenti modellben a B paraméterrel lehet jellemezni a diszlokáció-oldott atom kölcsönhatást. Az adiabatikus esetben ($B < 1$) a kölcsönhatás gyengébb, mint a disszipatív esetben ($B > 1$). A modellben még az együttmozgó diszlokáció szakasz L hosszát kell meghatározni, amit megfelelő közelítések segítségével tehetünk meg. *Labusch* megmutatta [28], hogy a diszlokáció mozgás természetét a fenti B paraméter mellett az általa bevezetett β paraméter is jól jellemzi, amely két dimenziótlan mennyiség, f_m/E és $4cw^2$ hányadosaként írható fel a következő módon

$$\beta = \frac{f_m}{4Ecw^2}. \quad (22)$$

A τ koncentrációfüggésére vonatkozó ismert közelítéseket (amelyeket a 2.1 és 2.3 pontokban láttunk) a β paraméter segítségével lehet megkülönböztetni egymástól. A $\beta \gg 1$ esetben a szennyező-diszlokáció kölcsönhatást jellemző f_m erő értéke nagy, ugyanakkor c értéke kicsi (ez utóbbi azt jelenti, hogy híg oldatról van szó), ez tehát a 2.1. pontban leírt Friedel—Fleischer határeset. Nézzük meg, hogy mi adódik ilyenkor a Nabarro elméletből τ_p koncentrációfüggésére.

A (4) egyenletben y -t L -lel egyenlővé téve, és felhasználva a (17), (20), (21), és (22) egyenleteket B és β között a következő összefüggést kapjuk:

$$B^3(B-1)(B+3)/(B+1) = 8\beta^2. \quad (23)$$

Kihasználva, hogy a szennyezők hatótávolsága, w kicsi az átlagos távolságukhoz képest és ezzel összhangban mind β , mind B értékei nagyok, B -re a következő közelítés adódik:

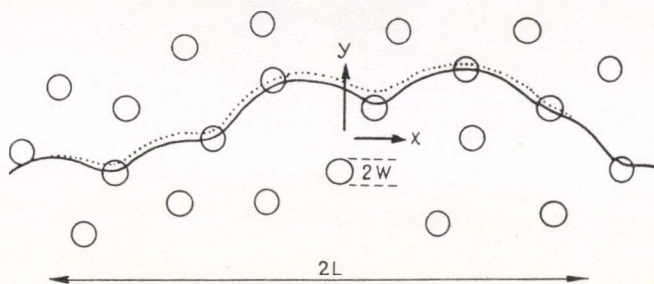
$$B \cong 2^{3/4} \beta^{1/2}. \quad (24)$$

Ezt és a (4), (17), valamint (22) egyenleteket kihasználva τ_p -re a következő kifejezést kapjuk:

$$\tau_p = \frac{f_m^{3/2}}{2^{5/4} E^{1/2} b^2} c^{1/2}. \quad (25)$$

Az eredményt a (6) egyenlettel egybevetve láthatjuk, hogy egy számfaktortól eltekintve a kettő azonos, ahol természetesen f_0 és f_m fizikai jelentése megegyezik.

Nagyobb koncentrációjú szilárd oldatok esetén a Labusch közelítés alkalmazható, amelyben feltesszük, hogy a diszlokációvonal egy koherensen elmozduló $2L$ hosszúságú darabja nagyszámú akadály potenciálvölgyeiben fekszik. Nabarro megmutatta [15], hogy a diszlokációs szakasz mozgása adiabatikus és nem-disszipatív. A Labusch közelítést a $\beta \ll 1$ feltétel jellemzi, amely szerint a diszlokáció egy akadállyal történő kölcsönhatása miatti elmozdulásának a távolsága sokkal kisebb, mint a w hatótávolság (13. ábra). Ez a hatótávolság nagyobb lehet, mint a Friedel közelítés



13. ábra. A diszlokációmozgás elemi lépése a Labusch-közelítés alapján

esetén, mivel a nagy koncentráció miatt az oldott atomok összetömörülhetnek, így kiterjedt akadályokat képezhetnek. Ha egy egyenes diszlokáció a csúszósíkban fekszik, egy akadállyal történő kölcsönhatás egymást követő tartományainak L_0 távolságát a (16) egyenlet határozza meg. Mivel ebben a közelítésben a diszlokáció egy elemi elmozdulásának távolsága sokkal kisebb mint w , így feltehetjük, hogy L_0 a kölcsönhatás pontjainak átlagos távolsága. Továbbá, ha $\beta < 1$, akkor egy akadállyal kölcsönható diszlokáció nem mindig fekszik az akadály közepétől mért $\pm w$ tartományon belül, ahol $df/dy = -f_m/w$. Mivel az egyes akadályokhoz tartozó potenciál völgyek maguk felé vonzzák a diszlokációt, df/dy várható értéke szükségképpen negatív. A 11. ábrán szemléltetett modell alapján $y_0 = -2w$ -től $y_0 = -w(B+1)$ -ig azt találjuk, hogy $df/dy = -f_m/w$, végül az $y_0 = w(B+1)$ -től $y_0 = 2w$ -ig újra $df/dy = +f_m/w$. Vagyis df/dy átlagértéke a $-2w \leq y_0 \leq 2w$ közötti szakaszon:

$$\langle df/dy \rangle = -f_m B/w. \quad (26)$$

Az $x=0$ helyen (13. ábra) egységnyi erő hatására a diszlokáció alakját a fentiek alapján a következő differenciálegyenlet határozza meg:

$$E \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{n B f_m}{L w} y + \delta(x) = 0,$$

vagy a (17) definíciót felhasználva:

$$E \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{n f_m^2}{2 w^2 E} y + \delta(x) = 0. \quad (27)$$

Ennek megoldása a következő [15]:

$$y = \frac{w}{2^{1/2} n^{1/2} f_m} \exp \left[-\frac{|x|}{2^{1/2} w E / n^{1/2} f_m} \right]. \quad (28)$$

Mivel a mozgó diszlokáció szakasz hossza $2L$, az exponenciális függvényben szereplő mennyiség nevezőjének nagyságrendje L értékével megegyező, vagyis

$$L \cong 2^{1/2} w E / n^{1/2} f_m. \quad (29)$$

B definícióját felhasználva:

$$n = \frac{1}{2B^2}. \quad (30)$$

A diszlokációval L hosszával kölcsönható akadályok n száma a (16) egyenletből a következő módon adódik:

$$n = \frac{L}{L_0} = 2Lwc. \quad (31)$$

A (30) és (31) kifejezések összehasonlításából L -re és n -re az alábbi értékeket kapjuk:

$$L = \left(\frac{wE^2}{cf_m^2} \right)^{1/3} \quad (32)$$

és

$$n = \left(\frac{1}{2\beta^2} \right)^{1/3}. \quad (33)$$

Látható, hogy ha $\beta \ll 1$, akkor $n \gg 1$, másrészt a (30) és a (33) egyenletek összevetéséből azt kapjuk, hogy $B = (\beta/2)^{1/3}$, vagyis $B < 1$, ami azt jelenti, hogy a modell teljesíti a kiindulási feltételeket.

A koherensen mozgó $2L$ hosszúságú diszlokáció szakasz $2n$ számú akadállyal hat kölcsön. Mivel a kölcsönhatásból származó átlagos erő zérus (akár y -ra, akár y_0 -ra átlagolunk), a diszlokációra ható teljes erő várható értéke is zérus. A teljes erő abszolút értékének várható értéke *Mott* egy korai statisztikus megfontolása alapján $(2n)^{1/2} \frac{1}{2} f_m$ [2]. Azon a helyen, ahol ez az erő ellentétes a külső τ feszültség okozta erővel, ott ez határozza meg a folyási feszültséget, ahol viszont ez az erő hozzáadódik a külső feszültség okozta erőhöz, a diszlokáció szakasz gyorsulni fog mindaddig, amíg ez a hatás fennáll és az energia fonon és elektron szórással disszipálódik. A kritikus csúsztatófeszültségre ezek alapján a következő adódik:

$$2b\tau_p L = \left(\frac{n}{2} \right)^{1/2} f_m,$$

vagy felhasználva (31)-et és (33)-at:

$$\tau_p = \frac{1}{2b} \left(\frac{f_m^4 w}{E} \right)^{1/3} c^{2/3}. \quad (34)$$

Ezt a kifejezést a (13) egyenlettel összevetve látható, hogy a lényeges vonásokat tekintve a kettő teljesen azonos. Mind a koncentrációfüggés, mind a szennyező-diszlokáció kölcsönhatási erő hatványkitevője megegyezik a két egyenletben.

A Nabarro elmélet legfőbb érdeme, hogy a szennyező-diszlokáció kölcsönhatás beható elemzése alapján sikerült az eddig ismert közelítéseket egy egységes elmélet szélső értékeiként levezetni.

3. A SZILÁRD OLDATOS KEMÉNYEDÉS HŐMÉRSÉKLETFÜGGÉSE

A szilárd oldatos keményedés mértéke egy adott hőmérsékleten az oldott atomok koncentrációjának explicit függvénye, tehát $\tau_T = \tau_T(c)$. Az erre vonatkozó vizsgálatokat mint azt az előzőekben láttuk, rendszerint a T_p plato hőmérsékleten, vagy ennél magasabb hőmérsékleteken szokás elvégezni. Ugyanakkor megfordítva, egy rögzített ötvöző koncentráció mellett a kritikus csúsztató feszültség a hőmérsékletnek explicit függvénye, vagyis $\tau_c = \tau_c(T)$. Végeredményben τ kétváltozós függvény, tehát: $\tau = \tau(c, T)$.

Az előző fejezetben láttuk, hogy még τ koncentrációfüggésének a vizsgálata is igen bonyolult kérdés és még ma is a kutatás tárgyát képezi. Annál inkább érvényes ez τ hőmérsékletfüggésére, különösen, ha figyelembe vesszük, hogy a termikusan aktivált diszlokációmozgás önmagában is sokat kutatott bonyolult probléma [29–31]. A következőkben röviden áttekintjük τ hőmérsékletfüggésével kapcsolatos elképzelések lényegesebb vonásait.

Labusch és munkatársai az előző fejezetben ismertetett modelljüket [10] megkísérelték úgy továbbfejleszteni, hogy az számot adhasson a szilárd oldatos keményedés hőmérsékletfüggéséről [32]. A modell lényege a következő.

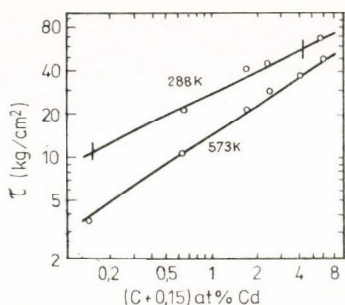
Megfelelően magas hőmérsékleten a termikus aktiválás besegít a külső feszültségnek ahhoz, hogy az elakadt diszlokáció átjusson egy-egy akadályon. A szennyező-diszlokáció kölcsönhatás Mott–Nabarro–Labusch-féle elképzelése alapján [2, 10, 15] (lásd 2.5. pont) a diszlokációnak az akadályhoz közel fekvő része lemarad az akadály előtt, de amikor átugrott az akadályon, akkor előbbre lesz a diszlokációvonal távolabbi részeihez képest. A termikus aktiválás az akadály közelében fekvő diszlokáció szakasz előre, ill. hátraugrásának gyakoriságát szabja meg. *Labusch és munkatársai szerint* [32] a $T < T_p$ hőmérsékleteken az előreugrás valószínűsége (a diszlokációt előre mozgató külső feszültség iránya miatt) nagyobb a visszaugrás valószínűségénél. Magas hőmérsékleteken, azaz $T \geq T_p$ esetén az előre és hátra ugrás valószínűsége majdnem azonossá válik, ami azt eredményezi, hogy a diszlokációk bizonyos értelemben diffúz, Brown mozgást végeznek az akadályokon keresztül, valamilyen átlagos drift sebességgel. A kritikus csúsztató feszültség ebben az értelemben az a feszültség, amely ahhoz szükséges, hogy egy diszlokáció valamilyen átlagsebességgel mozogjon a kristályban.

Formailag a modell egy hőmérséklet és sebességfüggő függvény bevezetésével írható le. A (13) egyenletben szereplő τ_p -t ezzel a $\Psi(\theta_0, \omega)$ függvénnyel kiegészítve (ahol θ_0 egy redukált hőmérsékletet és ω dimenzió nélküli redukált sebességet jelent) $\tau(c, T)$ -re a következő kifejezés adódik:

$$\tau(c, T) = \tau_p \psi(\theta_0, \omega). \quad (35)$$

A Ψ függvény független a koncentrációtól, ami azt jelenti, hogy a $c^{2/3}$ -os koncentrációfüggésnek T_p -nél alacsonyabb hőmérsékleteken is meg kellene maradni. Hogy ez mennyire nincs így, azt jól mutatja a 14. ábra, amely Kan és Haasen [33] Ag—Cd ötvözetén végzett vizsgálatait mutatja. A $\log \tau - \log c$ ábrázolásból látható, hogy míg 288 K-en $c^{1/2}$, addig 537 K-en $c^{2/3}$ szerint változik a kritikus csúsztató feszültség. (A 0,15 at % Cd a tiszta ezüst τ értékének felel meg.)

Fizikai tartalmát tekintve egészen más oldalról közelítették meg τ hőmérséklet-függésének problémáját Kratochvil, Lukac és Sprusil [34]. Abból indultak ki, hogy az ötvöző atomok eloszlása a szilárd oldatban soha nem tökéletesen homogén.



14. ábra. Ag—Cd ötvözetek $\log \tau - \log c$ diagramja két különböző hőmérsékleten

A szennyezők kisebb, nagyobb atomcsoportokat képeznek és az egyes csoportokban levő idegen atomok száma valamilyen eloszlást mutat, amely statisztikus termodinamikai módszerekkel meghatározható. A külső feszültség hatására mozgó diszlokáció az egy atomból álló „atomcsoporton”, mint akadályon halad át a legkönnyebben, és a nagy számú szennyezőt tartalmazó csoporton a legnehezebben. Egy-egy hőmérsékleten mindig vannak atomcsoportok, amelyeknek a mérete olyan, hogy a diszlokáció a külső feszültség és a termikus aktiválás együttes hatására éppen keresztül haladhat rajtuk. Az ennél kisebb méretű akadályokról (ezek gyengébbek) túl könnyen, míg az ennél nagyobbakról (ezek erősebbek) egyáltalán nem tud leszakadni a mozgó diszlokáció. Ezek után már csak az atomcsoportok méreteloszlását kell meghatározni oly módon, hogy a számított folyásfeszültség össze-

tehető legyen a kísérleti eredményekkel. Ennek a további részletei Kratochvil és munkatársai [34] eredeti munkájában megtalálhatók. Elméleti eredményeiknek a kísérletekkel való összehasonlítására a későbbiekben visszatérünk.

Az előzőekben vizsgált elméletek és modellek legalapvetőbb vonásainak felhasználásával Feltham [7] olyan egységes termodinamikai modellt dolgozott ki a szilárd oldatos keményedésre, amelynek alapján értelmezni tudta egyrészt a folyásfeszültség koncentráció és hőmérsékletfüggését, másrészt Basinski és munkatársai [12], valamint Basinski [14] rendkívül nagyszámú és igen alapos kísérleti eredményeit. Mivel Feltham-modellje szorosan kapcsolódik ezen utóbbi kísérleti eredményekhez, ezért tekintsük át először ezeket a vizsgálatokat röviden.

3.1. Basinski és munkatársai szilárd oldatos keményedésre vonatkozó vizsgálatai [12, 14]

A méréseket Cu, Ag és Mg alapú egykristály ötvözeteken 78 és 298 K-en végezték. A mintákat $2 \cdot 10^{-4}$ és $2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ deformációs sebességek mellett húzó igénybevételnek vetették alá. Egy-egy próbatest esetén a deformációs sebességet a fenti két érték között gyakran változtatták. Az ilyen jellegű mérésekből meghatározták a v aktiválási térfogatot, valamint a deformáció-sebesség érzékenységet (DSÉ), amelyeket

a következő alakban írhatunk (1. fejezet):

$$v = \left(\frac{kT \Delta \ln \dot{\epsilon}}{\Delta \tau} \right)_T \quad (36)$$

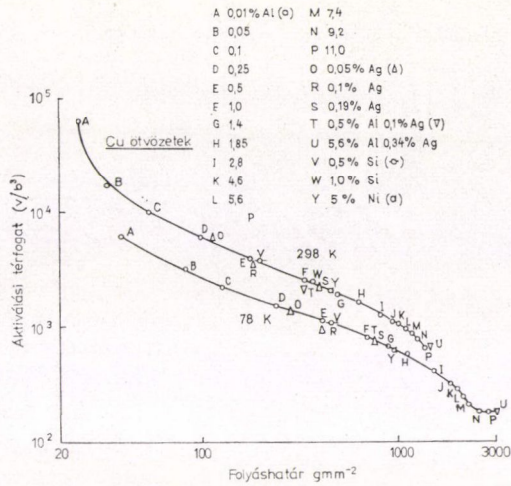
és

$$DS\dot{\epsilon} = \frac{1}{T} \left(\frac{\Delta \tau}{\Delta \ln \dot{\epsilon}} \right)_T = \frac{k}{v}. \quad (37)$$

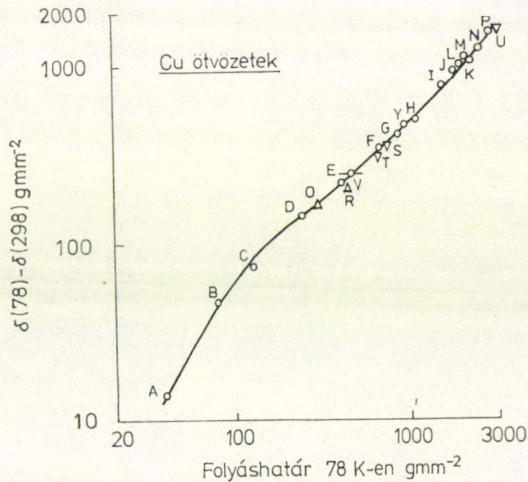
A Cu alapú ötvözeteken végzett mérések eredményei a 15.—18. ábrákon láthatók. A 15. ábra az aktiválási térfogatot mutatja a τ folyáshatár függvényében különböző összetételű és különböző ötvözőket tartalmazó Cu alapú ötvözetek esetében. Az ábrából kitűnik, hogy egy adott hőmérsékleten egyértelmű kapcsolat áll fenn v és τ között, teljesen függetlenül az ötvöző minőségétől és mennyiségétől. Jellemző módon, pl. a Cu—019 at% Ag és a Cu—5 at% Ni ötvözeteknek megfelelő S és Y pontok egészen közel fekszenek egymáshoz, annak ellenére, hogy az egyikben 25-ször több ötvöző van mint a másikban.

A 16. ábra a 78, ill. 298 K-en mért folyáshatár különbségét mutatja a 78 K-hez tartozó folyáshatár függvényében. Itt is az látható, hogy a mérési pontok az ötvözők minőségétől és mennyiségétől függetlenül egyetlen görbe mentén helyezkednek el. A 17. ábra azt mutatja, hogy ha bizonyos ötvözeteknek egy tetszőleges hőmérsékleten megegyezik a folyáshatára, akkor ugyanezen ötvözetek folyáshatárainak bármely más hőmérsékleten is azonosnak kell lenniük. Egy ezzel teljesen azonos típusú összefüggés áll fenn a DS $\dot{\epsilon}$ és a hőmérséklet között, amint az a 18. ábrából kitűnik.

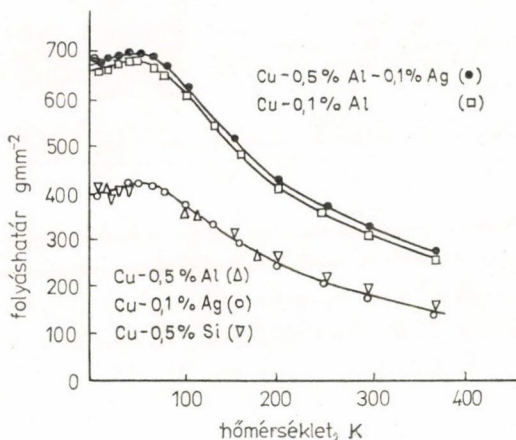
Basinski és munkatársai [12, 14] méréseik alapján megállapították, hogy a vizsgált ötvözetekben az ötvöző minőségétől függetlenül ugyanaz a diszlokációmozgással kapcsolatos folyamat okozza a szilárdoldatos keményedést, annak ellenére, hogy a szennyező-diszlokáció kölcsönhatás erőssége nagy mértékben függ a szennyező faj-



15. ábra. Cu alapú ötvözetek aktiválási térfogata a folyáshatár függvényében 78, ill. 298 K hőmérsékleten



16. ábra. Az előző ábrán szereplő ötvözetek 78, ill. 298 K-en mért folyáshatár különbsége a 78 K-hez tartozó folyáshatár függvényében



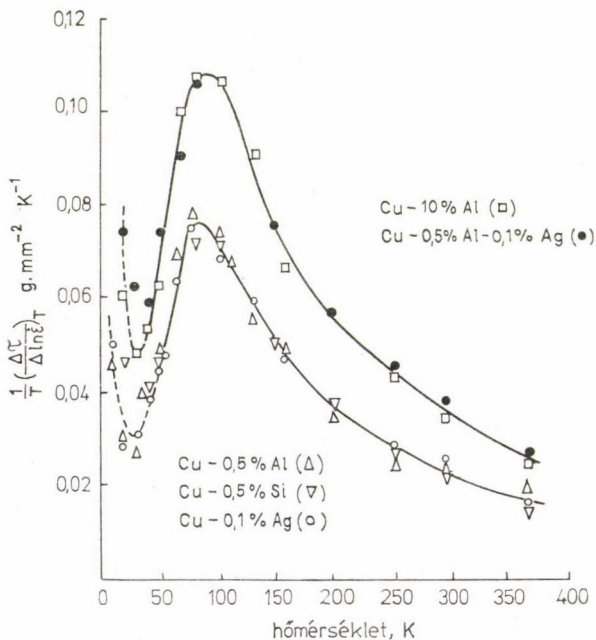
17. ábra. Cu alapú ötvözetek folyáshatára a hőmérséklet függvényében; ha valamely hőmérsékleten a folyáshatárak megegyeznek, akkor az egyezés bármely más hőmérsékleten is fennáll.

feszültség átsegíti a diszlokációkat az akadályon, *Feltham* kidolgozott egy olyan elméletet a szilárdoldatos keményedésre, amely mind a koncentrációtól, mind a hőmérséklettől való függést a tapasztalattal egyezésben írja le [7]. Az elmélet egyik

tájától és a diszlokáció mozgást akadályozó erő pedig az oldott atomok mennyiségétől. Megállapították továbbá, hogy a mozgó diszlokáció az akadálytól való leszakadáskor az ötvözők egy-egy csoportjáról szakad le egyszerre. Ez összhangban áll számos más elméleti és kísérleti eredménnyel [1, 2, 7, 8–10, 13, 15, 17], amint ezt az előzőekben láttuk.

3.2. A szilárdoldatos keményedésnek a feszültség-hőmérséklet ekvivalenciájára épülő modellje

Abból a felismerésből kiindulva, hogy a diszlokációknak az akadályokon való átjutása termikusan aktivált folyamat, amelyben a külső

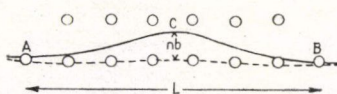


18. ábra. Cu alapú ötvözetek deformáció sebesség érzékenysége a hőmérséklet függvényében a folyáshatárral azonos összefüggést mutat

legfőbb érdeme az, hogy Basinski és munkatársai eredményei elméleti úton meghatározhatók. A következőkben áttekintjük a Feltham-modell alapvető vonásait.

A diszlokáció mozgás elemi lépését a 19. ábrán szemléltetjük. A körök az idegen atomokat jelölik és egy lépésben a diszlokációnak L hosszúságú szakasza lép előre átlagosan nb távolsággal. Az L hosszúságú diszlokáció szakasz végeinél kialakul egy-egy könyök, ez a diszlokációmozgás tehát hasonló a tiszta fémekben megfigyelhető keresztcsúszásos diszlokációmozgáshoz.

A modell döntő lépése a diszlokáció két egymást követő stabil helyzete közötti átmenethez tartozó aktiválási energia meghatározása. Ez a w aktiválási energia a következő tagokból áll. Az $AB=L$ hosszúságú diszlokáció szakasz hossza megnő, az ebből származó energia növekedés értéke közelítőleg $Gb^3 n/2$. A diszlokációt rögzítő szennyezőkről való leszakadás energiaszükséglete $U c^{1/2} L/b$, ahol $L\sqrt{c}/b$ a diszlokáció mentén, az A és B pontok között fekvő idegen atomok száma és U egy szennyező atom és a diszlokáció átlagos kötési energiája. Végül a külső feszültség munkája $\tau b L(nb/2)$, ahol $nb/2$ az előrelépés átlagos távolsága. Ezeket a járulékokat figyelembe véve a diszlokációmozgás aktiválási energiája a következő:



19. ábra. A diszlokációmozgás elemi lépése a Feltham modell alapján

$$w = \frac{n}{2} Gb^3 + U c^{1/2} \left(\frac{L}{b} \right) - \frac{1}{2} n \tau b^3 \left(\frac{L}{b} \right). \quad (38)$$

A kihajló diszlokáció szakasz görbületi sugarát R -rel jelölve L/b -re a következő összefüggés adódik:

$$\frac{L}{b} = \left(\frac{4Gn}{\tau} \right)^{1/2}. \quad (39)$$

Mivel G és n hőmérsékletfüggése nem jelentős, a fenti egyenletből az adódik, hogy $L^2 \tau$ állandó.

Jelöljük az akadályról való leszakadás frekvenciáját ν -vel. ν értéke az akadály aktiválási energiájától a Boltzmann statisztika szerint a következőképpen függ:

$$\nu = \nu_0 \exp(-w/kT), \quad (40)$$

ahol ν_0 az atomi rezgés frekvenciája, ami nagyságrendben 10^{11} s^{-1} . Ahhoz, hogy az alakváltozás a szokásos deformáció sebesség tartományában legyen ν értéke durván 1 s^{-1} körüli érték kell, hogy legyen. Ennek alapján w -re a következő adódik:

$$w = mkT, \quad (41)$$

ahol $m \approx 25$.

A (38)–(41) egyenletekből a τ kritikus csúsztató feszültségre az alábbi eredményt kapjuk:

$$\tau = \tau_0 \frac{\theta}{[1 + (1 + \theta)^{1/2}]^2}, \quad (42)$$

ahol

$$\tau_0 = \frac{4Uc^{1/2}}{nb^3} \quad \text{és} \quad \theta = \frac{4n^2 Gb^3 U c^{1/2}}{(mkT)^2}.$$

Ha a θ -ban szereplő mennyiségek gyenge hőmérsékletfüggésétől eltekintünk, akkor θ lényegében T^{-2} -vel arányos. Ez azt jelenti, hogy τ növekszik és tart τ_0 -hoz $T \rightarrow 0$ esetén, ugyanakkor magas hőmérsékleteken erőteljesen csökken. Ez utóbbi viselkedés, figyelembe véve, hogy $L^2\tau$ állandó, azt jelenti, hogy a hőmérséklet növekedésével L is növekszik. Feltham ezt a jelenséget „hőmérsékleti lágyulásnak” nevezi, mivel a szennyezők rögzítő hatása gyengül a hőmérséklet növekedésével és egyre hosszabb diszlokáció szakaszok szakadnak le az akadályokról egy-egy elemi lépésben.

A (38)-(42) egyenletek alapján az aktiválási térfogat is meghatározható [17]. A számítások részletezése nélkül közöljük az eredményt, ami a következő alakban írható:

$$v = \frac{1}{2} v_0 (x^{-1/2} + x^{-3/2}), \quad (43)$$

ahol

$$x = \frac{\tau}{\tau_0}$$

$$v_0 = \frac{n^2 b^3}{4} \left(\frac{Gb^3}{Uc^{1/2}} \right)^{1/2}$$

és τ_0 a 0 K-hez tartozó folyásfeszültség.

A (42) egyenlet a szilárdoldatos keményedés koncentrációfüggését, sőt a koncentrációfüggés hőmérsékletfüggését is jól írja le. $T \rightarrow 0$ K mellett $\tau \rightarrow \tau_0$, ami (42) alapján $\tau \sim c^{1/2}$ koncentrációfüggést eredményez. Ezzel szemben magas hőmérsékleten $\tau \sim \theta\tau_0$ és miután mind τ_0 , mind θ arányos $c^{1/2}$ -nel, τ c -vel lesz arányos. A koncentrációfüggést $\tau \sim c^r$ alakban írva, r lehetséges értékeinek az $1/2 \leq r \leq 1$ tartományba kell esni. Az 1. táblázat néhány ötvözet esetében mutatja r 4,2 K-en mért értékeit [35].

1. TÁBLÁZAT

Ötvözet	r
Cu—Al	0,71
Cu—Ge	0,83
Cu—Ni	0,74
Ag—Al	0,73
Ag—Au	0,39
Au—Ag	0,48

A táblázatból látható, hogy r értékei valóban $1/2$ és 1 közé esnek. r hőmérsékletfüggésénél nem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy θ értéke arányos U -val, a szennyező-diszlokáció kölcsönhatással, ami ötvözetként erőteljesen különbözhet. Az „alacsony” és „magas” hőmérsékletek tehát U -tól is függő relatív megállapítások.

A Feltham-modell alapján jól értelmezhető az Ag—Cd ötvözet folyáshatárának a koncentrációfüggése két különböző hőmérsékleten, amit a 14. ábrán láthatunk: 288 K-en $r=1/2$, míg 573 K-en $r=2/3$.

A Feltham-modell leglényegesebb eredménye azonban az, hogy Basinski és munkatársai méréseit [12, 14] elméleti úton, igen nagy pontossággal reprodukálni tudja. Jól mutatja ezt a 20. ábra, amelyen a Cu ötvözetekre vonatkozó aktiválási térfogat értékek láthatók a folyáshatár függvényében. A berajzolt jelek a mérési eredményeket jelölik, a kihúzott görbe pedig a (43) egyenlet alapján számított értékeket.

Basinski mérései már eleve azt sugallták, hogy a szilárdoldatos keményedésben a diszlokáció-szennyező kölcsönhatásban és a diszlokáció mozgásban egy olyan mechanizmusnak kell léteznie, amelynél a termikus aktiválásnak és külső feszültség-

nek valamilyen módon ekvivalens szerepe van. Alacsony hőmérsékleten a termikus aktiválás alacsony, ezért nagyobb külső feszültségre van szükség, hogy a diszlokációk az akadályokon átjussanak és az alakváltozás bekövetkezzen. Ugyanakkor magas hőmérsékleten az erőteljesebb termikus gerjesztés miatt a diszlokációk már sokkal kisebb külső feszültség hatására is átjuthatnak az akadályokon. A Feltham-modell lényegében ezeket a megfontolásokat öntötte matematikai formába.

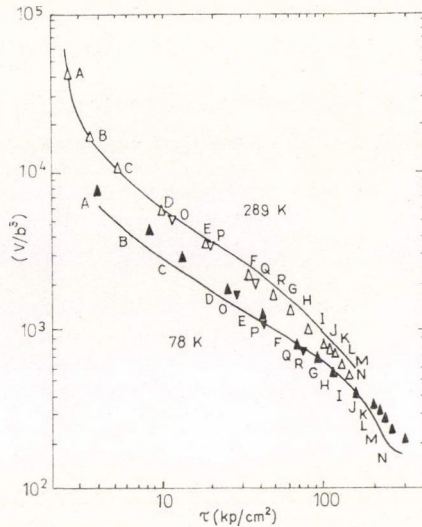
4. SZILÁRDOLDATOS KEMÉNYEDÉS TÉRCENTRÁLT KÖBÖS (TCK) FÉMEKBEN

A szilárdoldatos keményedés elméleti elsősorban az fck fémeken végzett vizsgálatok eredményeire támaszkodva születtek meg. Az előbbi fejezetekben láttuk azonban, hogy a különböző elméletek egyike sem használta ki az fck kristályszerkezet speciális tulajdonságait. Így az előzőekben leírt elméletek általánosoknak tekinthetők, amelyek több-kevesebb sikerrel alkalmazhatók tck fémek esetében is.

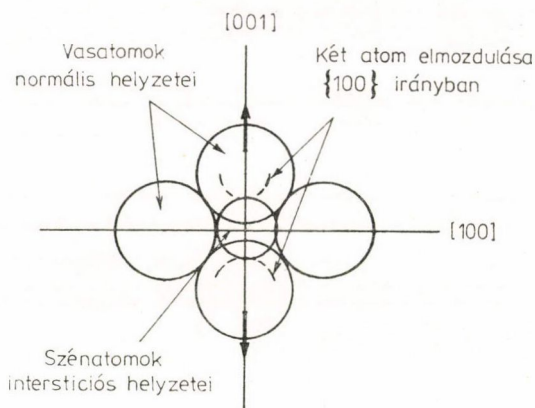
Ebben a fejezetben áttekintjük, hogy tck fémek esetén hogyan alkalmazható a fenti általános elmélet, illetve melyek azok a speciális tulajdonságok, amelyek a keményedésben az fck fémek viselkedésétől eltérő jelleget okoznak.

Kísérletileg eléggé széles körben történtek vizsgálatok a tck fémek szilárd oldatos keményedésére vonatkozólag. Így egykristályokon történő mérésekkel vizsgálták Cr alapú szilárd oldatokat [36], a Ni és Pt atomok hatását Fe-ben [37], Re-ét W-ban [38] és Mo-ben [39], Nb-ét [40], W-ét, Mo-ét és Re-ét Ta-ban [41]. Magas hőmérsékleteken a legtöbb ötvözetre $\tau_p \sim c^2$ vagy $\tau_p \sim c$ koncentrációfüggést találtak, bár kis ötvöző koncentrációk esetén az elméletileg várható $\tau_p \sim c^{1/2}$ összefüggés teljesült. A platófeszültség ilyen koncentrációfüggései a méreteffektus, a modulusz hatás és a rövid távú rend hatásának együttes jelentkezésével magyarázhatók [18].

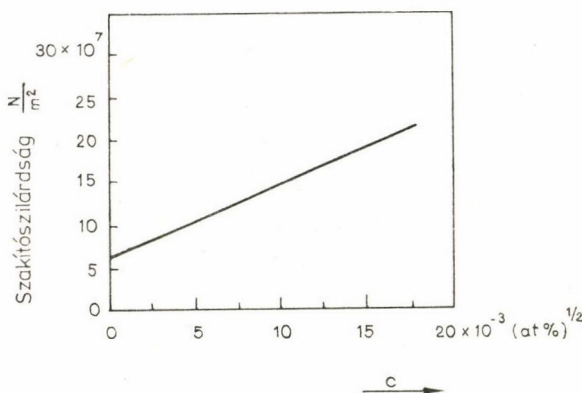
A tck fémekben az oldott atomok helyettesítési és intersticiós helyeken is előfordulhatnak szemben a szoros illeszkedésű, fck fémekkel, ahol általában csak helyettesítési szilárd oldatokkal találkozunk. A rácsdeformáció okozta szilárd oldatos keményedés azokban a tck fémekben jelentős, amelyekben az oldott atomok intersticiósan helyezkednek el, mivel az így kialakult asszimmetrikus rácsstorzulás igen hatásosan növeli a szilárdságot. Például tck vasban a szénatomok által választott intersticiós hely (21. ábra) sokkal kisebb méretű az $\langle 100 \rangle$ tengely irányában, mint az $\langle 110 \rangle$ irányban, ennek következtében egy szénatom szomszédságában a kristályszimmetria köbösből tetragonálisra változik. Így már 10^{-4} -es oldott szén koncentráció képes előidézni a 22. ábrán látható jelentős keményedést, amely $c^{1/2}$ -es koncentrációfüggést mutat.



20. ábra. Cu alapú ötvözetek aktiválási térfogatai a folyáshatár függvényében 78 és 289 K hőmérsékleteken; a kihúzott görbe a Feltham-modellből számított elméleti értékeket jelöli



21. ábra. A tck vasban a szénatomok által választott intersticiós hely



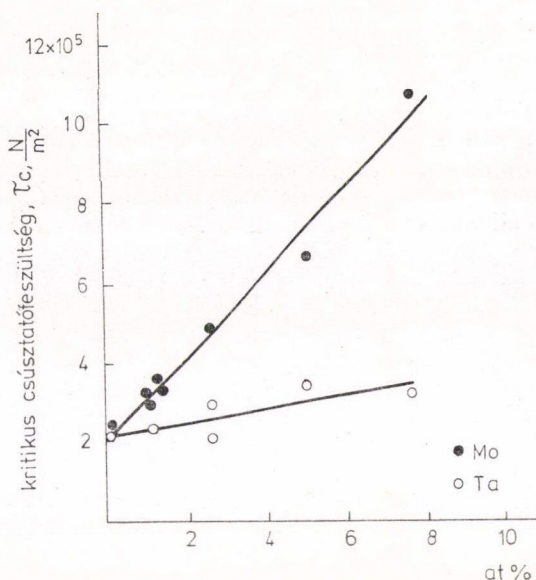
22. ábra. A vas szakítószilárdsága az oldott szénkoncentráció 1/2-es hatványának függvényében

Vasban a nitrogén oldhatósága jelentősebb a szén oldhatóságánál, ezért Nakada és Keh Fe—N ötvözetek szilárdoldatos keményedését vizsgálta [42]. Szobahőmérsékleten a kritikus csúsztatófeszültségre lineáris koncentrációfüggés adódott. 100 és 200 K között azonban azt találták, hogy a híg ötvözetek kritikus csúsztatófeszültsége csökkent a tiszta vashoz képest, majd nagyobb koncentrációknál a keményedés ismét lineárisan nőtt. Ilyen szilárdoldatos lágyulást találtak Quesnel és munkatársai a vas-szén rendszerben is 197 K-en [43]. Ez a lágyulási jelenség túlnyomórészt a tck fémekre jellemző, magyarázatára a későbbiekben visszatérünk.

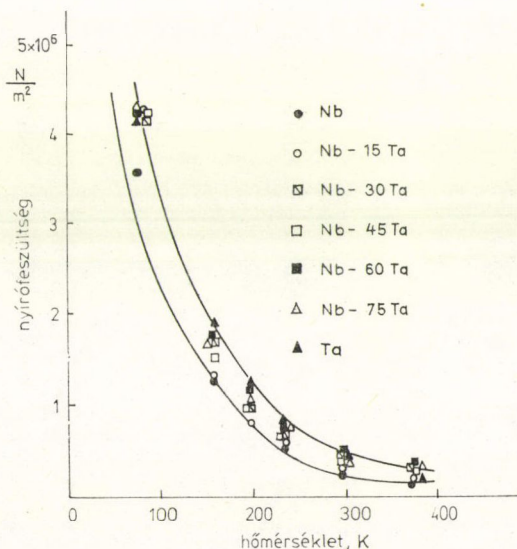
Peters és Hendrickson különböző összetételű Nb—Ta és Nb—Mo egykristályok szilárdoldatos keményedését vizsgálta az összetétel és a hőmérséklet függvényében [44]. A szobahőmérsékleten végzett mérések eredménye látható a 23. ábrán, ahol a két Nb-alapú ötvözet esetén az ötvöző elem atomszázalékának függvényében ábrázoltuk a

kritikus csúsztatófeszültséget. Az ábráról megállapítható, hogy Nb-ban a Mo szilárdságnövelő hatása jelentős, míg a Ta okozta effektus elhanyagolható. A 24. ábrán a kritikus csúsztatófeszültség hőmérsékletfüggését láthatjuk tiszta Nb és Ta, valamint Nb—Ta ötvözetek vizsgálata alapján. Az ábrán kihúzott, egymáshoz közel fekvő két vonal a tiszta Ta, ill. a Nb görbéje, az ötvözeteken mért értékek az összetétel szerint monoton változva a kísérleti hibán belül a két görbe által meghatározott sávban helyezkednek el. A Nb—Mo ötvözetek ettől eltérő viselkedést mutatnak, amint azt a 25. ábrán ábrázoltuk. A tiszta anyagok kritikus csúsztatófeszültségének hőmérsékletfüggését szaggatott, az ötvözetekét kihúzott vonallal jelöltük. Látható, hogy már 7,5 at% Mo ötvöző esetén a keményedés olyan nagy mértékű, hogy túlnő a két tiszta anyag által meghatározott tartományon. Ezenkívül nagy Mo koncentrációk esetén nem jelentkezik a magas hőmérsékleteken általános platófeszültség.

Peters és Hendrickson szerint a tck szilárdoldatok szilárdságnövekedésében a méretfaktornak van döntő szerepe. Hasonló megállapításra jutott Mitchell és Raffo [41], valamint Ta—Nb és Ta—W ötvözetek vizsgálata alapján Arsenault és Lawley [45] is. Ennek figyelembevételével érthető, hogy a Nb—Ta rendszer esetén nem kapunk számottevő keménységnövekedést, mivel a két alkotó atom mérete nagyon közel áll egymáshoz. Érdekes összevetni ezt a rendszert az fcc szerkezetű Ag—Au ötvözetrel. A két rendszer nagyon hasonló, mindkettőben az alkotók izomorfok, vagyis korlátlanul oldódnak egymásba, nincs lényeges eltérés a komponensek atommérete

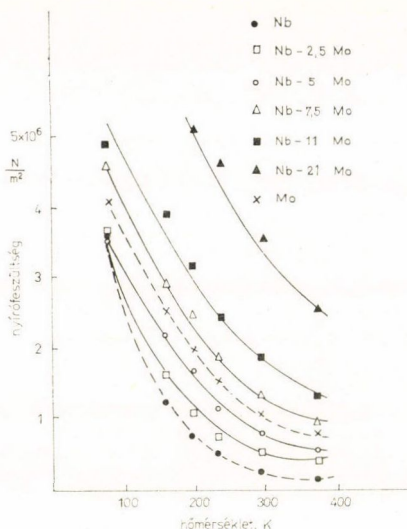


23. ábra. Nb alapú ötvözetek kritikus csúsztatófeszültsége az ötvöző koncentráció függvényében

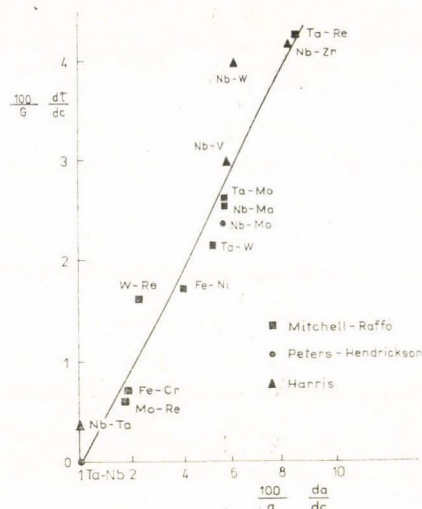


24. ábra. A kritikus csúsztatófeszültség hőmérsékletfüggése tiszta Nb és Ta, valamint Nb—Ta ötvözetek esetén

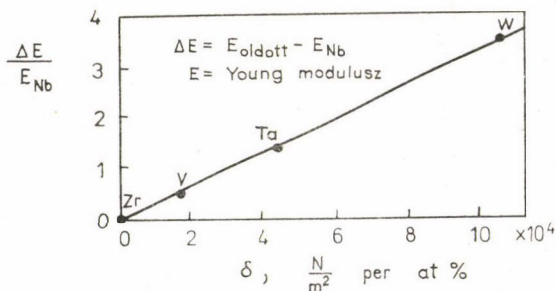
között, alkotóik a periódusos rendszer azonos oszlopába tartoznak és közel azonosak a kémiai tulajdonságaik is. Mégis a két rendszerben a szilárdoldatos keményedés jelensége fenomenológiailag egészen különböző. *Sachs* és *Weerts* adatai alapján [46] a kritikus csúsztatófeszültség az 50—50% Ag—Au ötvözetben közel ötszörös a tiszta komponensekhez képest, míg az 50—50% Nb—Ta ötvözet szilárdsága a tiszta tantál és a tiszta nióbium szilárdsága közötti érték. *Kloske* szerint [47] az Ag—Au ötvözet szilárdoldatos keményedése a rövid távú rend és az oldott atomok diszlokációkkal történő kombinált méret, illetve moduluszhatásának az eredménye. Ezzel szemben a Nb—Ta rendszerben csak a tiszta fémre jellemző tagok befolyásolják a keményedést, a diszlokációk nem különböztetik meg a tantál és a nióbium atomokat,



25. ábra A kritikus csúsztatófeszültség hőmérsékletfüggése tiszta Nb és Mo, valamint Nb—Mo ötvözetek esetén



26. ábra. Tck fémek keményedését jellemző $\frac{1}{G} \frac{d\tau}{dc}$ értékek a méretfaktor függvényében



27. ábra. Nb alapú ötvözetek relatív Young modulusz értéke az előző ábrán található egyenestől való eltérés függvényében

illetve ebben a rendszerben a moduluszhatás nem jelentkezik mérhető módon. Annak alátámasztására, hogy a tck fémek keményedése egyedül a méreteffektussal jól leírható, összegyűjtöttük *Mitchell és Raffo* [41], *Peters és Hendrickson* [44] és *Harris* [21] dolgozata alapján számos tck szerkezetű fém kétalkotós szilárdoldatára a keményedés mértékére jellemző $\frac{1}{G} \frac{d\tau}{dc}$ értékeket, és a 26. ábrán ábrázoltuk az $\frac{1}{a} \frac{da}{dc}$ méretfaktor

függvényében. A legkisebb négyzetes illesztés a legtöbb ötvözetre jó egyezést ad a keményedés és méretfaktor között. Harris néhány Nb-alapú ötvözetre már korábban megvizsgálta [21], hogy mivel lehet magyarázni azt az eltérést, amellyel a 26. ábrán az egyes pontok az egyenestől különböznek. Ennek az eltérésnek a függvényében a 27. ábrán látható módon ábrázolta az egyes oldott anyagok relatív Young-modulusz eltérését, és így kiváló egyezést kapott. Ez azt bizonyítja, hogy a méreteffektuson kívül a moduluszhatás is szerepet játszik a tck fémek szilárdoldatos keményedésében, habár sokkal kisebb mértékben, mint az fck fémeknél.

A tck fémek esetében alacsony hőmérsékleteken az első néhány százalék oldott atom adagolás számos ötvözet esetében csökkenti a kritikus csúsztatófeszültséget, vagyis szilárdoldatos lágyuláshoz vezet [21, 36, 37, 40, 41]. Példaként a 28. ábrán Ta—Re egykristály folyásfeszültsége látható az összetétel függvényében különböző hőmérsékleteken [41]. Megfigyelhető, hogy szobahőmérsékletnél alacsonyabb hőmérsékleteken és 4 at% Re-nál higabb szilárdoldatok esetén lép fel a lágyulás.

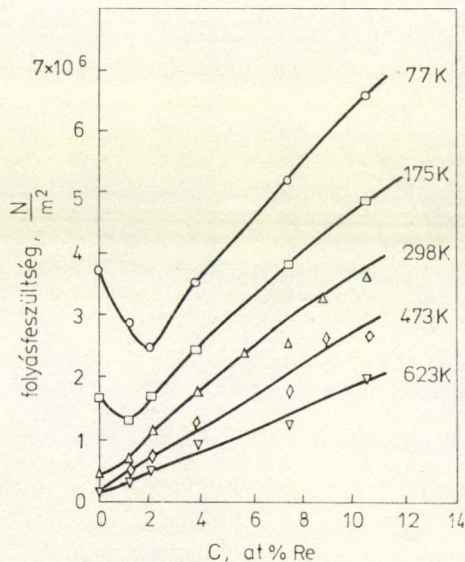
Általánosságban megállapíthatjuk, hogy szilárdoldatos lágyulás nemcsak fémekben, hanem kovalens és ionos kötésű kristályokban is felléphet, bár leggyakrabban a tck fémek esetén jelenik meg. A jelenséget olyan hőmérséklettartományban észlelhetjük, ahol a tiszta alapfém folyáshatára relatíve magas. Ugyanebben a hőmérséklettartományban a folyáshatár hőmérsékletfüggése relatíve nagy. Szilárdoldatos lágyulással mind intersticiális, mind helyettesítési oldatok esetében is találkozhatunk. Ugyanabban a rendszerben különböző hőmérsékleteken rendszerint szilárdoldatos lágyulást és szilárdoldatos keményedést is találunk, lágyulást az alacsonyabb, keményedést a magasabb hőmérsékleteken. A jelenség magyarázatára több lehetőség merült fel:

a) A Peierls feszültség vagy a diszlokációs könyökképződés aktiválási energiája csökken az oldott atomok hatására [41].

b) Az intersticiális oldhatóság megváltozik helyettesítési oldott atomok bevitelkor [37, 38, 48].

c) A nyírási modulusz koncentráció függése eltér a megszokottól [49].

d) Az oldott atomok megváltoztatják a rétegződési hibák képződési energiáját és így a parciális diszlokációk keletkezésének valószínűsége megnő [19].



28. ábra. Szilárdoldatos lágyulás Ta—Re egykristály esetén szobahőmérsékletnél alacsonyabb hőmérsékleteken

e) A mozgó diszlokáció sűrűség a tiszta fémekben alacsonyabb, mint az ötvözet kristályokban alacsony hőmérsékleteken [42].

f) *Sato és Meshii* olyan elmélettel próbálkozott [50], amelyben ugyanaz a mechanizmus magyarázza mind a szilárdoldatos lágyulást, mind a szilárdoldatos keményedést a hőmérséklettől függően. Csavardiszlokációk mozgását vizsgálták egy olyan összetett feszültségtérben, amely a Peierls potenciálból és az oldott atomok miatt fellépő deformációs feszültség centrumokból áll. Azt találták, hogy a feszültség centrumok egyrészt elősegítik a kettős könyök nukleációt egy, a csavardiszlokációra ható erőpár segítségével, másrészt gátolják a könyökök oldalirányú mozgását. A teljes diszlokáció mozgás leírása érdekében ennek a két lépésnek az energijárulékait kell számba venni. Számításaik a kísérleti eredményekkel elég jó egyezést mutatnak. További finomításként javasolják, hogy a méret-hatás mellett a moduluszhatást is korrekciós tagként számításba lehet venni.

A kritikus csúsztatófeszültség hőmérsékletfüggésére általánosságban a hőmérsékleti lágyulás jellemző, vagyis a hőmérséklet növekedésekor a keménység csökken. Sok ötvözet esetén ez a hőmérsékleti lágyulás egy bizonyos hőmérséklet elérése után megszűnik és a további hőmérséklet növekedésre az ötvözet szilárdsága ezen platófeszültség értéken marad. Más esetekben, például egészen híg Fe—Ni ötvözetek esetén [42], vagy bizonyos deformációs sebességek alkalmazásakor [51] ilyen plató-feszültséggel nem találkozunk, ekkor a keménység a hőmérséklet növekedtével szigorúan monoton csökken.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy tck fémekben a szilárdoldatos keményedés az intersticiósan oldott ötvözők esetében sokkal nagyobb mértékű, mint az fck fémek helyettesítéses oldataiban, mert a létrejövő rácsstorzulások feszültségtete megnöveli a diszlokáció oldott atom kölcsönhatás erősségét és hatótávolságát is. A szilárdság növekedésben a méreteffektusnak van döntő jelentősége, míg a moduluszhatás sokkal kisebb szerepet játszik, mint az fck fémek esetében. A tck fémeken bizonyos esetekben szilárdoldatos lágyulást is megfigyelhetünk, ami fck fémek esetén általában nem tapasztalható. A jelenség magyarázatára még nem alakult ki általánosan elfogadott álláspont.

IRODALOM

1. *N. F. Mott and F. R. N. Nabarro*, Reports of Conf. on Strength of Solids, The Physical Society, London, 1948. p. 1.
2. *Kovács I.*, Magy. Fiz. Folyóirat, 18. 1, 1970.
3. *R. L. Fleischer*, Acta Met. 11, 203, 1963.
4. *J. Friedel*, Dislocations, Pergamon Press, New York, 1964.
5. *A. J. E. Foreman and M. J. Makin*, Phil. Mag. 14, 911, 1967.
6. *M. M. Hutchison and P. W. K. Honeycombe*, Met. Sci. J. 1, 70, 1967.
7. *P. Feltham*, Brit. J. Appl. Phys. (J. Phys. D.), 1, 303, 1968.
8. *B. R. Riddhagni and R. M. Asimov*, Brit. J. Appl. Phys. (J. Phys. D.), 2, 126, 1969.
9. *P. Jax, P. Kratochvil and P. Haasen*, Acta Met. 18, 237, 1970.
10. *R. Labusch*, Acta Met. 20, 917, 1972.
11. *T. Suzuki*, Proc. Second Internat. Conf. Strength of Metals and Alloys, Amer. Soc. Metals, New York, 1970. Vol 1. p. 237.
12. *Z. S. Basinski, R. A. Foxall and R. Pascual*, Scripta Met. 6, 807, 1972.
13. *P. Feltham*, Mater. Sci. Eng. 11, 118, 1973.
14. *Z. S. Basinski*, Scripta Met. 8, 1301, 1974.
15. *F. R. N. Nabarro*, Phil. Mag. 35, 613, 1977.
16. *H. Traub, H. Neuhauser and C. Schwink*, Acta Met. 25, 437 and 1247, 1977.
17. *M. Z. Butt and P. Feltham*, Acta Met. 26, 167, 1978.

18. *P. Haasen*, Trans. J. I. M. 9, 15, 1968.
19. *I. Kovács* and *L. Zsoldos*, Dislocations and Plastic Deformation, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.
20. *R. L. Fleischer* and *W. R. Hibbard*, Conference on Relation of Structure to Mechanical Properties of Metals, Teddington, National Physical Laboratories, 1963.
21. *B. Harris*, phys. stat. sol. 18, 715, 1966.
22. *J. Van der Plank* and *J. Deruyttere*, J. Mater. Sci. 4, 499, 1969.
23. *C. Escaravage*, *P. Back* and *G. Champier*, Second International Conf. Strength of Metals and Alloys, Amer. Soc. Metals, 1970. Vol. 1. p. 299.
24. *B. L. Mordike* and *K. D. Rogausch*, mint 23. p. 258.
25. *Kovács István*, *Lendvai János* és *Ungár Tamás*, X. Kohászati Anyagvizsgáló Napok, Balatonaliga, 1979. p. 202.
26. *P. Haasen*, Trans. Japan Inst. Metals, 8, 40, 1968.
27. *P. Haasen*, Kristall und Technik, 2, 251, 1967.
28. *R. Labusch*, phys. stat. sol. 41, 659, 1970.
29. *J. W. Morris* and *D. H. Clahn*, J. Appl. Phys. 44, 4882, 1973.
30. *B. M. Strunin*, physica stat. sol. (a) 35, 551, 1976.
31. *A. I. Landau* and *V. I. Dotsenko*, phys. stat. sol. (a), 37, 709, 1976.
32. *R. Labusch*, *C. Grange*, *J. Ahern* and *P. Haasen*, Rate Processes in Plastic Deformation of Materials, Amer. Soc. Metals, 1975. p. 26.
33. *T. Kan.* and *P. Haasen*, Mater. Sci. Eng. 5, 176, 1970.
34. *P. Kratochvil*, *P. Lukac* and *B. Sprusil*, Czech. J. Phys. B23, 621, 1973.
35. *K. Ono*, Proc. Third Int. Conf. on Strength Metals and Alloys, Cambridge, 1973. p. 138.
36. *G. T. Horne*, *P. B. Roy* and *H. W. Paxton*, J. Iron Steel Inst. 201, 161, 1963.
37. *H. H. Kranzlein*, *M. S. Burton* and *G. V. Smith*, Trans. AIME, 233, 64, 1965.
38. *M. Garfinkle*, NASA Techn. Rep. X—52 132, 1965.
39. *A. Lawley* and *R. Maddin*, Trans. AIME, 224, 573, 1962.
40. *G. Rudolph* and *B. L. Mordike*, Z. Metallk. 58, 708, 1967.
41. *T. E. Mitchell* and *P. L. Raffo*, Canad. J. Phys. 45, 1047, 1967.
42. *Y. Nakado* and *A. S. Keh*, Acta Met. 16, 903, 1968.
43. *D. J. Quesnel*, *A. Sato* and *M. Meshii*, Mat. Sci. and Eng. 18, 199, 1975.
44. *B. C. Peters* and *A. A. Hendrickson*, Met. Trans. 1, 2271, 1970.
45. *R. J. Arsenault* and *A. Lawley*, Phyl. Mag. 15, 549, 1967.
46. *G. Sachs* and *J. Weerts*, Z. Phys. 62. 473, 1930.
47. *R. A. Kloske*, Ph. D. Thesis, Northwestern Univ. 1966.
48. *G. Lütgering* and *E. Hornbogen*, Z. Metallk. 59, 29, 1968.
49. *B. Harris*, J. Less-Common Metals, 12, 247, 1967.
50. *A. Sato* and *M. Meshii*, Acta Met. 21, 753, 1973.
51. *M. J. Luton* and *J. J. Jonas*, Can. Met. Quar. 11, 1, 1972.

8. KIVÁLÁSOS KEMÉNYEDÉS

LENDVAI JÁNOS

ELTE, Általános Fizika Tanszék

1. BEVEZETÉS

Fémek ötvözés útján történő szilárdságnövelése a fémtan egyik leglényegesebb célkitűzése. Ha az ötvöző atomok a fémben atomi szinten egyenletesen oszlanak el, akkor a szilárdságnövekedést az ún. szilárdoldatos keményedés (6. fejezet), ha viszont valamely szilárdfázisú reakció eredményeként keletkező kiválások formájában vannak jelen, akkor a szilárdságnövelő hatást az ún. kiválásos keményedés váltja ki. A kiválásos keményedés leírásánál a diszlokációk és az idegen fázis részecskéi között fellépő kölcsönhatást kell megvizsgálunk. A leírás nem használja ki a részecskék keletkezésének konkrét mechanizmusát, így az ún. diszperziós keményedésre is alkalmazható, amikor a második fázis részecskéi nem kiválással, hanem valamilyen más módon (pl. belső oxidációval) jönnek létre.

Az ötvözéses szilárdságnövelés jelentőségét mutatja, hogy egy jól hőkezelt tiszta fém redukált folyáshatára, $\tau/G \approx 10^{-4}$ (G a nyírási rugalmassági modulusz), ezt az értéket egy szilárdoldat ötvözeté egy nagyságrenddel, egy részecskékkel keményített ötvözeté több mint két nagyságrenddel meghaladhatja. Nemcsak a fémek és a szilárd testek, hanem általában minden anyag deformációval szembeni ellenállása megnő, ha idegen fázis részecskéit tartalmazza. A kolloid részecskéket tartalmazó folyadékok, például festékek, viszkózusabbak, mint a tiszta folyadékok.

Ennek a megnövekedett ellenállásnak az egyik oka nagyon egyszerű. Az idegen részecskék nélkül a folyadékban a réteges áramlás lehetséges. A részecskék azonban megzavarják az áramlást, az anyag egyes elemeinek tovább kell mozdulniuk, hogy megkerüljék az idegen részecskéket és így a folyadékban több energia vész el a súrlódásos folyás következtében. Ha egy fémkristályban az elcsúszás egyetlen csúszási rendszer működésével történik, akkor még ez is réteges áramlásként képzelhető el. Az idegen fázis részecskéi — feltéve, hogy elég erősek — a kristályban is perturbálják a folyást, ez gyors alakítási keményedést (2., 3. fejezet) eredményez. Ennek a folyamatnak a részletei azonban általában lényegesen bonyolultabbak, mint a súrlódásos folyás következtében fellépő többletvesztés [1].

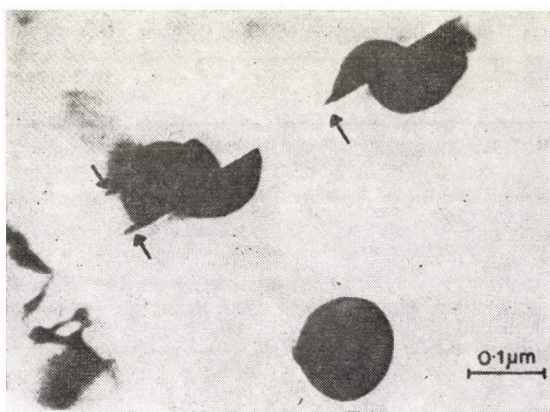
A folyadékoktól eltérően egy kristály többé-kevésbé jól meghatározott folyáshatárral rendelkezik. A részecskék jelenléte következtében a folyáshatár megnő. Mi ebben a rövid összefoglalóban az idegen fázisú részecskéktől származó folyáshatárnövekedés elméletével foglalkozunk. A folyáshatár növekedésének mértéke többek között a részecskék erősségétől, szerkezetétől, méretétől és eloszlásától függ. Ezen mennyiségektől függően a diszlokációk lényegében kétféleképpen juthatnak át a részecskék között. Inkohereus, erős részecskék (pl.: oxidok, nitridek, intermetallikus vegyületek, stb.) határfelületén a mozgó diszlokációk nem haladhatnak át. Az erős részecskék a kristály deformációja során nem deformálódnak. Ilyen részecskék között

a külső feszültség hatására a diszlokációk kihajlanak és a részecskék körüli diszlokációgyűrű hátrahagyásával haladnak tovább (Orowan-mechanizmus). Koherens részecskék esetén a diszlokációk továbbhaladhatnak a mátrixból a részecskébe, mivel a koherens illeszkedés azt jelenti, hogy a csúszósíkok a részecske-mátrix határfelületen folytonosan mennek át. Ilyenkor tehát a mozgó diszlokáció mintegy átvágja a kiválásokat (átvágási mechanizmus). Az Orowan-mechanizmussal keményedő ötvözetben a részecskék körül hátrahagyott diszlokációhurkokra láthatunk példát az 1. ábrán [2].

Az átvágható kiválásokkal keményedő ötvözetekben a csúszósíkban áthaladó diszlokációk sokasága elcsúsztathatja egymáshoz képest a részecskéknél a csúszósík két oldalán elhelyezkedő részeit. A 2. ábrán egy 2% maradó alakváltozásig deformált Al—Cr—Ni ötvözet elnyírt γ részecskéit láthatjuk [3].



1. ábra. Kb. 100 nm átmérőjű diszlokáció hurkok Al_2O_3 részecskék körül Cu—30% Zn ötvözetben [2]



2. ábra. A második fázis részecskéit átvágó diszlokációk elcsúsztathatják a kiválások csúszósík feletti és alatti darabjait egymáshoz képest. Elektronmikroszkópos felvétel Al—19% Ni—6% Cr ötvözetéről 750 °C, 540 óras öregítés és 2% maradó alakváltozás után [3]

Az elmélet számára elvileg egyik mechanizmus értelmezése sem jelent megoldhatatlan nehézséget. A leírás általában két lépésben történik: először egy diszlokáció és egy akadály közötti kölcsönhatást kell megvizsgálni, majd statisztikus módon összegezni kell a kölcsönhatásokat egyrészt a diszlokáció és a vele kölcsönhatásban levő összes akadály között, másrészt a kristályban jelentkező összes diszlokációra. Ami a nehézséget jelenti, az a lehetséges kölcsönhatási mechanizmusok összetettsége. A kölcsönhatások igen sokfélék lehetnek, például a rugalmas állandók, a rácsállandó, a rétegződési hiba energia különbözősége a részecskében és a mátrixban, rendeződés, kémiai kölcsönhatás, stb. Egy adott részecske általában több ilyenféle kölcsönhatásban vesz részt és nehéz meghatározni ezek közül a leglényegesebbet. Ugyancsak nehezíti a leírást a részecskék alakjának sokfélesége (tű, pálcika, lemez, stb.).

Két vagy több kölcsönhatási mechanizmus járulékának összegzése már igen nehéz probléma, ezért a folyáshatár elméleti úton történő előrejelzése általában nem lehetséges. Legtöbb esetben részletes mikroszerkezeti információkra van szükség, amelyek más kísérleti módszerekkel, mint pl. transzmissziós elektronmikroszkópia, röntgen diffrakció, elektromos ellenállás, térfogatváltozás, stb. mérésekből nyerhetők; mielőtt egy elméleti folyáshatárszámítást egyáltalán megkísérrelhetnénk.

További nehézséget jelent, hogy egy reális anyag ritkán tartalmaz csupán egyféle akadályokat. Gyakran felteszik az irodalomban, hogy a különböző akadályoktól származó járulékok lineárisan összegződnek. Ez azonban csak akkor igaz, ha sok gyenge és kevés erős akadály van, mint például a szilárd oldatos keményedés és valamilyen más effektus szuperpozíciója esetén.

A részecskék szilárdságnövelő hatásával foglalkozó alapvető vizsgálatok legnagyobb része egykristályokon nyert eredményekből indul ki, mivel a polikristályos anyagokban a szemcsehatárok is lényegesen befolyásolják a képlékeny tulajdonságokat (4. fejezet), továbbá a szemcsehatárok közelében a kiválások eloszlása gyakran erősen eltér a szemcsén belülitől, ami döntően megváltoztathatja az anyag folyási viselkedését.

A következőkben röviden áttekintjük a kétféle mechanizmus elméletét, majd megvizsgáljuk az eredményeket a kísérleti tapasztalatokkal összevetve.

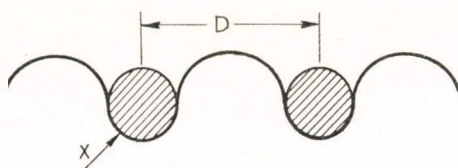
2. AZ OROWAN-FESZÜLTSG

Ebben a pontban megvizsgáljuk a merev akadályoktól származó folyáshatár-növekedést. Ehhez először meghatározzuk a mikroszkópikus mértékű képlékeny alakváltozás létrehozásához szükséges lokális feszültséget, azaz a diszlokációk kihajlását két szomszédos rögzítési pont között. A kihajló diszlokációs szakaszt befolyásolja a következő két akadály között kihajló szakasz, ezt a kölcsönhatást közelítőleg fogjuk figyelembe venni. Megadjuk az akadályon való átjutás kritériumát, az így nyert mikroszkópikus folyásfeszültségből szeretnénk következtetni a makroszkópikus σ folyáshatárra.

2.1. Diszlokációk kihajlása részecskék között

A külső feszültség hatására a diszlokációk elmozdulnak a részecskék irányában, de nem hatolnak be a részecskékbe, mivel a diszlokáció magjának a részecskébe történő belépése sokkal nagyobb energiát venne igénybe, mint a kihajlás. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a részecske egy erős, rövid távú taszítóerőt fejt ki a diszlokációra, ami megakadályozza azt, hogy a diszlokáció belépjen a részecskébe és átvágja azt.

A mikro-folyás feltételét merev akadályok esetére elsőként *Orowan* fogalmazta meg [4, 5]. Gondolatmenete szerint a diszlokáció akkor tud áthaladni az akadályozó



3. ábra. Diszlokáció kihajlása merev akadályok között

idegen fázisú részecskék között, ha két szomszédos részecske közötti szakasza a rá ható feszültség hatására olyan mértékben hajlik ki, hogy görbületi sugara éppen a két akadály közötti távolság felével lesz egyenlő (3. ábra). Ekkor a részecske két oldalán elhelyezkedő diszlokációs szakaszok diszlokációhurkot alkotva egyesülnek és egy ilyen módon keletkező *Orowan-hurok* hátrahagyásával a diszlokáció továbbhalad (1. ábra).

A mikroszkópikus folyásfeszültség tehát az a feszültség, amely a diszlokációt egy $D/2$ sugarú félkörbe képes kihajlítani, ahol D a szomszédos részecskék közötti távolság abban a csúszósíkban, amelyikben a diszlokáció kihajlik (3. ábra). (D -t gyakran helyettesítik a részecskék középpontja közötti távolsággal.) A τ lokális folyásfeszültség tehát a következő

$$\tau = \frac{2T}{Db}, \quad (1)$$

ahol T a diszlokáció vonalmenti feszültsége [6], b a Burgers-vektor abszolútértéke. A vonalmenti feszültség értéke általában jó közelítéssel megegyezik a diszlokációvonal egységnyi hosszúságú szakaszának energiájával [6]:

$$T = \frac{Gb^2}{2}, \quad (2)$$

ahol G a nyírási modulusz. T ezen értékét az (1) egyenletbe helyettesítve kapjuk az ún. *Orowan-feszültséget*:

$$\tau = \frac{Gb}{D}. \quad (3)$$

Látni fogjuk, hogy az eddigiekben vázolt, *Orowan*-tól származó egyszerű gondolatmenetet módosítani kellett a mechanizmusban lényeges további kölcsönhatások figyelembevételével. Ennek ellenére a merev részecskéktől származó szilárdságnövelő hatás becslésére a mai napig is a (3) összefüggést használjuk leggyakrabban.

2.2. További járulékok az Orowan-feszültséghez

A merev részecskék az ötvözet folyáshatárát az Orowan által figyelembe vettén kívül más kölcsönhatások révén is növelik. Ezek közül a két leggyakrabban előfordulót említjük meg: az egyik a részecske körül a mátrixban kialakuló rugalmas feszültségek, a másik a részecske és a mátrix rugalmas állandóinak különbözőségének következtében lép fel.

Mindkét kölcsönhatás kétféle módon befolyásolja az Orowan-feszültséget. A részecske és a diszlokációk közötti rövidtávú taszító kölcsönhatás következtében a diszlokáció nem a részecske-mátrix határfelületen, hanem már attól valamilyen távolságban megakad. Ily módon az effektív részecskeméret megnő, a részecskék közötti D távolság pedig lecsökken. A hosszú hatótávú kölcsönhatás eredményeként a diszlokációvonal helyzeti energiája elhelyezkedésétől függően változik, ami egy additív járulékot ad az Orowan-feszültséghez.

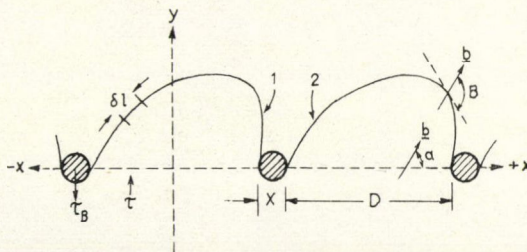
A fenti hatásokat *Ashby* részletesen megvizsgálta [7, 8] és megállapította, hogy járulékok az Orowan-feszültséghez általában kicsi, pontosabb elemzések esetén azonban nem elhanyagolhatók.

2.3. Az Orowan-feszültség kiszámításának finomítása

Az Orowan-feszültség meghatározásánál a 2.2. pontban a diszlokáció vonalmenti feszültségét egyenlőnek tételeztük fel a diszlokáció egységnyi hosszúságú szakaszának energiájával és ezt az energiát a diszlokáció jellegétől függetlenül $Gb^2/2$ -nek vettük. Valójában a diszlokáció energiája függ a diszlokáció jellegétől, vagyis a diszlokáció érintője és Burgers vektora közötti θ szögtől [6,9]. Ha ezt figyelembe vesszük, akkor nem tekinthetjük egyenlőnek az $E(\theta)$ energiát a vonalmenti feszültséggel, $T(\theta)$ -val, amely ugyancsak függvénye az θ szögnek és amelyet *de Wit* és *Koehler* munkája nyomán a következőképpen adhatunk meg [6, 10]:

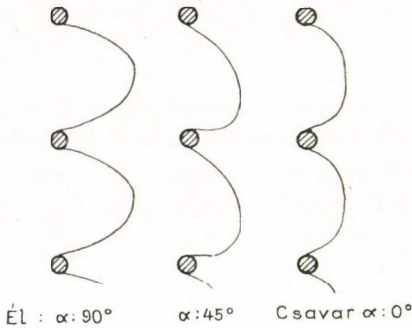
$$T(\theta) = E(\theta) + \frac{d^2 E(\theta)}{d\theta^2}. \quad (4)$$

A 4. ábrán látható δl diszlokációs szakasz akkor van egyensúlyban, ha az alkalmazott feszültség hatásából származó erő, $\tau b \delta l$ egyenlő a diszlokációs szakasz görbülete következtében fellépő $T(\theta) \delta l / r_a$ erővel, ahol r_a a diszlokációs szakasz görbületi sugara. Ezen erők merőlegesek a δl szakaszra és ellentétes irányúak. A görbületet derékszögű koor-



4. ábra. Diszlokáció kihajlása részecskék között

dinátákban kifejezve, a fenti egyenlőségből a diszlokációs szakasz egyensúlyát leíró differenciálegyenletet kapunk, amelynek megoldása megadja a diszlokációvonal alakját [6, 10, 11]. Az 5. ábrán háromféle diszlokáció alakját láthatjuk egyenlő távolságra



5. ábra. Él-, kevert- és csavardiszlokáció kihajlása egyenlő távolságú részecskék között. A részecskék két oldalán elhelyezkedő szakaszok párhuzamosak

elhelyezkedő akadályozó részecskék között.

A kihajló diszlokáció egyensúlyi alakjának és stabilitásának vizsgálata azt mutatja, hogy növekvő τ feszültséggel mindig elérkezünk egy olyan kritikus kihajláshoz, amely után a diszlokáció lavinaszerűen kiterjed a rögzítési pontok között a feszültség további növelése nélkül. Az ehhez tartozó kritikus feszültség tekinthető a folyás feltételének. Látható, hogy ennek meghatározásában döntő szerepe van a kihajlott diszlokációs szakasz egyensúlyi alakja exakt ismeretének. Ez egy nem lineáris integrodifferenciálegyenlet megoldását teszi szükségessé, amely az eddigiekben csak speciális esetekben [12, 13, 14], illetve számítógépes szimulációval sikerült [15, 16].

A helyzetet tovább nehezíti az, hogy a kiválás két oldalán kihajló diszlokációs szakaszok is kölcsönhatnak egymással. Ezért ahhoz, hogy meghatározzuk a kritikus feszültséget, meg kell adni egy közelítő kritériumot arra nézve, hogy mikor jutott át a diszlokáció az akadályon. Ashby feltételezte [11], hogy a kritikus helyzet az, amikor a fokozódó mértékű kihajlás során a részecskét két oldalról körülvevő diszlokációs szakaszok párhuzamossá válnak, ez a helyzet igényli a legnagyobb külső feszültséget. Az 5. ábrán látható diszlokációk éppen ebben a kritikus helyzetben vannak. Ha a diszlokációk továbbmozdulnak ezen helyzetből, akkor minden részecskénél egy-egy dipól alakul ki, melynek szélessége megegyezik a részecskék x átmérőjével (4. ábra). Ily módon egy eredetileg csavar jellegű diszlokáció egy éldipólt, egy eredetileg éldiszlokáció pedig egy csavar dipólt hoz létre. A kritikus feszültség tehát éppen az a feszültség lenne, amely képes a megfelelő x szélességű, egymástól D távolságban elhelyezkedő dipólokat meghosszabbítani. Ezek szerint a részecskék közötti áthaladáshoz szükséges lokális feszültség az éldiszlokációknak, illetve a csavardiszlokációknak megfelelő $\tau_{\text{él}}$ és τ_{csavar} értékek közé esik. Rugalmas izotrópiát feltételezve ezek az értékek [11]:

$$\tau_{\text{él}} = \frac{1}{2\pi} \frac{Gb}{D} \ln \frac{x}{r_0}; \quad (5)$$

$$\tau_{\text{csavar}} = \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \frac{Gb}{D} \ln \frac{x}{r_0}, \quad (6)$$

ahol r_0 a belső levágási sugár, ν a Poisson-szám. A $\tau_{\text{csavar}}/\tau_{\text{él}}$ hányados 1,5, amit a rugalmas anizotrópia (pl. réz esetén) még tovább növel.

Az Ashbytól származó dipólkritérium egy lehetőség a szomszédos kihajló szakaszok (pl. a 4. ábrán 1 és 2-vel jelölt szakaszok) közötti kölcsönhatás figyelembevételére, amely az áthaladást megkönnyíti. Az (5) és (6) kifejezések helyesen adják meg a részecske két oldalán elhelyezkedő párhuzamos szakaszok kiterjesztéséhez szüksé-

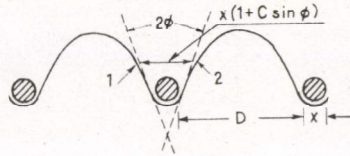
ges feszültséget. A megfontolás hibája, amint erre később *Ashby* [8] mutatott rá az, hogy nem ez a kritikus helyzet. A kritikus elrendezés hamarabb jelenik meg a kihajlás során és nagyobb lokális feszültség tartozik hozzá.

Vizsgáljuk meg a kihajlás folyamatát a 6. ábra alapján. Az áthaladás folyamatát az ábrán látható Φ szög segítségével jellemezhetjük. (A dipól kritériumnál a $\Phi=0$ -val jellemzett helyzetet tekintettük kritikusnak.) Egyszerűsítésként tegyük fel ismét, hogy az E energia nem függ a θ szögtől, így a diszlokáció által a részecskére kifejtett erő:

$$F = 2E \cos \Phi. \quad (7)$$

A kihajló szakaszok közötti kölcsönhatást elhanyagoljuk, ekkor E független a Φ -től, értéke közelítőleg a következőképpen adható meg [6, 8]:

$$E = \frac{Gb^2}{4\pi} \ln \frac{D}{r_0}. \quad (8)$$



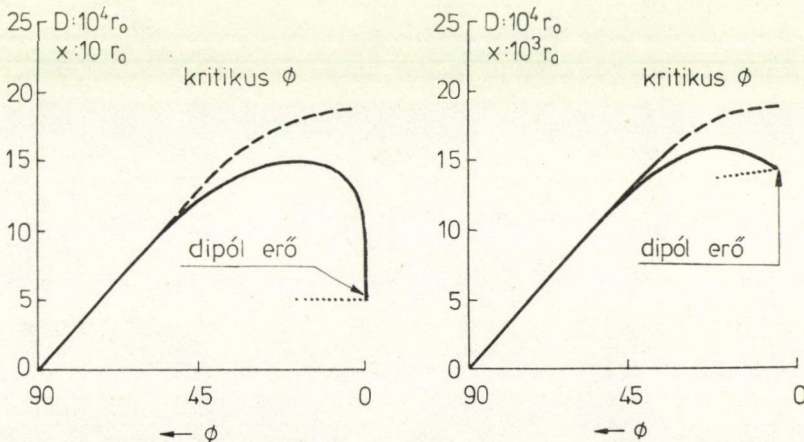
6. ábra. A Φ szög jellemzi az akadályon való áthaladás mértékét

Ha most figyelembe vesszük a kihajló szakaszok közötti kölcsönhatást, akkor az E csökken. A kölcsönhatás függ a kihajló szakaszok közötti távolságtól és így Φ -tól is (6. ábra). A kihajló 1 és 2 szakaszok távolsága (6. ábra) $x(1 + C \sin \Phi)$, ahol a C konstans értéke attól függ, hogy hol vesszük fel a szakaszokat. Az $E(\Phi)$ függvény így közelítőleg az alábbi módon írható:

$$E(\Phi) = \frac{Gb^2}{4\pi} \ln \left[\frac{x}{r_0} (1 + C \sin \Phi) \right]. \quad (9)$$

Ha azonban $\Phi = \pi/2$, akkor a külső levágási sugár éppen D -vel egyenlő, éppúgy, mint a (8) kifejezésben. Ez meghatározza a C konstans értékét és így

$$E(\Phi) = \frac{Gb^2}{4\pi} \ln \left\{ \frac{x}{r_0} \left[1 + \left(\frac{D}{x} - 1 \right) \sin \Phi \right] \right\}. \quad (10)$$



7. ábra. A részecskére ható F erő $(Gb^2)/4\pi$ egységekben a kihajlást jellemző Φ szög függvényében. $D = 10^4 r_0$; $x = 10 r_0$ (a), illetve $10^3 r_0$ (b)

A (7) és (10) összefüggések alapján meghatározott F erőt a 7. a és b ábrákon láthatjuk. Az ábrákon szaggatott vonal jelöli a (8) kifejezés alapján (a kölcsönhatás elhanyagolásával) számított erőt. Az előzőekben említett dipólkritérium pedig a $\Phi = 0$ esetnek felel meg, amikor a külső levágási sugár x . Az ábra alapján látható, hogy az F erő és ezzel együtt a feszültség maximuma $\Phi \approx 20^\circ$ -nál jelenik meg és az erő maximális értéke meghaladja a dipólerő értékét.

Az áthaladáshoz szükséges lokális τ' feszültség értékét most már egyszerűen felírhatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a D hosszúságú diszlokációra ható $\tau' bD$ erő egyenlő az akadály által kifejttet F erővel:

$$\tau' bD = F. \quad (11)$$

A (7), (10) és (11) egyenletek alapján tehát pl. éldiszlokáció esetén:

$$\tau'_{el} = \frac{Gb}{2\pi D} \cos \Phi \ln \left\{ \frac{x}{r_0} \left[1 + \left(\frac{D}{x} - 1 \right) \sin \Phi \right] \right\}, \quad (12)$$

ami ugyanúgy változik a Φ függvényben, mint a 7. ábrán látható F erő. Csavardiszlokációra az eredmény a (12) kifejezés $1/(1-\nu)$ -szerese [17]. A kritikus helyzetet tehát az erő maximumához tartozó Φ^* szög jellemzi, a lokális kritikus feszültséget pedig úgy kaphatjuk meg, ha a Φ^* értékét a (12) kifejezésbe helyettesítjük.

A fenti, Ashbytől származó analízis lényege tehát az, hogy a kihajló diszlokációs szakaszok közötti kölcsönhatás (általában nem elhanyagolható mértékben) módosítja az Orowan-feszültség értékét, amely ily módon a részecskék átlagos távolságán kívül azok méretétől is függ. A kihajló szakaszok kölcsönhatását a fentiekben csak közelítőleg vettük figyelembe. Foreman és Makin [15] a számítógépes szimuláció módszerét alkalmazva vizsgálta az akadályok között kihajló diszlokációs szakaszok alakját és stabilitását. Ezzel a módszerrel a kölcsönhatás pontosan számolható. A számítógépes vizsgálat eredménye alapvetően megegyezik a fenti közelítő eredményekkel. Megállapíthatjuk tehát, hogy a kritikus szög, Φ^* mindig nagyobb, mint 0 (0 és 30° közé esik), de értéke csökken, ha a részecskék közötti D távolság nő és ha az x/D hányados nő. A 7. ábrából látható, hogy a lokális kritikus feszültség nagyobb, mint a dipólkritériumnak megfelelő (5), (6) feszültségek. Foreman és Makin eredményei ezt a következtetést is megerősítik.

2.4. A makroszkópikus folyáshatár meghatározása

A fentiekben meghatároztuk a mikroszkópikus folyáshatárt, vagyis azt a lokális kritikus feszültséget, melynek hatására egy diszlokáció két rögzített akadályozó részecske között kihajlás útján áthalad. Ha a részecskék azonos távolságban helyezkednének el egymástól és méretük is egyenlő lenne, akkor a kristálynak egy élesen meghatározott folyáshatára lenne, melynek értékét az előzőekben elemeztük. Egy valódi kristályban azonban a részecskék távolságának és méretének valamilyen eloszlását figyelhetjük meg, ennek következtében a folyáshatár valamilyen átlagos távolságnak és méretnek megfelelő érték.

Minden egyes részecskepárhoz tartozik egy kritikus feszültség. Egy meghatározott σ külső feszültség esetén egy diszlokációs szakasz, amely átjutott egy akadályozó

részecskepáron eljut két vagy több újabb részecskéig. Ha ezen újabb akadályok közül legalább egy átjárható a σ feszültség mellett, akkor a diszlokáció továbbhalad, ha nem, megáll. Foreman és Makin [15], valamint Kocks [18] vizsgálták ezt a problémát és megállapították, hogy kiterjedt elcsúszás az alkalmazott feszültség azon értékénél jelenik meg, amelynél a jelenlevő akadálypárok harmada átjárható. Megállapították továbbá, hogy ha a $\Phi=0$ -val jellemzett helyzetet tekintjük kritikusnak (dipól-kritérium), akkor a σ makroszkopikus folyáshatár és a τ lokális kritikus feszültség között egy 0,85 értékű statisztikus faktorról adhatjuk meg a kapcsolatot:

$$\sigma = 0,85\tau, \quad (13)$$

ahol τ az átlagos részecsketávolságnak, \bar{D} -nak megfelelő lokális Orowan-feszültség. A 2.3. fejezetben beláttuk, hogy a kritikus helyzethez tartozó $\Phi^* > 0$. Ha ezt figyelembe vesszük, akkor τ értéke nő. Foreman, Makin és Kocks megállapították azonban, hogy ha Φ kritikus értéke nagyobb mint nulla, akkor a statisztikus faktor értéke kisebb, mint 0,85. Ha tehát figyelembe vesszük, hogy $\Phi^* > 0$, akkor a (13) kifejezésben τ értéke nő, a statisztikus faktor viszont csökken, a két változás közelítőleg kiegyenlíti egymást.

A fentiek alapján a rendezetlen eloszlású, merev kiválások által előidézett makroszkopikus folyáshatárnövekedést a részecskék átlagos átmérőjének és távolságának függvényében a következő kifejezésekkel adhatjuk meg él-, illetve csavardiszlokációk esetére:

$$\Delta\sigma_{\text{él}} = \sigma_{\text{él}} - \sigma_0 = 0,85 \frac{Gb}{2\pi\bar{D}} \ln\left(\frac{x}{r_0}\right); \quad (14)$$

$$\Delta\sigma_{\text{csavar}} = \sigma_{\text{csavar}} - \sigma_0 = 0,85 \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)\bar{D}} \ln\left(\frac{x}{r_0}\right), \quad (15)$$

ahol tehát b a Burgers-vektor abszolútértéke a mátrixban, G a mátrix nyírási modulusa, ν a Poisson-szám, x a részecskék átlagos síkbeli átmérője, r_0 a belső levágási sugár, melynek értéke b nagyságrendjébe esik.

A részecskék átlagos mérete általában sokkal kisebb átlagos távolságuknál. Ha ez nem áll fenn, akkor a (14) és (15) kifejezésekben D helyébe mindenütt $(D-x)$ -et kell írni. A fenti képletekben szereplő σ_0 paraméter tartalmaz minden további járulékot az ötvözet folyáshatárához, mint például a mátrix anyagának az oldott ötvöző atomok által megnövelt folyáshatárát, valamint a sajátfeszültségektől és az alakítási keményedéstől származó szilárdságnövekedést, bár ezen utóbbi esetben, mint a bevezetésben már utaltunk rá, a lineáris összegzés biztosan csak közelítőleg ad helyes eredményt.

A (14) és (15) kifejezések teljesen rendezetlen részecskeeloszlás esetén érvényesek. A rendezetlen eloszlástól való eltérések lényegesen megváltoztathatják a szilárdságnövekedést. A rendezett eloszlás irányába való eltérés kis mértékben fokozza a szilárdságnövekedést. A kiválások vagy részecskék csoportosulása (pl. szemcsehatárok vagy diszlokációk mentén) viszont jelentősen csökkentheti az Orowan feszültséget.

A fenti kifejezésekben külön adtuk meg a folyáshatár-növekedést él- és csavardiszlokációk esetére. Foreman, Hirsch és Humphreys megmutatták azonban [19], hogy ha a diszlokációk jellegük szerinti eloszlása véletlenszerű, akkor a folyáshatár-növekedés a (14) és (15) kifejezések geometriai középértéke lesz.

Elektronmikroszkópos vagy röntgen kisszögű szórás vizsgálatokból a kiválások átlagos méretét és térfogati hányadát lehet meghatározni. Ha gömb alakú részecskék átlagos sugara R , akkor egyszerűen kiszámítható, hogy egy csúszósík és a részecskék metszeteinek átlagos területe $2R^2\pi/3$. Ha a szomszédos részecskék csúszósíkbeli átlagos távolsága $\bar{D} \gg 2R$, akkor a kiválások f térfogati hányada a következőképpen írható:

$$f = \frac{2R^2\pi}{3\bar{D}^2} \approx 2 \left(\frac{R^2}{\bar{D}^2} \right). \quad (16)$$

Így a merev részecskéktől származó folyáshatárnövekedést a mérhető f és R paraméterek segítségével is kifejezhetjük:

$$\Delta\sigma = 0,85 \sqrt{\frac{f}{2}} \frac{G}{2\pi \sqrt{1-\nu}} \frac{b \ln(1,57R/r_0)}{R(1-1,57 \sqrt{f/2})}. \quad (17)$$

3. ÁTVÁGÁSI MECHANIZMUS

Az előzőekben már láttuk, hogy ha egy részecske mellett a diszlokáció a külső feszültség hatására kihajlik egy Φ szöggel jellemzett helyzetig (6. ábra), akkor a részecske és a diszlokáció között fellépő erő,

$$F = 2T \cos \Phi, \quad (18)$$

ahol T a diszlokáció vonalmenti feszültsége. Az eddigiekben vizsgált merev részecskék esetén eleve feltételeztük, hogy a részecske a kihajlási folyamat során fellépő maximális erő hatására sem deformálódik. Legyen a részecske erőssége (az a maximális erő, amellyel a részecske a diszlokáció mozgását akadályozni képes) K , és Φ^* az Orowan-mechanizmus kritikus helyzetét jellemző szög. Ha

$$K < 2T \cos \Phi^* \quad (19)$$

akkor a diszlokáció már egy Φ^* -gal jellemzettnél kisebb mértékű, $\Phi_c < \Phi^*$ kihajlás esetén átvágja a részecskét. Ebben az esetben az

$$F(\tau_c) = K = 2T \cos \Phi_c \quad (20)$$

egyenletben implicit módon megadott τ_c feszültség lesz az a küszöbfeszültség (folyáshatár), melynél nagyobb feszültséget alkalmazva a diszlokációk a részecskéket átvágják. Az átvágás általában csak abban az esetben lehetséges, ha a részecskék legalább részlegesen koherensek az alaplátrixszal. Mint már a (19) összefüggésnél láttuk, a részecskék erőssége ilyenkor az Orowan-mechanizmus fellépéséhez szükségesnél kisebb. Így arra következtethetnénk, hogy a koherens kiválások kisebb ellenállást jelentenek a diszlokációmozgással szemben, mint a merev részecskék. A koherens kiválások diszperzitása és térfogati hányada azonban általában lényegesen meghaladhatja az inkoherens kiválásokét és így igen magas szilárdsági értékek érhetők el.

A kiválások K erőssége a diszlokáció és a részecske között fellépő kölcsönhatásoktól függ. Ezeket a kölcsönhatásokat a kiválások természete (szerkezete, összetétele, stb.) és a mátrixhoz képesti tulajdonságai határozzák meg. Az alábbiakban összefoglaljuk a fontosabb kölcsönhatásokat [6, 20, 21].

3.1. Kölcsönhatások kiválások és diszlokációk között

1. Méret hatás [21]

Egy koherens kiválásban a rácsparaméter általában különbözik a mátrixétól, s emiatt deformációkat hoz létre a környezetében. Az így kialakuló feszültségtér hatására a kiválás erőit gyakorol a diszlokációra. A fellépő maximális erő arányos a részecske sugarával és a rácsparaméter relatív eltéréssel.

2. Modulusz hatás [22]

A diszlokáció hosszegységenkénti energiája arányos Gb^2 -tel (G a nyírási modulusz) [6]. Mivel a G modulusz értéke a kiváláson belül általában különbözik a mátrixétól, ezért a diszlokáció energiája különböző lesz, ha a kiváláshoz közel vagy távol van. Ez ismét erő fellépéséhez vezet, amely arányos a relatív modulusz eltéréssel.

3. Rendeződési kölcsönhatás [23]

Ha a kiválásnak rendezett szerkezete van, akkor a kiválás átvágása antifázishatár képződését eredményezi. Legyen a kiválás átlagos szélessége d , akkor, ha a diszlokáció b -vel előrehalad a kiválásban, az antifázishatár bd -vel megnő. Az ehhez szükséges energia $\gamma_r bd$, ahol γ_r a fajlagos antifázishatár energia. Ez a hatás ismét ellenállást jelent a kiválás átvágásával szemben.

4. A kiválás-mátrix határfelület növekedése [23]

Ha a diszlokáció átvágja a kiválást, akkor a kiválás-mátrix határfelület megnövekszik. Ha a fajlagos határfelületi energia γ , akkor ebből a hatásból γb -vel arányos maximális erő lép fel [24].

5. A rétegződési hiba energiák különbsége [25]

A kiválásokban a rétegződési hiba energia jelentősen különbözhet a mátrixétól. Az átvágási folyamat során a diszlokáció kiváláson belüli részének kiterjedtsége megváltozik. Az ebből származó erő arányos a részecske sugarával és a rétegződési hiba energia különbséggel.

6. Dipól képződés hatása [23]

Ha a csúszósík a mátrixban és a kiválásban nem párhuzamos, akkor egy általában rögzített lépcső keletkezik a diszlokáción a két csúszósík összekapcsolására. Ezért a diszlokáció továbbhaladása során egy dipól jön létre. Az ebből származó maximális erő a diszlokációvonal és Burgers-vektor által bezárt szögtől függ.

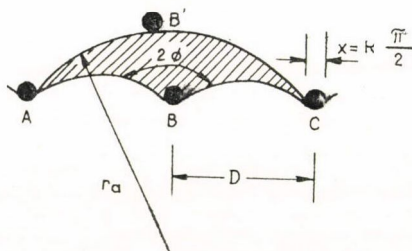
A kiválások átvágásával szembeni ellenállását jellemző fenti hatások általában több-kevesebb súllyal egyidejűleg jelentkeznek. Bizonyos esetekben azonban csak egy-egy jelentős közülük. Pl. Al—Ag ötvözetben csak a rétegződési hiba energiák különböznek jelentősen (5. mechanizmus), míg Al—Cu ötvözetekben, GP—I zónák esetén a határfelületi energia a domináns [26].

Valamennyi mechanizmusban van azonban egy közös vonás. Bármilyen diszlokáció-részecske kölcsönhatás során az átvágáshoz meghatározott energiabefektetésre van szükség, amely kapcsolatba hozható a kiválás erősségét jellemző K erővel. A folyáshatár meghatározásában ezt a ténytet használjuk ki.

3.2. A folyáshatár kiszámítása

Tegyük fel, hogy a diszlokáció megtorpan az A , B , C részecskék előtt (8. ábra). Ha a B kiválásnál teljesül a (20) egyenlet, akkor a diszlokáció átvágja a B részecskét, továbbhalad és addig hajlik ki, amíg egy következő B' részecskét el nem ér. Stacionárius állapotban egy kiválásról leszakadó diszlokáció tehát átlagosan mindig D távolsággal mozdul tovább, ami viszont azt jelenti, hogy a részecskék rendezetlen eloszlása esetén egy ilyen elemi lépés során a diszlokáció által súrolt terület átlagosan egyenlő az egy részecskére jutó átlagos területtel [27]:

$$A_S = D^2. \quad (21)$$



8. ábra. Diszlokáció áthaladása átvágható részecskék között

A diszlokáció által súrolt területet kiszámíthatjuk úgy is, hogy kör alakú, r_a sugarú kis kihajlásokat tételezünk fel az AB és BC részecskék között (8. ábra). A köralak feltételezésével elhanyagoljuk az anizotrop vagy viszkózus hatásokat a diszlokáció alakjára

[24]. Figyelembe véve, hogy az R sugarú részecskék átlagos átmérője a csúszósíkban $R\pi/2$, a számítás a következő eredményre vezet [27]:

$$A_S = \frac{1}{2} \frac{(D - R\pi/2)^2}{r_a}. \quad (22)$$

Az r_a görbületi sugar a következő kifejezéssel adható meg [6] (vonalmonti feszültség feltétel):

$$r_a = \frac{T}{\tau b}. \quad (23)$$

A diszlokáció által a kiválás részecskére gyakorolt erő egyenlő a $D - R\pi/2$ hosszúságú, kihajló diszlokációs szakaszra ható erővel és így a (18) egyenlet szerint:

$$2T \cos \Phi = \tau b (D - R\pi/2). \quad (24)$$

A (21)-(24) egyenletekből megkaphatjuk a nyírófeszültség és a Φ szög közötti kapcsolatot:

$$\tau b = \frac{2T}{D} \cos^{3/2} \Phi. \quad (25)$$

A K erősségű részecskét a diszlokáció akkor vágja át, ha a kihajlást jellemző szög eléri azt a Φ_c értéket, melyre

$$K = 2T \cos \Phi_c. \quad (26)$$

A (25) és (26) összefüggésekből megkaphatjuk a K erősségű részecskéktől származó folyáshatár-növekedést:

$$\Delta\sigma = \frac{K^{3/2}}{2^{1/2} T^{1/2} D b}. \quad (27)$$

Mint már a 3.1. pontban említettük, a részecske K erőssége jellemezhető az átvágáshoz szükséges fajlagos felületi energiával, Γ -val is. Tegyük fel ugyanis, hogy a K erő dx távolsággal továbbmozdítja a diszlokációt, ekkor a diszlokáció maximálisan a részecske $dx \cdot R\pi/2$ nagyságú területét metszi át, tehát a K erő által végzett munka egyenlő $\Gamma \cdot dx \cdot R\pi/2$ -vel és így

$$K = \Gamma R \frac{\pi}{2}. \quad (28)$$

Felhasználva a (16) összefüggést és alkalmazva a szokásos $T = Gb^2/2$ közelítést az átvágható kiválások által okozott folyáshatár-növekedésre a következő eredményt kapjuk:

$$\Delta\sigma = 1,44G \left(\frac{\Gamma}{Gb} \right)^{3/2} \left(\frac{fR}{b} \right)^{1/2}. \quad (29)$$

Megjegyezzük, hogy a (28) összefüggés ekvivalens annak feltételezésével, hogy a 3.1. pontban ismertetett kölcsönhatások eredőjeként adódó K részecskeerősség arányos a kiválások méretével.

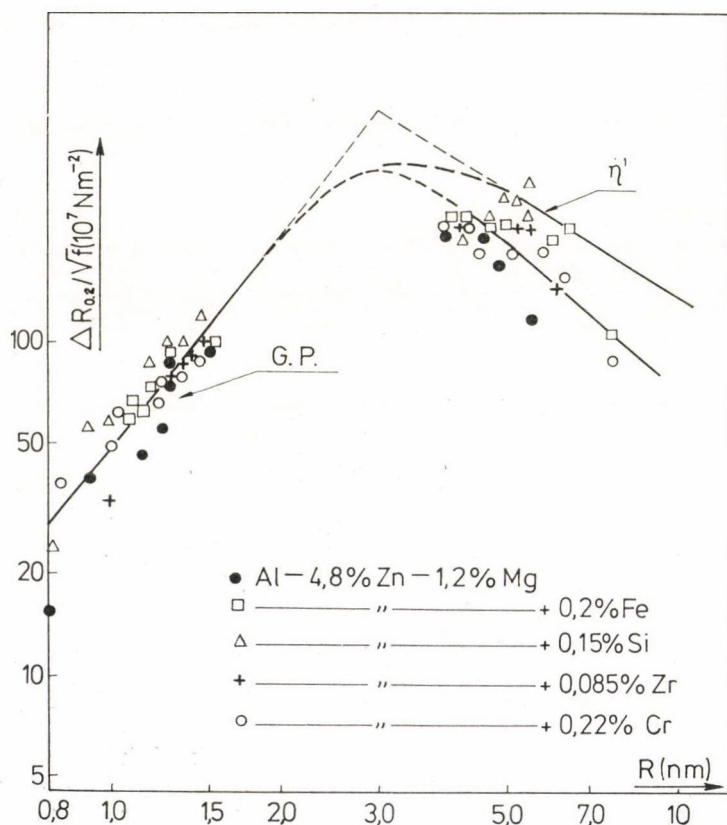
4. KÍSÉRLETI EREDMÉNYEK

Az Orowan-mechanizmusból származó folyáshatár-növekedésre vonatkozó (17) kifejezés, valamint az átvágási mechanizmusra vonatkozó (29) egyenlet a mérhető folyáshatár-növekedést a részecskék átlagos méretének és térfogati hányadának függvényeként adja meg. Az átlagos részecskeméret és a térfogati hányad transzmissziós elektronmikroszkópiai vagy röntgen kisszögű szórás mérésekből meghatározható mennyiségek, így lehetőség van az elméleti összefüggések kísérleti ellenőrzésére. A tapasztalatok azt mutatják [8, 26, 28], hogy a fent vázolt megfontolások a lényegyet tekintve jól írják le a lejátszódó folyamatokat.

A kétféle mechanizmusból származó folyáshatár-növekedés között az az alapvető különbség, hogy az Orowan-mechanizmusnál $\Delta\sigma/\sqrt{f}$ az átlagos részecskeméret reciprokával, míg az átvágási mechanizmusnál az átlagos részecskeméret négyzetgyökével arányos. Ilyen módon a $\Delta\sigma/\sqrt{f}$ mennyiséget a részecskeméret függvényében ábrázolva a kétféle mechanizmus megkülönböztethető.

Vizsgáljuk most meg az eddigi eredményeinket a hazai alumíniumgyártás egyik leglényegesebb termékén, a közepes szilárdságú Al—Zn—Mg ötvözeteken nyert kísérleti adataink alapján. Ezek az ötvözetek általában 3-5 s% Zn-et és 1-2 s% Mg-ot tartalmaznak. A szilárdságnövekedést az alumínium mátrixszal teljesen koherens GP zónák idézik elő természetes öregítés, illetve az η' átmeneti fázis részlegesen koherens részecskéi a szokásos (140—180 °C közötti hőmérsékleteken történő) mesterséges öregítés esetén. Az ötvözetekben a részecskék térfogati hányadát és átlagos méretét röntgen kisszögű szórással határoztuk meg. A folyáshatár növekedést szakító vizsgálatokkal mértük, folyáshatárnak a 0,2% maradó alakváltozáshoz tartozó nyújtófeszültséget tekintettük. Vizsgálatainkat polikristályos minták felhasználásával végeztük, ezért az eredményeket csak úgy vethetjük össze az egykristályok esetén érvényes (17) és (29) összefüggésekkel, ha figyelembe vesszük az m Taylor-faktort, amellyel az egykristályokra vonatkozó $\Delta\sigma$ és a polikristályos anyagokra vonatkozó ΔR feszültségek közötti összefüggés így írható [6, 29]:

$$\Delta R = m\Delta\sigma, \quad (30)$$



9. ábra. A $\Delta R_{0.2}/\sqrt{f}$ paraméter az átlagos részecskesugár függvényében Al—Zn—Mg ötvözetek esetén

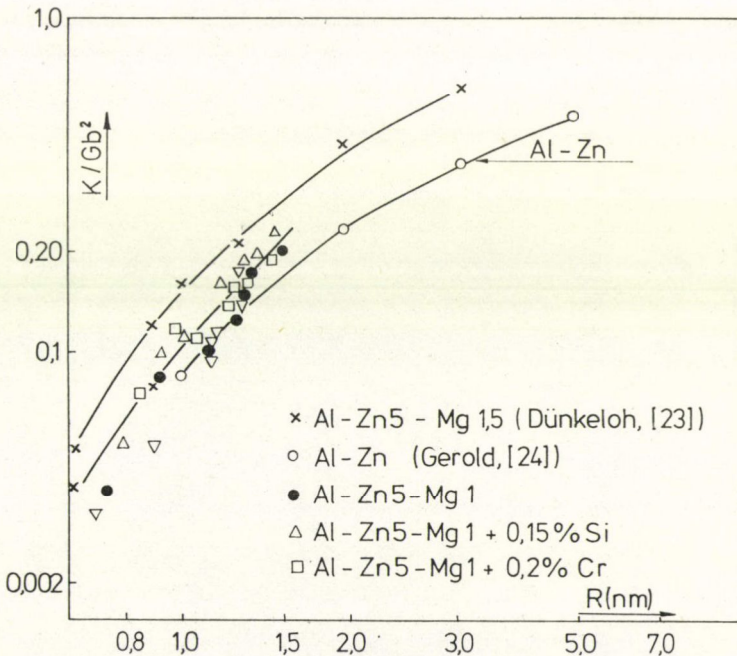
ahol az m értéke jó közelítéssel 3. Az alábbiakban a $\Delta R_{0,2}$ mindig a szilárd oldat állapothoz viszonyított folyáshatár növekedést jelenti a kiválásos folyamat különböző szakaszaiban. A számításoknál a Taylor-faktort mindig az $m=3$ értékkel vettük figyelembe.

A 9. ábrán a $\Delta R_{0,2}/\sqrt{f}$ mennyiséget az átlagos részecskeméret függvényében láthatjuk, log-log léptékben. Látható, hogy $R \lesssim 3$ nm értékig $\Delta R_{0,2}/\sqrt{f}$ monoton növekszik, $R \gtrsim 3$ nm értéknél pedig monoton csökken a sugár növekedésével. Az első esetben az ötvözetet GP zónák, a másodikban az η' fázis részecskéi keményítik. A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy a GP zónák esetében az átvágásos mechanizmus, az η' kiválások esetében viszont az Orowan-mechanizmus működik.

Az átvágásos mechanizmus esetében a (25)–(29) kifejezések alapján kifejezhetjük a részecskék erősségét jellemző K értékét:

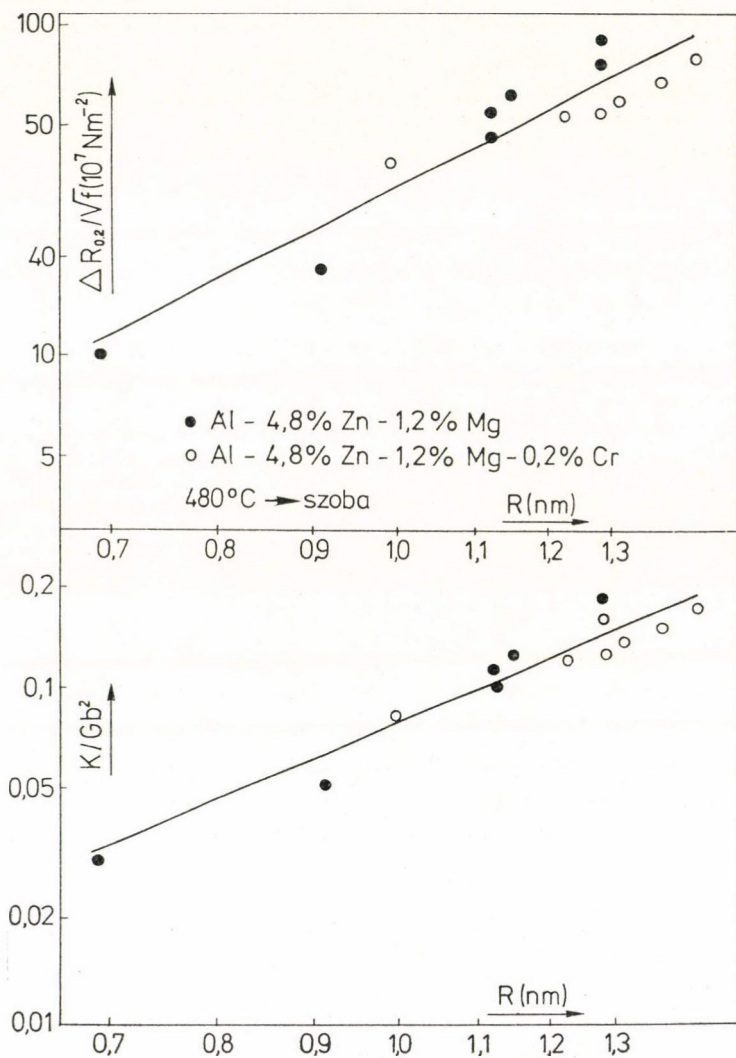
$$\frac{K}{Gb^2} = 0,157 \left(\frac{R \cdot \Delta R_{0,2}}{\sqrt{f}} \right)^{2/3}, \quad (31)$$

ahol a G nyírási modulus értéke alumínium esetén szobahőmérsékleten $2,7 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$, $b=0,286$ nm. A Dünkeloh, Kralik és Gerold [30] adatai, valamint saját Al–Zn–Mg ötvözetekre vonatkozó eredményeink, illetve Haberkorn és Gerold [31] Al–Zn ötvözeteken végzett mérései alapján kiszámított K/Gb^2 értékeket az átlagos részecskesugár függvényében a 10. ábrán láthatjuk. Az ábra mutatja, hogy jó egyezés



10. ábra. A K/Gb^2 paraméter R függvényében Al–Zn–Mg és Al–Zn ötvözetek esetén, GP zónákra nemesített állapotokban

van az általunk meghatározott mennyiségek és az említett szerzők eredményei között, annak ellenére, hogy eredményeik egykristályok vizsgálatából származnak. Ez az összehasonlítás azt is mutatja, hogy a Taylor-faktor értékét helyesen vettük fel. A Dünkeloh és munkatársai által Al—Zn—Mg-on mért értékek kb. 30%-kal magasabbak, mint az általunk meghatározottak. Ezt részben megmagyarázza az, hogy ők 77 K-en végezték a mechanikai méréseket, mi pedig 300 K-en. A 300 K hőmérsékleten mért



11. ábra. A $\Delta R_{0,2}/\sqrt{f}$ és a K/Gb^2 paraméterek változása az átlagos részecskesugár függvényében Al—Zn—Mg ötvözetekben, edzés utáni szobahőmérsékleti öregítés során

K értékek vizsgálataink szerint mintegy 20 %-kal alacsonyabbak, mint a 77 K-en mérések [32, 33].

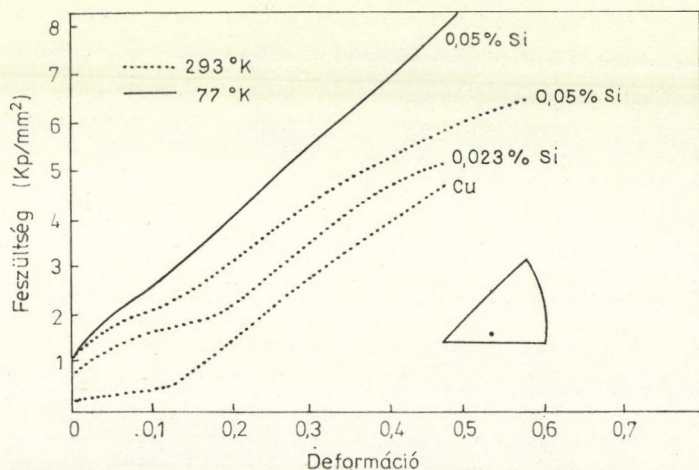
A 11. ábrán a $\Delta R_{0,2}/\sqrt{f}$ és a K/Gb^2 paramétereket láthatjuk edzés utáni szobahőmérsékleti öregítés során. A log—log ábrázolásban nyert lineáris összefüggés azt mutatja, hogy mindkét mennyiség a részecskeméret hatványától függ. A két hatványkitevő között a (29) és (31) kifejezések szerint fennáll az $m=1,5n-1$ kapcsolat. A 11. ábrán látható adatok alapján m és n értékére egyaránt 2 adódik. A kísérletileg nyert $K \sim R^2$ összefüggést a (28) kifejezéssel egybevetve látszik, hogy a Γ fajlagos átvágási munka is függ az átlagos részecskesugártól és — legalábbis szobahőmérsékleti öregítés során — Γ a részecskesugárral arányosan nő.

Az ilyen jellegű analízis elvégzése gyakorlati szempontból is hasznos. A példaképpen felhozott Al—Zn—Mg ötvözeteken nyert eredmények alapján például megállapíthatjuk, hogy az ötvözetben akkor érhetjük el a maximális szilárdságnövekedést, ha kb 3 nm sugarú részecskéket hozunk létre minél nagyobb térfogati hányaddal. Így a hasonló vizsgálatok alapján tudatosan tervezhetők ötvözetek és hőkezelési eljárások az optimális szilárdsági paraméterek elérésére [32] [33].

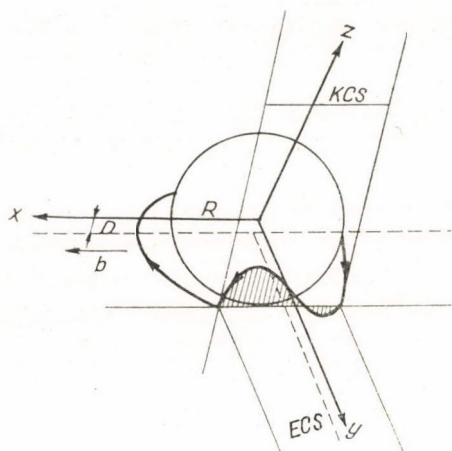
5. ALAKÍTÁSI KEMÉNYEDÉS

Az ötvözetek alakítási keményedésének értelmezése sokkal bonyolultabb feladat, mint a kiválásos keményedés elméleti leírása. A nehézséget az okozza, hogy nem ismerjük tökéletesen a deformációs folyamat során kialakuló diszlokáció elrendeződést meghatározó tényezőket és nem lehet általános kijelentést tenni arra nézve, hogy a sokféle lehetséges diszlokáció-diszlokáció kölcsönhatás közül az adott esetben melyik a lényeges.

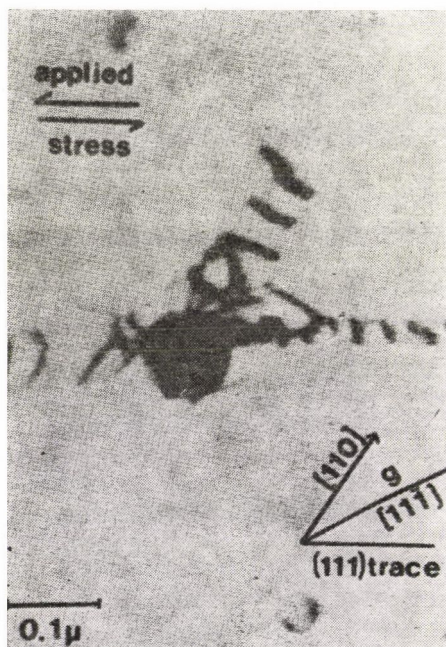
Az idegen fázisú részecskéket tartalmazó ötvözetekre vonatkozóan megállapíthatjuk, hogy a könnyen átvágható, deformálható részecskék nem befolyásolják lényegesen az alakítási keményedés folyamatát. A merev részecskéknek ezzel szemben



12. ábra. Cu és Cu—SiO₂ egykristályok feszültség-deformáció görbéi [34]



13. ábra. Prizmatikus hurok képződése kétszeres keresztcsúszással [2]



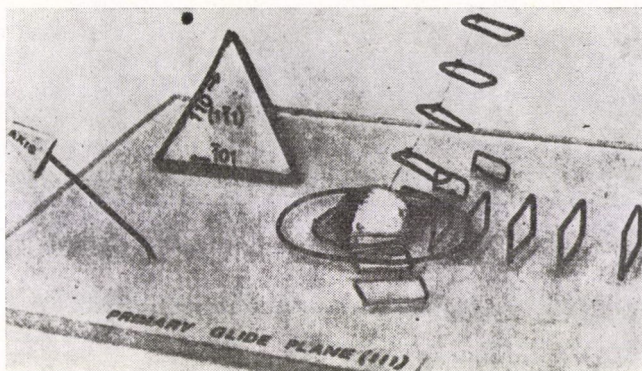
14. ábra. Prizmatikus hurok elsődleges és másodlagos Burgers-vektorokkal SiO_2 részecskéket tartalmazó Cu—20% Zn egykristályban [36]

igen erős hatása van a deformációs folyamatra. A 12. ábrán tiszta réz és különböző mennyiségű SiO_2 részecskéket tartalmazó réz egykristályok feszültség-deformáció görbéit láthatjuk [34]. A SiO_2 részecskéket a különböző mennyiségű Si-t tartalmazó Cu—Si ötvözetek belső oxidálásával hozták létre. Ez az ábra és számos további kísérleti tapasztalat bizonyítja [1], hogy az alakítási keményedés sebessége (pontosabban fogalmazva a feszültség-deformáció görbének meredeksége) merev részecskéket tartalmazó ötvözetekben lényegesen nagyobb, mint a tiszta fémekben. Ezt a jelenséget számos szerző vizsgálta elsősorban oxidrészecskéket tartalmazó réz ötvözeteken [35]. Az oxidrészecskék (Al_2O_3 , SiO_2 , BeO) mérete általában 50 nm-nél nagyobb volt.

Elektronmikroszkópos vizsgálatok azt mutatták [36], hogy növekvő deformációval először Orowan-hurkok keletkeznek, majd prizmatikus huroksorozatok, melyeknek Burgers vektora az elsődleges csúszási rendszerbe esik (itt a legnagyobb a csúsztatófeszültség), végül másodlagos diszlokációk és üregek képződnek. A folyamat kezdetén kialakuló Orowan-hurkok nagy feszültségeket eredményeznek a részecske-mátrix határfelület közelében. Ezek a feszültségek különböző mechanizmusokkal szűnhetnek meg [1, 36, 37]. Az elsődleges prizmatikus hurkok kétszeres keresztcsúszással jönnek létre (13. ábra) [2, 38]. A másodlagos diszlokációk a határfelületről történő diszlokáció kibocsátással vagy a részecske körül kialakuló kiszögű szemcsehatár képződésével jönnek létre [37]. Hogy ezen relaxációs mechanizmusok milyen deformációknál lépnek fel, az a részecskék méretétől függ [36]. A fenti folyamatok legszebb kísérleti bizonyítékát Humphreys és Stewart elektronmikroszkópos vizsgálatai adták [36], melyeket SiO_2 részecskéket tartalmazó Cu—20% Zn egykristályokon végeztek (14—15. ábra).

Vizsgáljuk meg, hogy milyen kritikus deformációnál lépnek fel a relaxációs folya-

matok [35]. Ha a részecskék viszonylag kisméretűek (sugaruk kisebb, mint kb. 25 nm), akkor egy-egy részecskét csak egy-két csúszási vonal metsz át és így elegendő a koncentrikus Orowan-hurkok felhalmozódásából származó feszültséget figyelembe venni. 50 nm átmérőjű részecskék esetén például 5 koncentrikus hurok a határfelületen kb. $G/15$ nagyságú feszültséget eredményez, ha a részecskét körülfogó legbelső hurok



15. ábra. Merev részecskét tartalmazó ötvözet diszlokációs szerkezetének sematikus képe [36]

feszültségét nem vesszük figyelembe. Ezen feszültség hatására a legbelső hurok csavarkomponensei összehúzódnak és keresztcsúszással kihajlanak egy keresztcsúszási síkon. Két további keresztcsúszással az Orowan-hurok két prizmatikus hurokká alakul át (13. ábra). Így, ha a részecskét körülfogó Orowan-hurkok száma elér egy kritikus értéket, akkor az Orowan-hurkok száma nem nő tovább, hanem prizmatikus hurkok sorozata alakul ki. Minden diszlokáció tehát, amely túljut a részecskén, hátrahagy egy Orowan, vagy egy prizmatikus hurkot (13. ábra), a hurkok száma így valamely deformáció esetén:

$$n = \frac{2R\epsilon}{b}. \quad (32)$$

A prizmatikus hurkok és a részecske között taszító feszültségek lépnek fel, ezek eredményezik végül a másodlagos diszlokációk és üregek kialakulását. Bármely mechanizmus tehát, amely akadályozza a prizmatikus hurkok eltávolodását a részecske környezetéből, gyorsítja ezen feszültségek felépülését és ezzel együtt sietteti a másodlagos diszlokációk, illetve üregek megjelenését. A jelentős szilárd oldatos keményedést kiváltó ötvöző atomok például feltétlenül ilyen irányban hatnak.

Egy másik lényeges relaxációs mechanizmus a diszlokáció hurkok kúszásával és keresztcsúszásával kapcsolatos. Nyilvánvaló, hogy a legbelső Orowan-hurok a csúszósíkot a csavarkomponens keresztcsúszásával és az élkomponens kúszásával elhagyva összehúzódhat (energiáját csökkentheti), sőt esetleg teljesen eltűnhet a részecske felett vagy alatt, a többi felhalmozódott Orowan-hurok pedig közelebb nyomulhat a részecskékhez. A felhalmozódott hurkok következtében a kúszás átlagos hajtóereje igen nagy lehet, ugyanakkor elegendően sok hurok jelenléte esetén a folyamat aktiválási energiája nagymértékben lecsökken [39]. A kúszás sebességét meghatározó diffúziós folyamat aktiválási energiája a diszlokációk jelenléte miatt a normál

diffúziós aktiválási energia 60—70%-ára csökken. Humphreys és Stewart elektron-mikroszkópos vizsgálatai szerint [36] adott maradó alakváltozás mellett $\text{Cu—Al}_2\text{O}_3$ ötvözetben a prizmatikus hurkok száma 300 K környezetében a hőmérséklet növelésével erősen csökken. A jelenség magyarázata az, hogy az alakítással képződő Orowan-hurkok olyan gyorsan eltűnnek, hogy a felhalmozódott hurkok száma nem éri el a kétszeres keresztcsúszás, illetve a kúszás fellépéséhez szükséges kritikus értéket.

Az alakítási keményedés sebességének növekedését merev részecskék jelenlétében (12. ábra) az Orowan-hurkok felhalmozódása és a másodlagos diszlokáció-erdő kialakulása idézi elő [37, 40, 41]. Az Orowan-hurkok felhalmozódása két okból fokozza a keményedést. Egyrészt a csúszó diszlokációk kihajlásához szükséges feszültség megnő, mivel a már meglevő hurkok a közeledő diszlokációt taszítják és így az effektív részecskeméretet növelik, másrészt egy képfeszültség alakul ki [40]. Ez utóbbit az okozza, hogy míg a hurkoktól származó átlagos feszültség a mátrixban nulla, addig a részecskék belsejében a csúszási irányokban véges nyírófeszültségek vannak jelen. Így, hogy az anyagban az eredő átlagfeszültség nulla legyen, a mátrixban egy ellentétes képfeszültség jelenik meg. A képfeszültség lényeges járulékot ad a keményedéshez és megmagyarázza a diszperziósan keményített ötvözeteken gyakran megfigyelt nagy Bauschinger-effektust is [40, 42, 43], vagyis azt a jelenséget, hogy nyújtási igénybevétel után a minták folyáshatára összenyomásra nézve kisebb, mint nyújtásra.

A Bauschinger-effektus és az alakítási keményedés hőmérsékletfüggése is értelmezhető az Orowan-hurkok felhalmozódásával, illetve eltűnésével [35, 38]. A feszültség-deformáció összefüggés leírásához figyelembe kell venni a nagyobb deformációknál fellépő prizmatikus hurkokat is.

Hirsch és Humphreys meghatározták a prizmatikus hurkok által előidézett keményedést [2] és azt találták, hogy a folyási feszültség a következőképpen adható meg:

$$\tau = \tau_0 + \frac{1,6G\varepsilon R^2}{D^2}, \quad (33)$$

ahol τ_0 az Orowan-feszültség, ε a maradó deformáció a prizmatikus hurkok kialakulásakor.

Az Orowan-hurkoktól és a prizmatikus hurkoktól származó keményítő hatásokat, valamint a csúszó diszlokációk közötti kölcsönhatást figyelembe véve a feszültség-deformáció összefüggés és a Bauschinger-effektus kvantitativ is jól leírható [39, 43].

Az elmondottakból kitűnik, hogy a második fázisú részecskékkel keményített ötvözetek alakítási keményedése számos tényezőtől függ, pl. a részecskék méretétől és eloszlásától, a részecskék és a mátrix rugalmas tulajdonságaitól, szilárd oldatos keményedéstől, diszlokációk mentén történő diffúziós folyamatoktól, stb. Az elméletek megmutatják, hogyan befolyásolják ezen paraméterek a mechanikai tulajdonságokat.

Annak ellenére, hogy a deformációs folyamat részletei igen bonyolultak, végeredményben az adódik, hogy ha egy diszlokáció áthaladásakor egy diszlokáció-hurok keletkezik (legyen az Orowan-hurok, elsődleges vagy másodlagos prizmatikus hurok), akkor a különböző járulékok a keményedéshez eléggé érzéketlenek a diszlokációs szerkezet finomabb részleteire és a folyási feszültség jól leírható a szokásos

$$\tau = \alpha G b \sqrt{\rho} \quad (34)$$

összefüggéssel, ahol az α állandó értéke közelítőleg $1/2$, a ϱ diszlokációsűrűség pedig így írható [35]:

$$\varrho \sim 2\pi Rn \left(\frac{f}{4R^3\pi/3} \right). \quad (35)$$

A deformáció és az n közötti (32) összefüggést felhasználva megkapjuk a feszült-deformáció összefüggést:

$$\tau - \tau_0 = CG \left(\frac{fb}{2R} \right)^{1/2} \varepsilon^{1/2}, \quad (36)$$

ahol C egy numerikus állandó, melynek értéke függ a diszlokációk jellegétől. A (36) összefüggés alacsony hőmérsékleteken jól írja le a mechanikai tulajdonságokat [44]. A képfeszültségek megjelenése azonban egy lényeges további járulékot ad a (36) összefüggéshez. Magasabb hőmérsékleteken a megújulási folyamatokkal fellépő hőmérsékletfüggést a C paraméter hőmérsékletfüggésével vehetjük figyelembe.

IRODALOM

1. *M. F. Ashby*, Strengthening Methods in Crystals, Ed. A. Kelly and R. B. Nicholson, Applied Science Publishers Ltd., London, 1971.
2. *P. B. Hirsch and F. J. Humphreys*, Proc. Roy. Soc. A318, 45, 1970.
3. *H. Gleiter and E. Hornbogen*, phys. stat. sol. 12, 235, 1965.
4. *E. Orowan*, Symposium on Internal Stress in Metals and Alloys, London, The Institute of Metals, p. 451. 1948.
5. *E. Orowan*, Dislocations in Metals, Ed. Cohen, AIME, New York, 1954. p. 131.
6. *I. Kovács and L. Zsoldos*, Dislocations and Plastic Deformation, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.
7. *M. F. Ashby*, Z. Metallkunde, 55, 5, 1964.
8. *M. F. Ashby*, Physics of Strength and Plasticity, MIT Press, Cambridge, Mass. 1969. p. 113.
9. *A. J. E. Foreman*, Acta Met. 3, 322, 1955.
10. *G. de Wit and J. S. Koehler*, Phys. Rev. 116, 1113, 1959.
11. *M. F. Ashby*, Proc. Second Bolton Landing Conference on Oxide Dispersion Strengthening, New York, Gordon and Breach, 1968.
12. *L. M. Brown*, Phil. Mag. 10, 441, 1965.
13. *P. de Chatel and I. Kovács*, phys. stat. sol. 10, 213, 1965.
14. *Kovács I. és de Chatel P.*, Magy. Fiz. Folyóirat, 14, 15, 1966.
15. *A. J. E. Foreman and M. J. Makin*, Phil. Mag. 14, 911, 1966.
16. *D. J. Bacon, U. F. Kocks and R. O. Scattergood*, Phil. Mag. 28, 1241, 1974.
17. *I. Kovács*, phys. stat. sol. 3, 140, 1963.
18. *U. F. Kocks*, Phil. Mag. 13, 541, 1966.
19. *A. J. E. Foreman, P. B. Hirsch and F. J. Humphreys*, Conf. on Fundamental Aspects of Dislocation Theory, Nat. Bureau of Standards, Washington, 1969.
20. *P. Haasen*, Contemp. Phys. 18, 373, 1977.
21. *A. H. Cottrell*, Dislocations and Plastic Flow in Crystals, Clarendon Press, Oxford, 1953. p. 125.
22. *R. L. Fleischer*, Acta Met. 9, 996, 1961.
23. *A. Kelly and R. B. Nicholson*, Progr. Mat. Sci. 10, 1, 1963.
24. *U. F. Kocks, A. S. Argon and M. F. Ashby*, Thermodynamics and Kinetics of Slip, Progr. Mat. Sci. 19, 1, 1975.
25. *P. Haasen*, Physikalische Metallkunde, Springer Verlag Berlin, 1974. p. 338.
26. *L. M. Brown and R. K. Ham*, Strengthening Methods in Crystals, eds. A. Kelly and R. B. Nicholson, Elsevier, Amsterdam, 1971.
27. *J. Friedel*, Dislocations, Pergamon Press, London, 1964. p. 224.
28. *V. Gerold*, Z. Metallkunde, 62, 796, 1971.

29. *U. F. Kocks*, Metall. Trans. *1*, 1121, 1970.
30. *K. H. Dönkeloh, G. Kralik* and *V. Gerold*, Z. Metallkunde, *67*, 683, 1976.
31. *H. Haberkorn* and *V. Gerold*, phys. stat. sol. *15*, 166, 1966.
32. *Kovács I.*, X. Kohászati Anyagvizsgáló Napok, Balatonaliga, 1979. Előadáskivonatok, p. 37.
33. *Kovács I., Lendvai J. és Ungár T.*, X. Kohászati Anyagvizsgáló Napok, Balatonaliga, 1979, Előadáskivonatok, p. 202.
34. *F. J. Humphreys* and *J. W. Martin*, Phil. Mag. *16*, 927, 1968.
35. *P. B. Hirsch*, Atomic Structure and Mechanical Properties of Metals, Ed. G. Cagliotti, North-Holland, Amsterdam, 1976. p. 170.
36. *F. S. Humphreys* and *A. T. Stewart*, Surf. Sci. *31*, 389, 1972.
37. *L. M. Brown* and *W. M. Stobbs*, Phil. Mag. *23*, 1201, 1971.
38. *Lendvai J.*, Magyar Fizikai Folyóirat, *26*, 533, 1978.
39. *P. M. Hazzledine* and *P. B. Hirsch*, Phil. Mag. *30*, 1331, 1974.
40. *L. M. Brown* and *W. M. Stobbs*, Phil. Mag. *23*, 1185, 1971.
41. *E. W. Hart*, Acta Met. *20*, 275, 1972.
42. *J. D. Atkinson, L. M. Brown* and *W. M. Stobbs*, Proc. III. Int. Conf. on Strength of Metals and Alloys, Cambridge, 1973. (London, 1973), p. 36.
43. *D. Gould, P. M. Hazzledine, P. B. Hirsch* and *F. J. Humphreys*, Proc. III. Int. Conf. on Strength of Metals and Alloys, Cambridge, 1973 (London, 1973), p. 31.
44. *M. F. Ashby*, III. Int. Conf. on Strength of Metals and Alloys, Cambridge, 1973, Vol. 2. (London, 1973). p. 8.

A^{III}—B^V ALAPÚ MOS RENDSZEREK

SOMOGYI MÁRIA

MTA Műszaki Fizikai Kutató Intézet
Budapest

TARTALOM

1. Bevezetés	351
2. A határfelület vizsgálata	353
2.1 Elektromos mérések III—V MOS rendszereken	354
2.2 A határfelület közvetlen vizsgálata kész MOS rendszereken	357
2.3 Definált struktúrájú III—V felületek kölcsönhatása oxigénnel	358
3. Szigetelőréteg kialakítása III—V félvezető anyagokon	363
3.1 A Bell Laboratórium munkája	364
3.2 Saját oxidréteg kialakítása	367
3.3 Idegen oxid, ill. szigetelőréteg kialakítása	369
4. Összefoglalás	371
5. Irodalom	372

1. BEVEZETÉS

A Si alapú MOS rendszerek rendkívüli eredményessége magától adódóan sugallja a következő lépést: hasonló MOS rendszerek kialakítását más félvezető hordozón, elsősorban GaAs-en. Ez a munka ennek az elgondolásnak vizsontagságos és máig sem tökéletes megvalósulásáról ad áttekintést.

MOS, ill. MIS rendszerek kialakítása kétféleképpen lehetséges:

i) a szubsztrátot eloxidálni oly módon, hogy kb. 100 nm vastag oxidréteg képződjön,

ii) idegen anyagból vékony szigetelőréteget vinni fel a hordozóra. Ennek értelmében definíciószerűen saját oxidnak tekintendő minden olyan oxidréteg, amely a szubsztrát oxidálása során keletkezett.

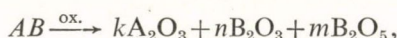
Jó MOS rendszer esetében az oxid tökéletes szigetelő, fizikai tulajdonságai időben állandóak, és kémiaiilag ellenálló. Sem az oxidban, sem a határfelületen nincs lehetőség töltés tárolására, ill. áthaladására. Ismeretes, hogy ezeket az igényeket a Si—SiO₂ rendszer ideálisan, szinte spontánul elégíti ki a következő okokból:

i) reális technológiával készült üveges SiO₂ réteg főtömegének tulajdonságai jól megfelelnek a fenti kikötéseknek.

ii) az üveges oxid ideálisan illeszkedik a Si fázishoz. A Si—SiO₂ között a határátmenet 1-2 ráccsikon belül úgy valósul meg, hogy eközben szabad töltésállapotok csak elenyészően kis mértékben keletkeznek. Mindezt az magyarázza, hogy egyrészt a SiO₂ igen jó szigetelő kristályos és üveges állapotban egyaránt, továbbá a Si-ion ideális oxidüveg képző, ami lehetővé teszi a Si fázishoz való jó illeszkedést [1].

* Érkezett 1980. jún. 5.

Amennyiben a Si teljes oxidációját: $\text{Si} \xrightarrow{\text{ox.}} \text{SiO}_2$ módon jelöljük, ez strukturálisan is egyértelmű: olyan üveges fázis keletkezik, amelyben SiO_4 tetraéderek rendszertelen térhálót alkotnak. Egészen más a helyzet AB vegyület félvezető esetén, ahol A a periódusos rendszer harmadik, B az ötödik oszlopába tartozik. AB , azaz III—V hordozó esetén az oxidációs folyamat a következő:



ahol: $k=n+m$, ha a B komponens kétféle oxidációs állapotban van jelen. Teljes oxidáció esetén: $k=m$ és $n=0$.

Ez a jelölésmód a komponensek oxidációjának mértékét fejezi ki, és nem tartalmaz strukturális információt. A III—V anyagok oxidációjának terméke tehát több komponens valamilyen elegye lehet. Adott esetben a termodinamikai és kinetikai feltételek szabják meg az oxidációs termék összetételét és strukturális jellemzőit egyaránt [2]. E feltételek egy — ismert — részét tartalmazza az I. táblázat kvantitatív formában, a komponensek képződéshő, olvadáspontja, ill. bomlási hőfoka alakjában [2].

I. TÁBLÁZAT

	Képződéshő kcal/mol	Olvadáspont C°	Gőznyomás
In_2O_3	–175	1565	illékony 1000 °C-on
Ga_2O_3	–214	1725	
Al_2O_3	–355	2045	1050 °C-on 10^{-6} Pa
Sb_2O_5	–161	400 °C-on bomlik	
As_2O_5	–151	315 °C-on bomlik	
P_2O_5	–323	580	300 °C-on szublimál

A további meghatározó tényezők, mint az anion és kation oxidjainak egymásban való oldékonyága, vagy pl. a B ion diffúziósebessége A_2O_3 -on keresztül, csak ritkán ismeretesek.

A legtöbb esetben ismeretes az adott anyag teljes oxidációjának megfelelő vegyület ABO_4 összetétellel és meghatározott kristályos formában (pl. GaPO_4 , GaAsO_4 [3]). Nyilvánvaló viszont, hogy nem polikristályos, hanem amorf szerkezetű réteg előállítása a cél, tehát a kinetikát befolyásoló faktorokat ennek megfelelően kell megválasztani.

A képződéshők alapján arra lehet következtetni, hogy az A_2O_3 fázis keletkezése a valószínűbb. Mivel magas hőfok alkalmazásakor az illékony, ill. bomlékony B_2O_5 távozik, így több-kevesebb B_2O_5 -el szennyezett A_2O_3 fázis marad vissza. (Kivétel a P_2O_5 , nagy képződéshője miatt. Ennek megfelelően 1000 °C-on végrehajtott termikus oxidációkor a reakciótermék GaP esetén kristályos GaPO_4 , míg GaAs-nál $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ [4].)

Amennyiben a B komponens diffúziósebessége A_2O_3 -ban az oxidáció sebességét meghatározó tényező, akkor hozzátétlegesen — mivel a hőfüggés pontos ismerete is szükséges lenne — a következő esetek feltételezhetők:

i) B komponens jól diffundál, de nem jól oldódik az adott hőfokon A_2O_3 -ban, tehát áthaladva rajta távozik, és a termék főtömegében A_2O_3 lesz.

ii) ha B komponens jól diffundál és jól oldódik, megvalósíthatók olyan optimális feltételek, hogy a végtermék megfeleljen az ABO_4 összetételnek, és még amorf szerkezetű is legyen.

iii) ha B komponens se nem oldódik, se nem diffundál jól az oxidban, akkor elemi B fázis kiválásával lehet számolni, leginkább fázis, ill. szemcsehatárokon.

Az eddigi megfontolások a szigetelő oxidréteg főtömegének összetételére vonatkoztak. Ami a $kA_2O_3 + nB_2O_3 + mB_2O_5$ elegyrendszert illeti, nem biztos, hogy az üveges szerkezet kialakulása lesz a legvalószínűbb, mint ahogy ez a SiO_2 esetében történik. Az A_2O_3 típusú oxidok többnyire korund szerkezetben kristályosodnak, ahol az oxigénre vonatkoztatott koordinációs szám 6, míg üveges fázis képzésére alkalmas ionnál ez 4 [1]. A 6 oxigén atom közül azonban 3 kicsit közelebb van a centrális atomhoz. Mind a B_2O_3 , mind a B_2O_5 típusú oxidoknál teljesülnek az üvegképződés feltételei, úgy hogy az amorf struktúra ráérőszakolható — technológiai fogások révén — az elegyrendszerre is. Ez feltehetőleg a korund szerkezet némi torzulása segítségével valósul meg. Megjegyzendő, hogy e vékony felületi rétegek teljes strukturális analízise nem könnyű feladat, ezért az irodalmi adatok sem bőségesek. A szívesen publikált elektrondiffrakciós felvételek a kb. 100 nm vastag rétegek felső részéről adnak csak információt. A részletes tárgyalásból kiderül majd, hogy a rétegek strukturális szempontból kváziamorf rendszereknek tekintendők, ahol bizonyos mértékű rövid távú rendezettség létezik, nagyjából a SiO_2 üveg SiO_4 tetraédereihez hasonlóan. Nemcsak a saját oxid, hanem az idegen szigetelőrétegek, mint Al_2O_3 is kváziamorfnak bizonyultak.

Mindezek a megfontolások makroszkópikus jellegűek és alkalmasak általános tájékozódásra, de nem használhatók olyan jelenségek értelmezésére, amelyek atomi dimenziókban, pl. néhány rácssíkon belül játszódnak le. Nem várható, hogy kétkomponensű félvezető esetében néhány rácssíkon belül megvalósítható legyen az átmenet a szigetelő fázisban úgy, hogy szabad töltésállapotok ne jöjjenek létre, akár saját oxidról, akár más szigetelőrétegről van szó. A határfelületi töltésállapotoknak viszont az eszköz használhatósága szempontjából döntő szerepe van. Ez indokolja, hogy e beszámolót a határfelületi problémák tárgyalásával kezdjük, és csak azután térünk rá a III—V MOS rendszerek megvalósításának ismeretetésére. A különböző eljárások célja mindig minél kisebb felületi állapotsűrűségű rendszer előállítása.

2. A HATÁRFELÜLET VIZSGÁLATA

Határfelületnek vagy határrétegnek, esetleg átmeneti tartománynak nevezzük a félvezető és a szigetelő fázis közötti tartományt, ahol mindkét fázis komponensei előfordulnak, és mennyiségük igen hirtelen változik a távolság függvényében nullától vagy az egyik fázisra jellemző értékről, a másik fázisra jellemző mennyiség értékéig. A határrétegről több, egymástól független módszerrel is lehet adatokat nyerni:

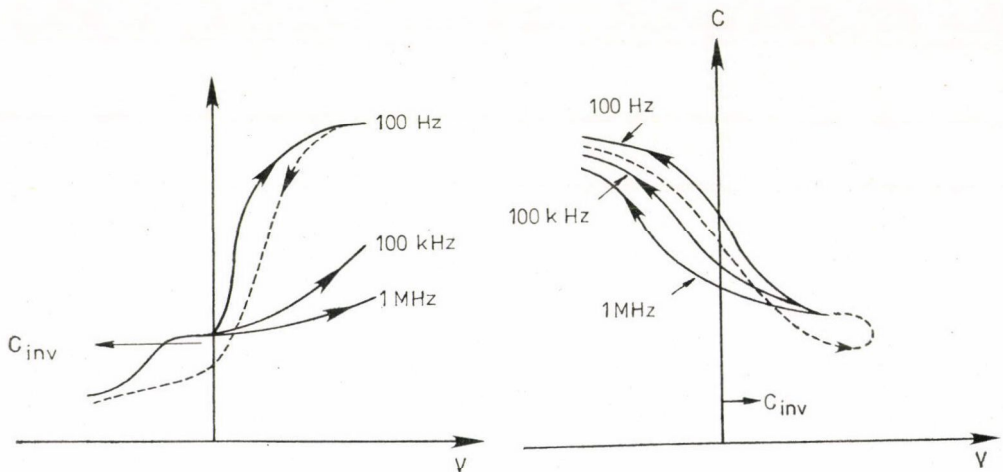
1. Klasszikus elektromos mérések: C—V karakterisztika, konduktancia, ezek frekvenciafüggése, esetleg optikai gerjesztés hatása.
2. MIS határfelületek közvetlen analízise.
3. Definiált szerkezetű III—V felületek előállítása, és azoknak oxigénnel, fémekkel stb. végbemenő kölcsönhatásának vizsgálata.
4. Az oxidáció kinetikájának vizsgálata. A felületi oxidáció kinetikáját intenzíven kutadják pl. fémeknél, kísérleti és elméleti úton egyaránt. Eddig csak néhány eset-

ben sikerült a modell és megfigyelés egyezését kimutatni. Ezeket az eredményeket alkalmazzák félvezető felületekre is több kevesebb sikerrel [5]. A Si felület oxidációja pl. még mindig nem tisztázott minden részletében, noha a kinetikai vizsgálódások hozzájárultak a határfelület pontosabb képének kialakításához. E tanulmányban ilyen jellegű kutatásokat nem ismertetünk.

2.1. Elektromos mérések III—V MOS rendszereken

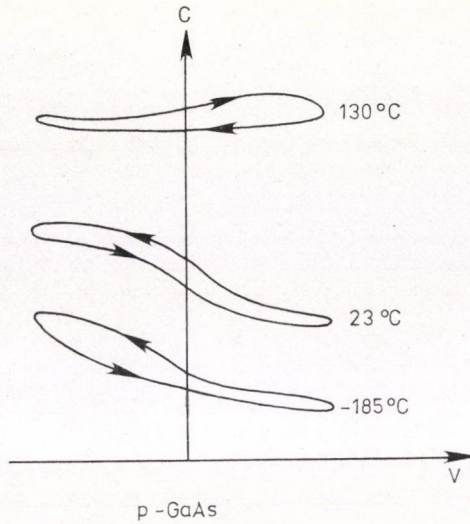
Nem célunk a MOS rendszerek C — V karakterisztikáinak analiziséről szóló óriási anyag ismertetése. A továbbiak megértéséhez mégis szükséges tömörített formában vázolni, ill. jelezni a mérések és a mögöttük levő folyamatok jellegét. A szokásos szóhasználat szerint jó MOS rendszernél a szigetelőn levő fémlektrodon, a „gate”-en levő feszültség segítségével akkor vezérelhető az eszköz, ha a minta inverzióba vihető. Így pl. n típusú félvezető hordozónál, záróirányú terhelés hatására a szigetelő Fermi nívója megközelíti, ill. eléri a valencia sávot. A határfelületen ekkor kisebbségi töltéshordozók gyűlnek fel, ezek mennyiségét vezéreltik a „gate”-re adott külső térrel. Ezt a folyamatot a határfelületen levő bármilyen jellegű töltésállapot károsan befolyásolja. Pl. ha a tilos sávon belül egy adott energiatartományban nagy az állapotsűrűség, akkor az állapotok rögzíteni fogják a Fermi nívót a felületen, annál az energiánál.

A C — V karakterisztikák frekvenciafüggésének jellegéből és mértékéből, a nem egyensúlyi C — V görbék létéből, a C — V görbék hiszterézisének nagyságából és irányából következtetni lehet arra, hogy hol és milyen töltésállapotok hatása érvényesül. Ilyen jellegű részletes analízissel foglalkozó munka eredményeit mutatjuk be a következőkben [6]. A mérések elektrolitikus anódos oxidációval (lásd 3. fejezet) készült



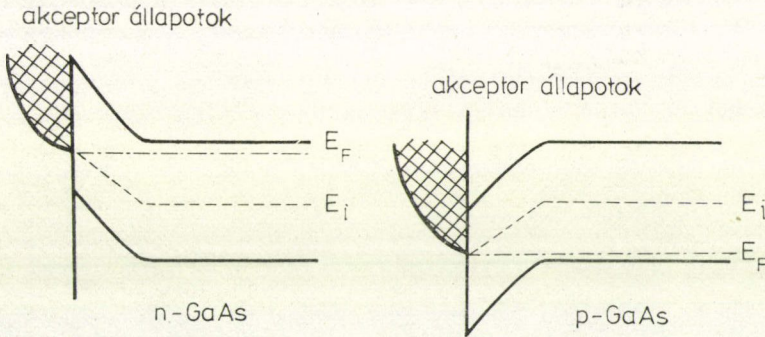
1a) n -GaAs-sajátoxid rendszeren megfigyelhető: erős frekvencia diszperzió nyitó irányú terhelésnél, inverzióban túl nagy kapacitás, nagymértékű hiszterézis

1b) p -GaAs-sajátoxid rendszerénél valamivel kisebb a kapacitás frekvencia diszperziója, záró irányú terhelésnél a kapacitás nem éri el a számított értéket. A hiszterézis mértéke kb. ugyanolyan, mint n -típusú hordozónál



1c) Anomális hőmérséklet-függés

1. ábra. GaAs-MOS rendszeren mért anomális C — V karakterisztikák [6]



2. ábra. Az ún. „határfelületi állapot-sáv” modell

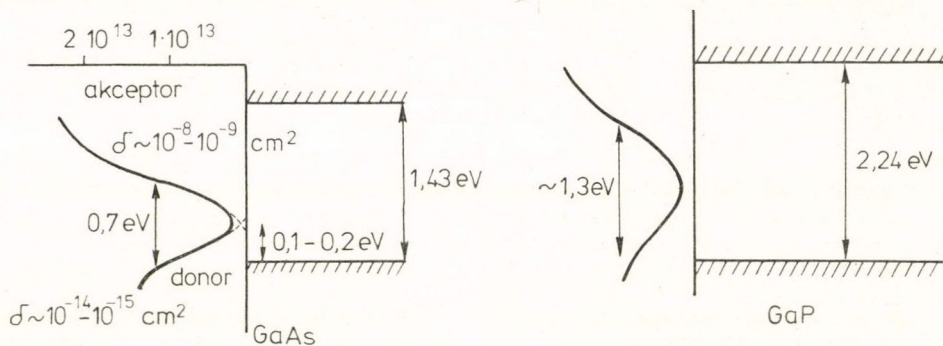
a) n - és b) p -típusú GaAs-hordozó esetén [6]

GaAs—MOS rendszeren történtek. Az 1a, 1b és 1c ábrán látható görbék anomáliái az ilyen rendszerekre nézve tipikusnak tekinthetők, és a következőkben foglalhatók össze:

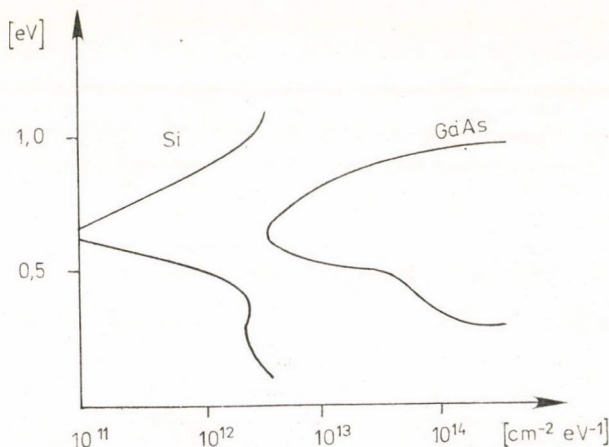
1. Akkumulációban, azaz nyitóirányú terhelésnél nagy frekvencia diszperzió tapasztalható; ez nagyobb mértékű n típusú mintákon.
2. Inverzióban túl nagy a kapacitás értéke.
3. Hiszterézis lép fel n és p típusú mintáknál egyaránt, iránya többségi töltéshordozó injekcióra utal.
4. Anomális a hőfokfüggés is.

A fenti mérések, valamint optikai gerjesztés közben végzett vizsgálatok alapján a 2a és 2b ábrán feltüntetett modelleket lehetett felvázolni. További finomított változatukat tünteti fel a 3a és 3b ábra.

A GaAs—MOS és GaP—MOS minták nem kezdeti próbálkozások eredményei, hanem az anódos oxidációs eljárás legkorszerűbb változatával készültek [6—14]. A GaAs—MOS rendszernél pl. kizárásos alapon arra lehetett következtetni [6], hogy — p és n típusú anyagon egyaránt — a határfelületen $1\text{--}2 \cdot 10^{13}/\text{cm}^2$ állapotssűrűségben, igen nagy, $10^{-8}\text{--}10^{-9}/\text{cm}^2$ elektronbefogási keresztmetszettel rendelkező akceptor állapotok kell hogy legyenek. Ilyen sűrűségben már nem is tekinthetők különálló állapotoknak, hanem kvázi-sávot alkotnak. Ezért nevezik ezt a modellt „határfelületi állapot-sáv” modellnek. Nyilvánvaló, hogy a Fermi-nívó a tilos sáv felső részében annyira rögzítve van, hogy nem vihető inverzióba. A p típusú mintáknál a sokkal kevesebb, és kisebb lyukbefogási hatáskeresztmetszetű donor állapotok hatása érezhető.



3. ábra. A 2. ábrán bemutatott modell finomított változata. Az akceptor állapotok mellett donor állapotok létezését is feltételezik [6, 7]



4. ábra. Felületi állapotsűrűség eloszlása a tilos sávban, GaAs— Al_2O_3 és Si— Al_2O_3 rendszer esetén [15]

Megállapítható, hogy a GaAs-saját oxid határfelületen igen nagyszámú és igen aktív felületi állapot van. Ilyen határfelületi tulajdonságok Si esetében ma elfogadhatatlanok. Nem kerülhető meg a határfelület problémája más szigetelő alkalmazásával sem. Amint azt a 4. ábra illusztrálja [15], Al₂O₃-ot növesztve GaAs-re, a kapott rendszer állapotossűrűsége ugyanolyan nagyságrendű, mint saját oxid esetén. Bár a párhuzamos Si—Al₂O₃ rendszer állapotossűrűsége sokkal kisebb a GaAs—Al₂O₃ értékénél, sokkal nagyobb viszont a Si—SiO₂ rendszerben elérhető értéknél, 10¹⁰—10⁹/cm²eV-nál.

2.2. A határfelület közvetlen vizsgálata kész III—V MOS rendszeren

A felhasznált módszerek: Auger analízis, ezen kívül SIMS, ESCA, TEM, röntgen- és elektrondiffrakció és ellipszometria [16—27]. A határfelület analízise az oxid főtömegének vizsgálatával együtt történik. Ha pl. Auger vagy SIMS analízisnél az összetételt a felület síkjára merőleges irányban mindaddig mérik, amíg a hordozóra jellemző értékeket megkapják, akkor az így kapott összetétel-profil az átmeneti tartományra vonatkozó információkat is tartalmaz. A szerkezet meghatározás módszereitől függően a szerkezeti információk vonatkozhatnak az oxid külső rétegére, belsőbb tartományára vagy a határfelületre. A harmadik részben konkrét eseteket bemutatva részletesebben foglalkozunk a módszerek teljesítőképességével.

A kb. 100 nm vastag oxidréteg főtömegének mind az összetétele, mind a szerkezete homogén kell hogy legyen. A fenti módszerek segítségével megállapítható volt, hogy ezek a feltételek saját és idegen oxid esetében éppen hogy teljesíthetők. Pl. saját oxid esetében, bizonyos eljárásoknál elkerülhetetlen hőkezelés következtében a réteg összetétele nem felel meg a teljes oxid stöchiometriájának, mivel az illékony B komponensben szegényebb lesz, a bevezetésben említett megfontolásokkal egyezésben. A réteg azonban jó szigetelő, és összetétele főtömegében homogén. Idegen szigetelőnél ez a kérdés ilyen formában nem is vetődik fel.

Természetesen a határréteg tartományában is kíváncsiak, hogy az összetétel inhomogenitása minimális legyen, tehát a komponensek koncentráció gradiense minél szűkebb tartományra szoruljon össze. Szerkezeti inhomogenitás, mint pl. külön fázis kiválása, vagy mikrokristályok képződése, egyáltalán nem engedhető meg. A határréteg tulajdonságait főleg saját oxid rétegnél tanulmányozták, a megállapítások azonban idegen szigetelőnél is hasonló mértékben érvényesek. A III—V-idegen szigetelő rendszerek kialakításánál éppen a saját oxid-rendszereken végzett vizsgálatok tanulságait vették figyelembe. Az alábbiakban felsorolt jellemző tulajdonságokat főleg GaAs-saját oxid rendszeren határozták meg.

1. Az átmeneti tartomány vastagsága 3—6 nm, tehát szó sincs egy-két rácssíkon belül megvalósuló fázisilleszkedésről. *A határréteg túl vastag.*
2. Ezen a tartományon belül a komponensek mennyisége nem feltétlenül lineárisan változik a távolsággal. Hőkezelés esetén GaAs-nél elemi As válik ki, ami közvetlenül is kimutatható. Ez a jelenség már egészen vékony oxidrétegeknél is fellép, amint ezt a következő fejezetben részletesen tárgyaljuk. Az átmeneti tartományban $A/B < 1$, azaz az összetétel nem stöchiometrikus, a B komponensből többlet van. Ez nem felel meg a bevezetésben említett megfontolásoknak. A kérdésre a 3.1 részben térünk vissza.

3. Újabb fázisok kiválása lehetséges. Ez lehet az előbb említett elemi As, aminek a $C-V$ karakterisztikák anomáliáit tulajdonítják. Bizonyos technológiák [28] esetén kristályos $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ jelenléte is kimutatható. *Strukturális elváltozások léphetnek fel.*
4. A határfelületet egy hullámos felület határolja a félvezető felé [29]. Úgy tűnik, ezek a hátrányos tulajdonságok a III—V anyagok lényeges jellemzői. Közlelbbi okai csak a határretegben levő kémiai kötések, elektronállapotok létrejöttének vizsgálata során ismerhetők meg.

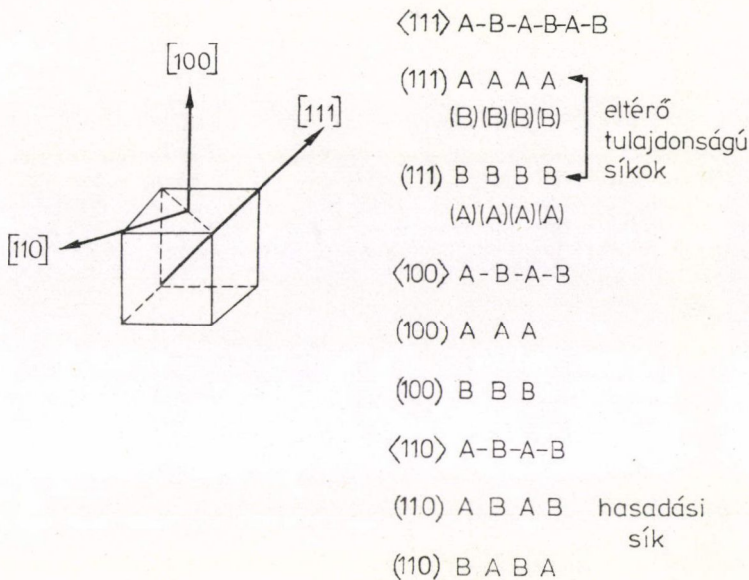
2.3. Definiált struktúrájú III—V felületek kölcsönhatása oxigénnel

Az előzőek értelmében a kellemetlen elektromos viselkedés, ill. rossz elektromos paraméterek oka elsődlegesen a viszonylag vastag átmeneti rétegben kialakuló összetétel- és szerkezeti anomáliákban keresendő. Ezek kialakulásának okát vizsgálja a kísérleti felületfizika. Az utolsó néhány év eredményei kielégítően magyarázzák ezeket a jelenségeket.

Félvezető anyagok felületének vizsgálata már az 1970-es évek elején megindult, először a Si-é, majd a III—V anyagoké, ezen belül elsősorban a GaAs-é. Gyakorlatilag is hasznosítható eredmények és következtetések azonban főleg 1975—1979 között születtek. Az eredményes vizsgálatokat csak az olyan korszerű módszerek kifejlesztése tette lehetővé, mint a LEED és XPE (fotoemisszió vizsgálata a spektrum 6,0—200 eV tartományában). A vizsgálatok menete a következő: ismert szerkezetű felület előállítása ultranagyvákuumban, majd a felületi struktúra azonosítása LEED-módszerrel. Az ilyen módon definiált szerkezetű felületet igen kis oxigén mennyiségekkel hozzák érintkezésbe. Ezután a felületi elektronállapotokat, azaz a felületi kötések 0,6—0,7 nm — szökési — mélységben XPE-val vizsgálják az oxigén adagolásának függvényében. Az elektronállapotok megváltozásából következtetni lehet arra, hogy az oxigén atom hogyan kapcsolódik a felület eredetileg rendezetten elhelyezkedő atomjaihoz, azaz a szökési mélységen belül a kémiai kötések hogyan változtak meg. Az oxigénnel való kölcsönhatás egyre nagyobb rendezetlenségre valló LEED képeket eredményez [30—33].

Ezen a ponton a III—V anyagoknál olyan nehézségek jelentkeztek, melyek megértése, ill. értelmezése 2-3 évbe került [34—38]. A III—V típusú köbös rácsú anyagoknál a különböző krisztallográfiai irányok nem egyenértékűek, ill. a megfelelő síkok igen eltérő tulajdonságúak. Itt a Si esetében bevált $\{111\}$ orientáltságú síkok, ill. szelek alkalmazása nem célszerű, mivel az (111) és $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ síkok nem egyenértékűek, azaz a kristály az $\langle 111 \rangle$ irányban poláros. Ebben az irányban ugyanis az A és B síkok távolsága nem egyenletes, AB síkok páronként közelebb vannak egymáshoz. Ezt szemlélteti az 5. ábra. A gyakorlatban az $\{100\}$ orientáltságú síkot használják, mivel ebben az irányban a rácssíkok távolsága egyenletes. A spontán hasadási sík az $\langle 110 \rangle$ irányra merőleges, ami a köbös-ionos szerkezet ismeretében nyilvánvaló, ui. az $\{110\}$ síkban A és B atomok helyezkednek el váltakozva. Ebben a síkban hasítva a kristályt, ultranagyvákuumban azonnal rendezett, egyszerű szerkezetű felület (ún. 1×1 struktúra) keletkezik.

A felületfizikai vizsgálatokat tehát ezen az egyszerű és reprodukálható módon előállított felületen végzik szívesen, míg a gyakorlat számára az $\{100\}$ síkra vonatkozó információk a fontosak. Ilyen orientáltságú, rendezett szerkezetű felületeket csak



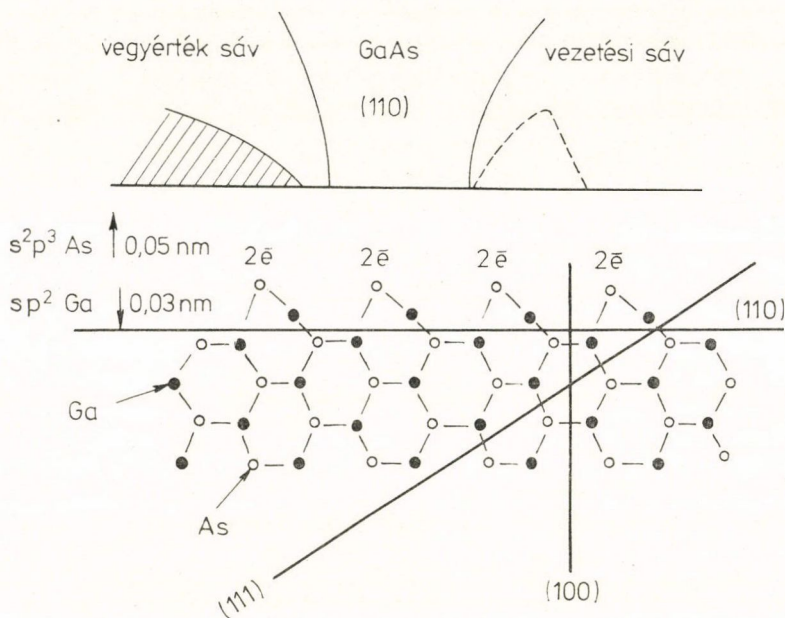
5. ábra. A^{III}—B^V típusú köbös rácson félvezető anyagoknál az $\langle 111 \rangle$ irányban az A és B rácssíkok távolsága nem egyenletes. Az $\langle 110 \rangle$ irányban az egyes rácssíkokat A és B atomok együtt alkotják, távolságuk egyenletes. Az $\langle 100 \rangle$ irányban A és B rácssíkok vannak egymástól egyenlő távolságban

bizonyos kezelésekkel lehet produkálni (Ar⁺ ionbombázás, hőkezelés As atmoszférában, stb.), amelyek esetleg az anyag egyéb tulajdonságait befolyásolják. A GaAs felület és oxigén reakcióját illetően tehát a különböző kutatócsoportok nem értettek egyet, az XPE adatok kiértékelése változott aszerint, hogy ki milyen orientáltságú és struktúrájú síkot vizsgált, ezért az XPE adatok alapján különböző mechanizmust tettek fel az oxigén beépülésénél. A későbbiek során kiderült, hogy ennek nincsen elsődleges jelentősége.

A III—V-saját oxid határfelület szempontjából tanulságos, ha az előzőekben ismertetett vizsgálatokat összevetjük Si-on végzett hasonló XPE mérésekkel. Ebből a szempontból mellékes, hogy Si esetében mindig az $\{111\}$ felület különböző szerkezeteit (rekonstrukcióit, ill. szuperszerkezeteket) tanulmányozták. Bármilyen szerkezetű, de tökéletesen oxigénmentes Si felületen sok olyan állapot található, mely a tilos sávba esik. Oxigénnel reagálva, azaz ha oxigén kapcsolódik a felülethez, ezek az állapotok kitolódnak a tilos sávból, még mielőtt a felület oxigén-borítottsága teljes volna. Más szóval az oxidált Si határfelületen a Si—O kapcsolat által létrejött új elektron-állapotok nem esnek a tilos sávba, tehát a Fermi nívót sem rögzíthetik a tilos sávon belül. Ennek az a következménye, hogy a Si—SiO₂ MIS rendszert teljes inverzióba lehet vinni.

Az ennek megfelelő eseménysor III—V anyagoknál egészen más végállapotot eredményez. A 6. ábrán a GaAs $[110]$ irányú metszete van a papír síkjára vetítve, így a papír síkjára merőleges az (110) sík. Látható, hogy csupán az utolsó As és Ga-ból

álló síkban tolódtak el az atomok, az As atom 0,05 nm-el kifelé, a Ga atom pedig 0,03 nm-el befelé, továbbá az As atom s^2p^5 konfigurációt vett fel. Voltaképpen ez az 1×1 szuperstruktúra, az oxigénmentes $\{110\}$ orientáltságú felület szerkezete. Ekkor az állapotok az ábrán látható módon helyezkednek el, azaz a tilos sávban nincsen állapot, a valenciasávban csak betöltött állapot, a vezetési sávban pedig



6. ábra. GaAs kristályrács $[110]$ irányú metszeten látható, hogy a legfelső Ga és As atomsorban az atomok kissé kimozdultak eredeti helyzetükből. Ennek megfelelően alakul az (110) felület sávképe: a tilos sávban nincsen állapot. A vezetési sávban csak üres, a vegyértéksávban csak betöltött állapot van [35]

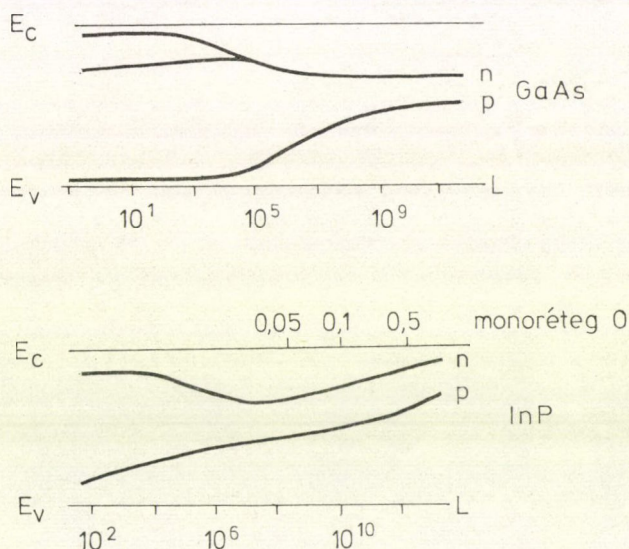
csak üres állapot található. Az *XPE* vizsgálatok szerint az $\{110\}$ síkban először az As reagál az oxigénnel. Az oxigén beépülése függ az O_2 molekula állapotától (sok zavart okozott az ionmanométer által aktivált oxigén jelenléte), minden esetre nem aktivált O_2 esetén a kapcsolat először adszorptív az s^2 elektronpár révén, és több lépésben megy át valódi kémiai kötésbe. A 7. ábrán a Fermi-nívó helyzetének változása látható az oxigén borítottság függvényében, n és p típusú GaAs in InP esetében. 10^{12} Langmuir esetén ($1 \text{ L} = 1,33 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$), ami 0,5 monoréteg oxigénnek felel meg, mind GaAs-nál, mind InP-nál a Fermi-nívó biztosan felveszi végleges értékét a felületen. Ez mindkét anyagnál a tilos sávban belül van [39], amint a 7. ábrán látható.

Összevetve a Fermi-nívó helyzetét a tilos sávban; erősen oxidált GaAs-nál és InP-nál, továbbá monoréteg alatti borítottságú felületnél (7. ábra) a megfelelő kation és anion vakanciák energiaállapotával közel vagy teljes egyezés állapítható meg, ahogy az a II. táblázatból is leolvasható:

II. TÁBLÁZAT

E_F helyzete a felületen		Akceptor V_A	Donor V_B
vastag oxidrétegnél	1 monoréteg O borítottságnál		
n GaAs $E_g = 1,43$ eV 0,83 eV 0,8 eV 0,5 eV	0,65—0,8 eV	0,7 eV	0,5 eV
n InP $E_g = 1,34$ eV 0,14 eV 0,09 eV 0,075 eV 0,1 eV	0,05—0,2 eV	1,0 eV	1,2 eV

V_A és V_B a valencia sávtól számítandók E_F , pedig a vezetési sávtól.

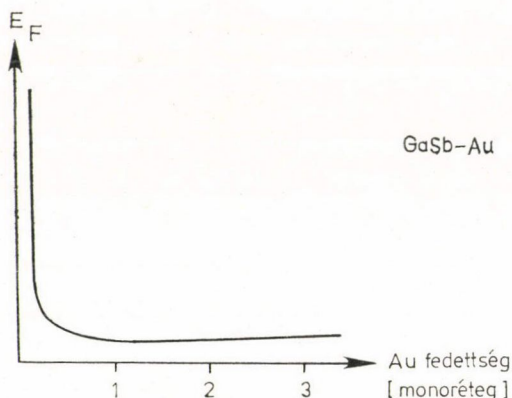


7. ábra. A Fermi-nívó helyzetének változása a felületen, egyre növekvő oxigén-borítottság függvényében, n és p típusú GaAs és n és p típusú InP esetén [39]

Az XPS mérések szerint mire a Fermi-nívó rögzítve van, a vegyértéksáv szerkezet is úgy változik meg a felületen, hogy az a szubsztrát atomjainak rendezetlenségére utal. Igen lényeges, hogy már 10^{12} L-oxigénnél az elemi As-re jellemző csúcs is megjelenik az XPS spektrumban. Érthető mindezek alapján, hogy a különböző orientált-ságú felületek spektrumai nem különböznek lényegesen egymástól, mivel az oxidáció

következtében felületen — azaz a szökési mélységben — levő szubsztrát-atomok rendje teljesen felborul.

A jelenség analogonja — azaz a felületi atomok rendezettségének megszűnése — megfigyelhető akkor is, ha oxigénmentes, rendezett felületre fémet párologtatnak. Pl. GaSb-nál, amint azt a 8. ábra mutatja, kb. 0,1 monoréteg Au után a Fermi-nívó megint rögzítve van. Auger analízissel kimutatták, hogy az Sb diffúziója az Au-ba



8. ábra. A Fermi-nívó helyzetének változása GaSb felületén növekvő arany-borítottság függvényében [40]

azonnal megindul. Ismerve, hogy $V_{Sb}=0,1$ eV, az ábrából érthetővé válik, hogy ez a vakancia állapot rögzíti itt a Fermi-nívót [40].

E kutatási terület művelői 1979-ben a következő általánosabb igényű álláspontot vallották: A kristály belső felületéből nézve, ha a tiszta felülethez idegen atom, pl. oxigén kötődik kémiai, legalább az utolsó egy-két rácssíkban atomok tolódnak el, rendezetlenség keletkezik pl. már a feszültségek miatt is. Ez a rendezetlenség saját atomvakanciák kialakulásában nyilvánul meg a felületi rétegen belül, és az adott rendszertől függ, hogy az anion- vagy a kation-vakancia lesz domináns a felületen. Mivel

az ezeknek megfelelő állapotok III—V anyagoknál a tilos sávon belül vannak, ott rögzítik a Fermi-nívót is. A felületi rendezetlenség következtében kialakuló domináns vakanciát a II. táblázatban aláhúzással jelöltük. Ez utóbbi körülmény miatt tehát nem lehet III—V MIS rendszert teljes inverzióba vinni. A domináns felületi állapotok kialakulásának részleteit illetően közvetlen kísérleti evidencia még nincs, kvalitatív becslések vannak. GaAs-nál pl. a domináns, a V_{As} megjelenése magyarázható az elemi As kiválással. Nyilvánvaló tehát, hogy az előbbieken részletezett vizsgálatok során megismert szerkezeti és összetételi anomáliák nagy felületi állapot-sűrűséget eredményeznek. A III—V-saját oxid határfelület tehát nem rendelkezhet olyan kiváló tulajdonságokkal, mint a Si—SiO₂ átmenet.

E munkáknak azonban e negatív következtetés mellett vannak hasznos következményei is. Tudományos eredménynek tekintendő:

1. hogy a $C-V$ mérések és direkt analízisek alapján felállították a határfelület kvalitatív modelljét.
2. Felületfizikai vizsgálatok alapján (2.3 fejezet) már végeztek olyan számításokat, amelyek az elektronállapotok valószínű eloszlását adták meg a felületen. Ez más szóval azt jelenti, hogy már vannak olyan számított XPS spektrumok, melyek eléggé egyeznek a mért görbékkel [41, 42, 43]. Ez végső kifejeletében a felület kvantitatív modellezését ígéri.

Legalább ennyire fontosak a gyakorlati jellegű következtetések:

1. Tudomásul kell venni, hogy a GaAs MOS alapanyagként nem ideális, és más megoldást kell keresni. Lehet más anyagot választani, pl. az InP-ot, ahol a Fermi-nívó egészen a sáv szélén van rögzítve, és nem a középben, mint a GaAs-nál. Bizonyos

mértékig technológiai fogásokkal is meg lehet kerülni a problémát: pl. a rossz tulajdonságú határfelület kialakulását lehetetlenné tenni.

- Amennyiben a GaAs-t használjuk továbbra is, meg kell próbálni a technológia módosításával az elviselhetőség határáig feljavítani a lényeges paramétereket. Mindezen praktikus következtetések tárgya a harmadik rész.

3. SZIGETELŐRÉTEG KIALAKÍTÁSA $III-V$ FÉLVEZETŐ ANYAGOKON

Az utolsó öt évben szinte valamennyi nevesebb, félvezetőkutatással foglalkozó intézményben teljes erővel dolgoznak a $III-V$ MOS rendszerek megvalósításán. A munkák elsődleges célja mindig a $III-V$ félvezető-oxid határfelület előnytelen tulajdonságainak csökkentése, ill. a probléma megkerülése. Ehhez képest a szigetelőréteg kialakítása könnyen megoldható feladat, úgy hogy jelenleg a feladat lényege: megfelelő tulajdonságú határréteg előállítás, és nem a szigetelőréteg vizsgálata, ill. optimalizálása. Ezen túlmenően, mivel még nem készült olyan $III-V$ MOS rendszer, amely tartósan üzemeltethető lett volna, nem ismeretes a rendszer viselkedése tartós igénybevétel esetén sem.

A szigetelőréteg kialakítása „csupán” technológiai feladat. Noha az első próbálkozások kb. 8-10 évvel ezelőtt indultak, kb. 1977 óta figyelhető meg az olyan publikációk számának meredek növekedése, melyek a határréteg problémáját felismerve, ötletek, szokatlan megoldások segítségével igyekeznek azt megoldani, ill. megkerülni. E munkában az újabb eredményeket ismertetjük részletesen, az 1977 előtti eredményeket Wilmsen és Szpak [44] bibliográfiai összefoglalója tartalmazza.

Általában 100–200 nm vastag, jól szigetelő rétegre van szükség, lehetőleg GaAs-en. A III. táblázat röviden összefoglalja mindazt, ami a technológia területén eddig történt.

III. TÁBLÁZAT

$III-V$ félvezető (binér v. ternér)

Saját oxid	Idegen oxid v. szigetelő
<p><i>Módszerek:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> termikus oxidáció plazma oxidáció elektrolitikus (anódos) oxidáció 	<p><i>Anyagok:</i></p> <p>Al_2O_3 SiO_2 (Si_3N_4) SiO_xN_y Ge_3N_4</p> <p><i>Módszerek:</i></p> <p>Molekulasugaras párologtatás MBE Kémiai leválasztás gőzfázisból CVD Termikus oxidáció Pirolitikus bontás Implantált réteg vagy párologtatott fémréteg elektrolitikus oxidációja</p>

3.1. A Bell Laboratórium munkája

A rendelkezésre álló irodalmi anyagot a táblázat szerint dolgoztuk fel. Kiemeltük viszont a Bell Laboratórium munkáit, és az ott folyó kutatásokat lényegében történeti sorrendben ismertetjük. Ezt több körülmény is indokolja: a Bell Laboratórium láthatóan kezdettől fogva ragaszkodott a GaAs hordozóhoz. Továbbá a nagyszámú és részletes, sok kvantitatív adatot tartalmazó publikáció lehetővé teszi, hogy nyomon kövessük hogyan alakul az ilyen kutatási feladat egy olyan intézménynél, ahol minden vizsgálati módszer, technológia rendelkezésre áll. Kiderült, hogy több munkacsoport párhuzamosan dolgozik különböző elgondolások alapján, miközben egymás használható eredményeit átveszik. Munkáik általában sokkal kvantitatívabb jellegűek, mint a többi publikáció átlaga. Az időközben megjelenő összesítő dolgozatok az előző kb. két éves időtartam munkáját foglalják össze. A végső megállapítások általában négy független vizsgálati módszer eredményein alapulnak.

Történeti előzményként Révész és Zaininger [45, 46], valamint Rubenstein [4] megfigyelései álltak rendelkezésre. Érthető, hogy az 1973-ban megjelent munkák H_2O_2 vizes oldatában végbemenő spontán és elektrolitikus anódos oxidációra vonatkoztak [47]. Kezdetben GaP-ot használtak hordozóként, az oxidréteg fizikai és elektromos jellemzőit azonnal meghatározták [48], és különös gondot fordítottak az összetétel analízisre [49, 50]. Az összetétel nem felelt meg a teljes oxidnak, különböző Ga:P:O arányokat találtak az elektrolízis körülményeitől függően. E vizsgálatokat GaAs-re is kiterjesztették [51, 52] és megállapították, hogy a foszforsavas közegben végzett anódos oxidáció GaAs felületek tisztítására is használható [53]. 1976-ban összesítették az elektrolitikus oxidációval kapcsolatos tapasztalataikat [54]. Az elektrolit összetételén valamit változtattak, de megmaradtak a vizes közegnél. (Ez figyelemre méltó, mivel 1975-ben jelent meg Hasegawa technológiailag alapvető munkája, melyben elektrolitként a nagy viszkozitású glikolt használja. Viszonylag tömör, egyenletes oxidképződés lassú oxidációkor várható, az elektrokémiai folyamatok sebességét pedig a diffúzió nagymértékben meghatározhatja: ez utóbbi nyilvánvalóan függ a viszkozitástól.) Elektrolitikusan készült rétegeket hőkezelní kellett, ennek optimalizálása is problematikus. Azonkívül a rétegvastagság ellipszometriás meghatározásánál a mért optikai mennyiségek anomáliái is egyértelműen utaltak a határfelületen fel lépő komplikációkra.

Mindez eléggé indokolta egyéb módszerek kipróbálását, így 1975-ben rövid közleményben számoltak be GaAs felület termikus oxidációjáról, és nem sokkal később egy speciális rendszerben megvalósított plazma oxidációs eljárásról [55, 56]. E rendszer előnye többek között az, hogy a minta nem nagyon melegszik és egyéb szennyeződés is minimális. A kapott rétegek összetétele az eddigiek közül messze a legjobb volt: Ga:As:O=1:1:3 [57]. Noha a $C-V$ görbe még utólagos hőkezelés után is mutatott hiszterézist, de az eddigiek közül itt a legkisebb mértékben.

Az eddigi munkák elárulták, a szerzők számára világos, hogy a határfelület és az oxid sokkal komplexebb rendszer, mint a $\text{Si}-\text{SiO}_2$, ezért igen alapos vizsgálatokra van szükség, ha helyes következtetésekhez akarnak jutni. Míg más közleményekben Auger analízis esetén a közvetlenül mért görbét adják meg a porlasztási idő függvényében, ők a módszert teljesen kvantitatívvá tették, neutronaktivációs úton kalibrálva azt. Chang és munkatársai [16] az összetétel ingadozásait abszolút számértékben és a valódi vastagság függvényében adják meg. Foglalkoztak a natív GaAs felület stöchiometriájának kérdésével [58] és gondosan kimérték a leginkább szóba jöhető

III—V anyagok optikai állandóit [59]. Kiderült, hogy az elektrolitikus oxidációval [16] készült rétegeknél a határréteg legalább 10 nm, hogy itt elemi As kiválás van a hőkezelés következményeképpen, továbbá ingadozik az összetétel a teljes vastagság függvényében is, bár ez elviselhetőre csökkenthető a hőkezelés során. A későbbiekben is szívesen használták az elektrolitikus oxidációval készült GaAs—MOS rendszert különböző vizsgálati módszerek teljesítőképességének bizonyítására. Így Raman szórással, és hullámhossz függésében mért ellipszometriás adatokkal egyaránt kimutatható [60, 61, 62] az elemi As jelenléte a határfelületen.

Ami a plazma oxidált rétegeket illeti, az összegező dolgozat alapján világos, hogy ennek a rendszernek is ugyanolyan jellegű hátrányos tulajdonságai vannak, bár jóval kisebb mértékben [63]. Az átmeneti tartomány sokkal keskenyebb, vastagsága biztosan 5 nm alatt van, kedvező esetben 2 nm körüli értéket is sikerült kimutatni. A réteg főtömegének kellő tömörségét változatlanul csak hőkezelés segítségével lehet elérni. Ennek egyik következménye, hogy az átmeneti rétegben itt is elemi As válik ki. Ezenkívül, a réteg főtömegének stöchiometriája sem ideális, az oxidrétegben még mindig kevesebb az As, mint a Ga, azaz Ga:As=1,2. Ugyanez az érték az elektrolitikus eljárással készült réteg főtömegében 1,8, tehát a javulás figyelemre méltó. Később [64] tovább korrigálják az eljárást. Lassú növekedési sebesség esetén a szubsztát az oxidáció során nem melegszik, ekkor jó az oxid stöchiometriája és nincs As kiválás a határfelületen sem. Gyors növekedésnél a határfelület ugyan éles, de ott As kiválás van, és az oxid főtömegének összetétele is rosszabb. Optimalizálva a paramétereket az átmeneti réteg vastagságát 2 nm alá lehet szorítani.

As többlet a határfelületen azonban mindig kimutatható volt, közvetlenül elemi formában is, um. TEM és röntgen diffrakció útján [65, 66]. A hőkezeléstől függően pl. N₂ atmoszférát használva As szemcsék képződtek a határfelületen, míg H₂ esetén As vált ki az oxidban magában is, tehát az oxid minősége romlott. (Ekkor még hidrogén is épülhet be a részben kidiffundált As helyébe, kb. 30%-ban!) Az utólagos hőkezelésnél tehát az alkalmazott atmoszféra és hőfok mind az oxid mind a határfelület tulajdonságait lényegesen befolyásolja.

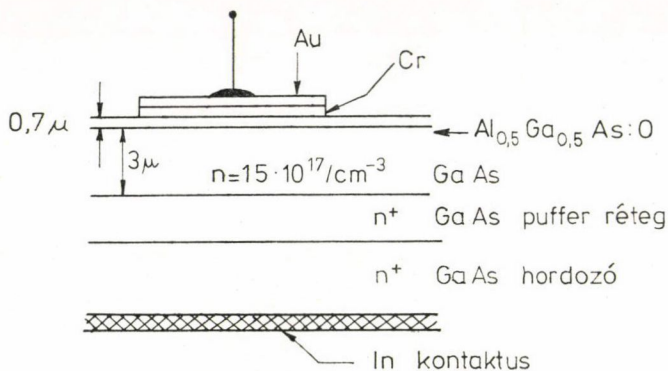
A plazma oxidáció újabb variánsával 1977-ben jelentkeztek először. A GaAs felületre kb. 10 nm Al-ot párologtattak, és ezt oxidálták el. TEM vizsgálatok és Auger analízis szerint [67] így egy olyan kb. 50—80 nm vastag és amorf szerkezetű vegyes Ga—Al oxidréteg keletkezik, melynek középső egyharmada Al-ban dús, tehát az Al-eloszlása is inhomogén. Ennek ellenére a teljes kation/anion arányt tekintve a rendszer az Al₂O₃-ot tartalmazó réteg és a félvezető között stöchiometrikus, és nem mutatható ki As többlet sem a határfelületen. Az eljárást tovább finomítva [68] olyan rendszert állítottak elő, melynek oxid-része kétréteges, az Al₂O₃ réteggel felül, és amelyben hőkezelés ellenére sem (550 °C !) mutatható ki elemi As a határfelületen. A *C—V* mérések csekély hiszterézise feltehetően a két oxidfázis határfelületének tulajdonítható. A felületi állapotsűrűség $5 \cdot 10^{10}/\text{cm}^2$ eV, és a minta inverzióba vihető. Az előzőek után az eredmény jelentőségét szükségtelen hangsúlyozni.

A hőkezelés hatására fellépő határfelületi As kiválás közelebbi fizikai-kémiai okaival egyetlen publikáció sem foglalkozik. Egyik újabb közlemény említi, hogy az elemi As permeabilitása mind az oxidációban mind a félvezetőben igen csekély [66]. Annyi megállapítható, hogy az Al réteggel ellátott GaAs hordozó plazma oxidációja közben a külső térnek megfelelően a Ga és As kifelé, az O atom felé halad. Eközben a fém Al szemcséi lassan Al₂O₃-dá oxidálódnak. Felteszik, hogy az Al₂O₃-ot tartalmazó rézréteg kedvező „szűrőhatása” az oka annak, hogy e tartomány és a

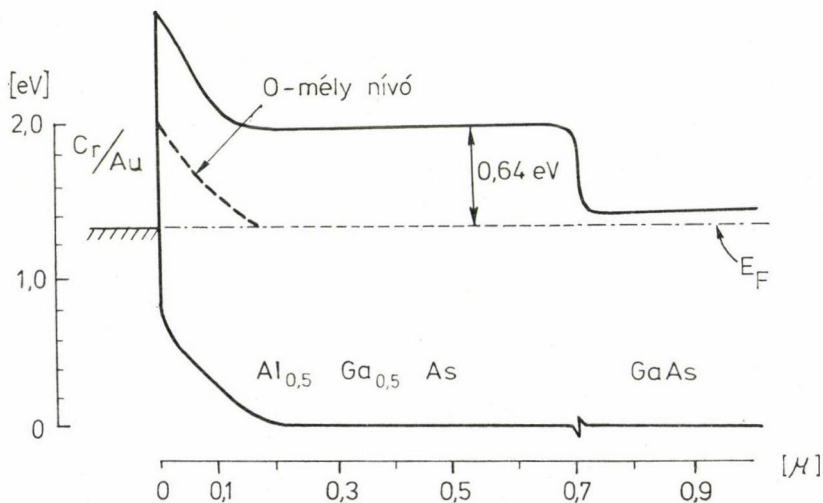
félvezető között jó stöchiometria, azaz $\text{Ga}:\text{As} = 1$ feltétel teljesül. Ebből következik, hogy az Al_2O_3 hasznos komponense a rendszernek. A további munkák ebből a tanulásból indulnak ki.

Természetesen ezzel egyidőben $\text{Ga}_{0,64}\text{Al}_{0,36}\text{As}$ felület plazma oxidációjával is kísérleteztek [69], és a rétegeket az előzőekben is alkalmazott komplex analízisnek vetették alá [57]. Ezek szerint a vegyes oxidréteg amorf szerkezetű, összetétele homogén, a stöchiometria elég jó, bár csekély As hiány észlelhető az oxid főtömegében. Az átmenet 10 nm-nél kisebb, de a határfelület minősége nem kielégítő, mivel a minta hiszterézist mutat és nem vihető inverzióba.

Ugyanekkor egy másik csoport új irányból közelítette meg a problémát [70, 71]. MBE módszerrel olyan GaAlAs réteget növesztettek $0,7\mu$ vastagságban, melyet



9. ábra. GaAs—MIS rendszer, ahol $M = \text{CrAu}$, $I = \text{Al}_{0,5}\text{Ga}_{0,5}\text{As}:\text{O}$, $S = n\text{-GaAs}$ $n_d = 1,5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ [71]



10. ábra. A 9. ábrán feltüntetett rendszer sávképe [71]

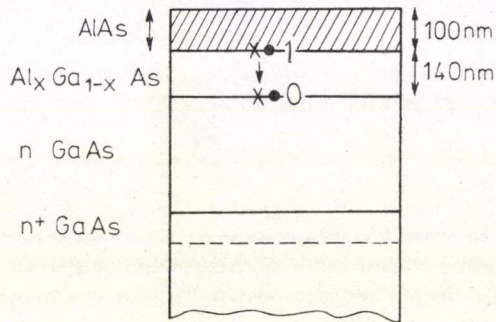
növesztés közben olyan nagy mennyiségű oxigénnel adalékoltak, hogy a réteg ellenállása $10^8 \Omega \text{ cm}$ nagyságrendű legyen. A szigetelőréteget fémkontaktusokkal ellátva, a 9. ábrán látható rendszerhez jutottak, ahol $S=\text{GaAs}$, $I=\text{Ga}_{0,5}\text{Al}_{0,5}\text{As}:\text{O}$ és $M=\text{CrAu}$ elektród. A magas hőfokon végzett $C-V$ mérések szerint az adalékolt tartományban az O mennyisége: $1 \cdot 10^{17}/\text{cm}^3$. A $C-V$ görbék nem mutattak hiszterézist, és a DLTS mérések sem tudtak kimutatni határfelületi csapdákat. A hőfok és frekvenciafüggésben mért konduktancia adatok szerint azonban kiderült, hogy a szigetelőrétegben egy 0,64 eV mély domináns nívó van, ami feltehetőleg az oxigénnek tulajdonítható. A feltételezett sávkép a 10. ábrán látható. Noha ez a nívó az eszköz működése szempontjából nem kívánatos, hiszen ebben a koncentrációban kb. $2 \cdot 10^{11}/\text{cm}^2$ állapotsűrűséget jelent, ez a megállapítás igen fontos negatív eredmény. A nívó jelentkezésével ui. minden olyan esetben számolni kell, amikor a határréteg problémáját az oxigén fokozatos bevezetésével akarják megkerülni. A 3.2 és 3.3 fejezetekben ismeltelten találkozunk majd ezzel az adattal.

Mindezek alapján logikusan arra lehet következtetni, hogy az Al jelenléte a felületi oxidban kívánatos, de azt alkalmas módon kell bevinni a rendszerbe. A probléma áthidalása céljából [72] a 11. ábrán látható réteges struktúrát állították elő, ahol a GaAs hordozón 140 nm vastag $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$ réteget MBE módszerrel növesztették. Ezen a távolságon belül $x=0$ -tól 1-ig változik folyamatosan úgy, hogy a legfelső 100 nm vastag réteg csak AlAs-ból áll. Ezen rendszer egyszerű termikus oxidációja során (400°C , O_2) az AlAs réteg Al_2O_3 -dá oxidálódik, majd a folyamat magától leáll. Az így előállított MOS rendszer nem mutat hiszterézist, nincs benne sehol mély nívó, a felületi állapotsűrűség $2 \cdot 10^{10}/\text{cm}^2 \text{ eV}$. Ez idő szerint ez a legjobb MOS rendszer, amit GaAs hordozón létrehoztak.

A munka további irányát jelzi két új publikáció. Egyik esetben [73] a GaAs felületet $\text{CF}_4 + \text{O}_2$ gázkeverékben vetik alá plazma oxidációnak. Így olyan réteg keletkezik, mely nem tartalmaz As többletet (mivel az AsF_3 igen stabil), jó szigetelő, továbbá az As, F, O és Ga homogénen oszlik el a vastagság függvényében. A $C-V$ görbe hiszterézise minimális. A másik dolgozat [74] a $\text{Ga}_x\text{In}_{1-x}\text{P}_y\text{As}_{1-y}$ rendszer kémiai tulajdonságait tárgyalja, feltehetően tükrözve annak az utolsó egy évben elterjedt álláspontnak a hatását, miszerint a GaAs helyett előnyösebb volna az InP használata a 2.3 részben részletezett okok miatt.

3.2. Saját oxidréteg kialakítása

A III. táblázatban megadott eljárások közül legkézenfekvőbb a termikus oxidáció, ez azonban a többnyire illékony B komponens miatt A_2O_3 réteget eredményez, esetleg B-vel szennyezve. Önmagában ez nem lenne baj, hiszen az A_2O_3 oxidok $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ — korund — típusúak, tehát kemények, jó szigetelők, kémiaiilag ellenállóak.



11. ábra. GaAs— $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ —AlAs rendszer ábrája oxidáció előtt [72]. Az AlAs réteg az oxidáció során Al_2O_3 -dá alakul, ez a MIS rendszer szigetelő rétege

Ez érvényes Ga_2O_3 -ra, ahol a tilos sáv: 4,3 eV, In_2O_3 -ra azonban már nem. Ennek tilos sávja csak 3,1 eV, azon kívül a nagy In ion könnyen kimozdítható helyéről, illetve könnyen képződik az In_2O_3 :In módon jelölhető rendszer. Ez utóbbinak jó vezető tulajdonságát hasznosítják átlátszó vezető bevonatoknál. Ennélfogva a termikus oxidáció csak a $\text{Ga}-B^V$ típusú anyagoknál jöhet szóba. A réteg igen kevés B komponenst tartalmaz, és nem feltétlenül homogén a vastagság függvényében [75], továbbá elemi As válik ki a határfelületen [24].

Feltétlenül csúcsteljesítménynek számít az a változat, amikor a GaAs felületet As_2O_3 atmoszférában 500 °C-on oxidálják [76]. (Természetesen előzőleg [77] tisztázták a GaAs-t, As_4O_6 -ot, Ga_2O_3 -at és As_2O_3 -at tartalmazó rendszerben a gőzfázis egyensúlyi viszonyait.) A kapott réteg $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ és As_2O_3 kvázi-amorf elegye, szigetelő tulajdonságai jók (letörési feszültség: $5-7 \cdot 10^6$ V/cm), a felületi állapotsűrűség a sáv közepén kb. $5 \cdot 10^{11}$ cm⁻² eV. Ilyen módon sikerült nem teljes kiürülési módban („deep depletion mode”) működő MOSFET eszközt készíteni.

Ternér rendszer esetén sem döntően más a helyzet [27]. $\text{GaAs}_{1-x}\text{P}_x$ szubsztrátot használva (ahol $x=0,4-0,7$) a réteg felső fele As szegénynek bizonyult, miközben a határrétegben As dúsulást tapasztaltak. Az oxidáció hőfoka 550–680 °C között változott. Minden esetben egy főleg Ga_2O_3 -ból álló vékony, 10–20 nm-es „héj” fedte a kb. 200 nm vastag réteget. Az utólagos hőkezelés csökkentette a hiszterézist, de növelte a visszáramot. Ugyanakkor az összetétel a vastagság függvényében oly mértékű inhomogenitást mutatott, hogy véleményünk szerint ez átkristályosodási folyamatokra utal. A $C-V$ mérések alapján becsült felületi állapotsűrűség $5-10 \cdot 10^{11}$ /cm² eV volt.

Ígératesnek tűnik a plazma oxidáció, ha azt oly módon vezetik, hogy a minta ne melegedjen túlságosan, azaz hőfoka ne haladja meg a 200–300 °C-ot [78]. Utólagos hőkezelésre még így is szükség van. A kapott oxid tömörebb és homogénebb, a határátmenet viszonylag éles, kb. 2-5 nm. Hátrányos a hőkezelés következtében fellépő As kiválás az átmeneti rétegben, továbbá az oxid főtömegében mutatkozó As hiány: As:Ga:O = 1:2–3:4. A felületi állapotsűrűség elég nagy, $\sim 10^{12}$ /cm² eV. Az utólagos hőkezelés javítja valamelyest a $C-V$ görbét, de a rétegben kristályosodási folyamatok indulnak meg [25]. E hátrányok kiküszöbölése céljából Shinoda és munkatársai [79] a GaAs felületet az oxidáció előtt O^+ porlasztással As-ben elszegényítették. Az oxidáció lényegében Ga_2O_3 -ból álló réteget eredményezett kevés As szennyezéssel. Noha az átmeneti tartomány elég széles volt, As többletet nem tudtak kimutatni. Nem meglepő, hogy GaAsP plazma oxidációjakor az oxidréteg polikristályos szerkezetűnek bizonyult: $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$, GaAsO_4 és GaPO_4 komponenseket lehetett kimutatni [80]. Az elektrolitikus oxidációval már az úttörő időszakban foglalkozni kezdtek, és azóta is folyamatosan használják módosított, ill. tökéletesített változatait. A feladat lényege, hogy a III–V anódot olyan elektrolitban oxidáljuk, amelyben

- i) az O utánpótlás biztosított,
- ii) a keletkezett oxid nem oldódik,
- iii) az oxid állaga tömör, összetétele stöchiometrikus. Mint azt az előzőekben (3.1 feje.) említettük, az oxidréteg főtömegének minősége annál jobb, minél lassúbb az oxidáció. Hasegawa [81] az ionok diffúzióját és ezáltal az oxidképződés sebességét úgy csökkentette, hogy növelte az elektrolit viszkozitását. E célból a közismerten nagy viszkozitású glikolt ($\text{CH}_2\text{OH}-\text{CH}_2\text{OH}$) adta hozzá az elektrolithoz. Ezt a megoldást eredetileg az Al elektrolitikus oxidációjánál alkalmazták. Noha az így készült réteg tulajdonságai korántsem optimálisak, az eljárást kisebb-nagyobb módosításokkal

igen széles körben használják [8, 82, 83], mivel annyira egyszerű, olcsó és nem igényel komplikáltabb berendezést (mint pl. a plazma oxidáció). A paramétereket az elektrolízis körülményeinek variálásával, ill. az elkerülhetetlen utólagos hőkezelés hőfokának (200—400 °C), idejének, atmoszférájának megfelelő megválasztásával próbálják javítani [84, 85]. Természetesen tapasztalható az As kiválás a határrétegben, amely viszonylag vastag: 5 nm vagy még több. Azonkívül az As hiány az oxid főtömegében valamivel nagyobb, mint a tisztán vizes közegben anodizált mintáknál.

A Hasegawa-módszer legkorszerűbb változatával készült mintákon a felületi állapotsűrűség nagy: 10^{11} — 10^{13} /cm² eV között változik a tilos sávon belül [4, 10], és a 2.1 részben említett valamennyi anomália kimérhető. Az eljárás alkalmazható GaP és GaSb hordozókra és GaAsP-ra is [7, 13, 14, 18, 21], de InP-ra nem, mivel az anódos oxidációval kapott In₂O₃ nem szigetel eléggé [86]. Természetesen a vizes közegben végzett elektrolízis is alkalmazható ezekre az anyagokra is, így pl. InSb-nál a MOS rendszer a szokásos és elég nagymértékű anomáliákat mutatja [87].

GaAsP esetén pl. kétréteges szerkezet alakult ki, ui. a réteg felső feléből a P szinte teljesen hiányzik [21]. Más szerzők [14] viszont azt tapasztalták, hogy a réteg két szélső tartományában inhomogén, de főtömegében P többlet van jelentős As mennyiség mellett. Emlékeztetünk arra, hogy termikus oxidációnál a fordított jelenséget észlelték [27], az oxid hőkezelés után is gazdagabb P-ban mint As-ban.

Valójában nagyon keveset tudunk mind az oxidréteg kialakulásának kinetikájáról mind az oxid főtömegének strukturális jellemzőiről, és e kettő kapcsolatáról. A publikációk ilyen jellegű információi hiányosak, feltehetőleg sokkal többféle módszer magába foglaló komplex vizsgálatot kellene elvégezni. Legteljesebbek a Bell Laboratórium közlései, így jellemző, hogy míg mások általában az oxidréteget szívesen nevezik amorfnak, ők saját szóhasználatuk szerint „kvázi-amorfnak” tekintik azt. Vannak azonban publikációk [28, 84], amelyek jelzik, hogy az ilyen jellegű problémákat máshol is felismerték. Érdekes pl., hogy a három módszerrel — GaAs hordozóra — készült oxidon végzett SIMS analízis nem mutatott összetételbeli különbséget, a szekundér ionok relatív intenzitása főleg a határréteg tartományában bonyolult módon változott. Ez arra utal, hogy a három különböző eljárással készült oxidok fizikokémiai tulajdonságai oly mértékben eltérőek, hogy a szekundér ionok emissziója is különböző.

3.3. Idegen oxid, ill. szigetelőréteg kialakítása

Jó minőségű idegen oxid, ill. szigetelőréteg kialakítása csak az utóbbi 4-5 év során, a vékonyréteg technológia egy bizonyos fejlettségi fokán jöhetett számításba. Ezt a témakört ezért nem a hordozó, hanem a szigetelőréteg anyaga és ezen belül az alkalmazott technológiák szerint tekintjük át, ahogy azt a III. táblázat is feltünteti.

Nyilvánvaló, hogy lemondva a saját oxid alkalmazásáról, célszerű olyan anyagot választani, amelynek szigetelő tulajdonságai jók, egyéb elektromos paraméterei is ismertek, és más területen már kiállták a próbát. Ez az anyag az Al₂O₃, melynek kristályos alakja a korund, tilos sávja 8-10 eV, és a fenti követelményeknek messzemenően eleget tesz. Első lépésként kézenfekvő Al réteget párologtatni pl. GaAs-re és plazma [67] vagy anódos oxidációnak [88] vetni alá. Ezen körülmények között azonban nem lehetett az oxidációs folyamatot kielégítően irányítani. A gondolat logikus folytatásának tekinthető az a módszer, amely Al és O₂ sugarat hoz össze ultranagyvákuum

rendszerben a GaAs hordozó felületén, más szóval molekulásugaras növesztéssel (MBE) állítja elő az Al_2O_3 réteget. Természetesen itt is kerülni kell a réteg felmelegedését az As kiválás, tehát a rossz tulajdonságú határréteg kialakulása miatt, ezt azonban a nagy reakcióhő miatt nem lehet egyszerűen megvalósítani.

Yokohama és munkatársai [89] a reakcióteret a molekulásugarak összehozásakor UV fénnyel világították meg, mintegy fotokémiaiilag aktiválva a kémiai folyamatot. Hasonló módon Si hordozón is előállítottak ugyanígy Al_2O_3 réteget. Az így nyert MOS rendszer tulajdonságai jó átlagosnak nevezhetők. A felületi állapotsűrűség Si-on $\sim 2 \cdot 10^{11}/\text{cm}^2$, GaAs-on $5 \cdot 10^{11} - 10^{13}/\text{cm}^2$. Az utóbbinál az átmeneti tartomány elég éles: 1,5–2 nm. A $C-V$ görbék hiszterézist és frekvencia diszperziót mutatnak, utólagos hőkezelés (300 °C, H_2) hatására az előbbi nőtt, az utóbbi csökkent. Ploog és munkatársai [90] először egy kb. 20–30 nm vastag $\text{Ga}_x\text{Al}_{1-x}\text{As}$ réteget alakítottak ki, és arra választották le az 50–100 nm vastag Al_2O_3 réteget. Az elektromos viselkedés a leválás hőfokától és a $\text{Ga}_x\text{Al}_{1-x}\text{As}$ réteg vastagságától függött. A $C-V$ görbék hiszterézist mutattak, és ezt Raman szórással kimutatott 0,76 eV mély nívónak tulajdonították. Ez a nívó feltehetően azonos a Bell Laboratóriumban kimért és oxigénnek tulajdonított nívóval [71]. A két munkacsoport legutóbb közepes publikációban vonta le az MBE módszerről szerzett tanulságokat [91].

A CVD technika fejlettsége már lehetővé teszi az Al-organikus vegyületek pirolitikus bontásának irányíthatóságát úgy, hogy jó tulajdonságokkal rendelkező Al_2O_3 réteg keletkezzen [92, 93]. Noha az ilyen jellegű munkák kezdeti állapotban vannak, ismeretek számszerű adatok is. Így Si-n a felületi állapotsűrűség kisebb mint $1 \cdot 10^{11}/\text{cm}^2$, InP-on $1 \cdot 10^{11}/\text{cm}^2$ és GaAs-on $2 - 5 \cdot 10^{11}/\text{cm}^2$, amelyek már jó értékek. Ezáltal lehetővé vált InP és GaAs alapú működő MISFET eszközök készítése is. Az aktív InP réteget természetesen szintén epitaxiálisan növesztették. Figyelemre méltó, hogy a töltéshordozó mozgékonyasága korrelált az aktív réteg vastagságával, azaz vékony, 0,2 μ rétegvastagságnál a mozgékonyaság: 200–300 cm^2/Vs . A normális mozgékonyaság értékét, 4000 cm^2/Vs -ot 4,2 μ -os rétegvastagságra extrapolálva kapjuk meg, ami a felületi hatások fontosságára utal. Természetesen még szinte semmit sem tudni az Al_2O_3 réteg struktúrális jellemzőiről.

SiO_2 rétegeket SiH_4 pirolitikus bontásával állítanak elő kb. 300 °C-on [94]. Szívesen alkalmazzák InP hordozó esetén [95, 96, 97, 98]. Noha a réteg tartalmazhat In és P nyomokat, mégis sikerült működő MISFET eszközt készíteni, ahol a felületi állapotsűrűség $2 \cdot 10^{11}/\text{cm}^2$ volt.

Si_3N_4 réteg leválasztása III–V felületre akár CVD, akár porlasztásos eljárással problematikus, mivel a természetes felületi oxidréteg a szigetelő réteg anyagával együtt igen kellemetlen tulajdonságú átmeneti réteggé alakul. Így Meiners [10], amikor összehasonlította a fenti két módszerrel, valamint elektrolitikus oxidációval készült GaAs-MOS rendszerek elektromos viselkedését, lényeges különbséget nem tapasztalt; egyik mintát sem lehetett inverzióba vinni. Ez a körülmény indokolja GaO_xN_y összetételű szigetelő réteg előállítását [99], melyet CVD módszerrel ($\text{NH}_3 + \text{GaBr}_3$, kevés O_2 -vel elegyítve) lehet készíteni. A csekély O tartalom fokozza a réteg tapadását, és kémiai ellenállását. GaAs hordozón $\sim 1 \cdot 10^{11}/\text{cm}^2$ felületi állapotsűrűséget lehet elérni.

A továbbiakban megemlítünk még néhány munkát inkább az érdekesség kedvéért, annak illusztrálására, hogy hányféle próbálkozás történt eddig. Pl. GaAs felületre Ta réteget párologtattak, majd eloxidálták. A kapott MOS rendszer megfelelt a szokásos minőségnek, hiszen tulajdonságait nem a jó szigetelő oxidréteg, hanem a már

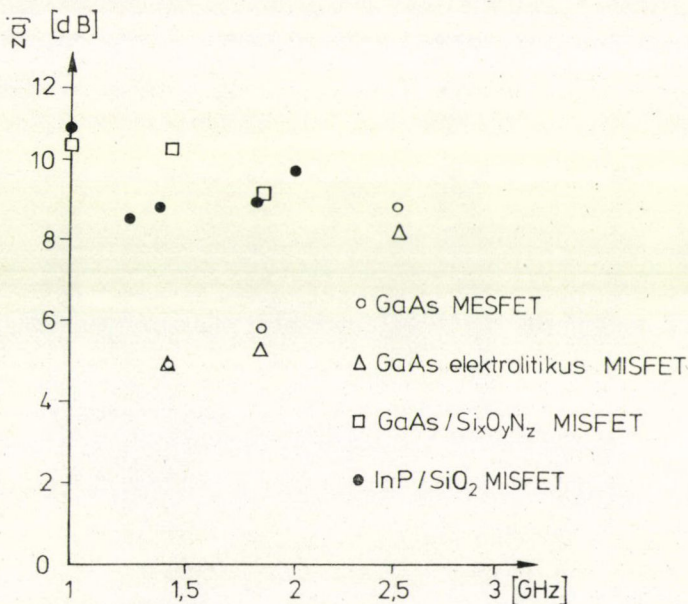
ismert okokból rossz tulajdonságú határréteg szabta meg [100]. Továbbá, mint a Si_3N_4 analogonja kínálkozik a Ge_3N_4 is [101]. A CVD eljárással GaAs hordozóra készített réteg esetében a felületi állapotossűrűség $1 \cdot 10^{11}/\text{cm}^2$, tehát az első kísérletek biztatóak. Próbálkoztak olyan fémek implantációjával, melyeknek oxidja jó szigetelő [102]. Remélték, hogy ezt a felületet akár termikusan, akár elektrolitikusan eloxidálva jó tulajdonságú vegyes oxidrétegekhez jutnak. InP és GaAs szubsztrát esetében Al-al és Hf-al végzett kísérletek eredményei nem feleltek meg a várakozásnak.

4. ÖSSZEFOGLALÁS

Egyrészt megállapítható, hogy nem sikerült III—V alapú MOS rendszereket olyan minőségben előállítani, ahogy az Si esetében megvalósítható volt. Egyes kivételektől eltekintve ezekre a rendszerekre jellemző:

- i) a nagy felületi állapotossűrűség: $\sim 1 \cdot 10^{11}/\text{cm}^2$,
- ii) saját oxid esetén a rossz kémiai ellenállóképesség,
- iii) a $C-V$ görbe — bár olykor minimális — hiszterézise és frekvencia diszperziója.

Mindezzel szemben azonban megállapítható az is, hogy a kezdeti eredményekhez képest kb. az utolsó 3 év során nagymértékű javulás tapasztalható. A fent említett nem túl jó paraméterek már lehetővé teszik, hogy az eszközök GHz tartományban használhatók legyenek. Ezt demonstrálja a 12. ábra is, ahol a különböző alapú és



12. ábra. GaAs MESFET eszköz és különböző módon előállított MISFET rendszerek zaja 1—3 GHz tartományban [103]. A GaAs hordozóra elektrolitikus úton készített MISFET eszköz már nem haladja meg a GaAs—MESFET eszköz zaját

különböző eljárással készült, III—V alapú FET eszközök zaja van feltüntetve a GHz tartományban [103]. Ezek az eszközök tehát a nagyszámú anomália ellenére is használhatók akkor, ha elég nagy frekvencián működtetik őket. E valójában triviális megállapítás feljogosít arra, hogy a jövőben ezen eszközök további fejlesztésével számoljunk.

5. IRODALOM

1. H. Rawson: *Inorganic Glass Systems*. Academic Press, 1967.
2. C. W. Wilmsen, *Thin Solid Films* 39, 105, 1976.
3. E. C. Shafer, R. Roy, *J. Am. Ceram. Soc.* 39, 330, 1965.
4. M. Rubenstein, *J. Electrochem. Soc.* 120, 576, 1966.
5. K. R. Lawless, *Rep. Progr. Phys.* 37, 231, 1974.
6. T. Sawada, H. Hasegawa, *Thin Solid Films* 56, 183, 1979.
7. H. Hasegawa, T. Sakai, *J. Appl. Phys.* 49, 4459, 1978.
8. G. Weiman, *Thin Solid Films* 47, 127, 1977.
9. N. Suzuki, T. Hariu, Y. Shibata, *Appl. Phys. Lett.* 33, 761, 1978.
10. L. G. Meiners, *J. Vac. Sci. Technol.* 15, 1402, 1978.
11. T. Mimura, N. Yokoyama, M. Fukuta, *Appl. Phys. Lett.* 34, 642, 1979.
12. E. Kohn, H. L. Hartnagel, *Solid State El.* 21, 409, 1978.
13. G. Weimann, *Thin Solid Films* 56, 173, 1979.
14. R. K. Ahrenkiel, F. Moser, S. L. Lyn, T. J. Coburn, *Thin Solid Films* 56, 117, 1979.
15. M. Hirose, S. Yokohama, Y. Osaka, *phys. stat. sol. (a)* 42, 483, 1977.
16. C. C. Chang, B. Schwartz, S. P. Muraka, *J. Electrochem. Soc.* 124, 922, 1977.
17. C. W. Wilmsen, R. W. Kee, *J. Vac. Sci. and Technol.* 14, 953, 1977.
18. A. Okada, Y. Ohnuki, T. Inada, *Appl. Phys. Lett.* 33, 447, 1978.
19. K. Lösche, G. Kühn, H.—J. Bilz, G. Leonhardt, *Thin Solid Films*, 48, 229, 1978.
20. H.—J. Bilz, G. Leonhardt, G. Kühn, K. Lösche, A. Meisel, *Kristall u. Technik* 13, 363, 1978.
21. G. Sixt, K. H. Ziegler, W. R. Fahrner, *Thin Solid Films*, 56, 107, 1979.
22. R. P. H. Chang, *Thin Solid Films*, 56, 89, 1979.
23. R. Nishitani, H. Iwasaki, Y. Mizokawa, S. Nakamura, *Japan J. Appl. Phys.* 17, 321, 1978.
24. K. Watanabe, Y. Hashiba, M. Nishino, T. Yamashita, *Thin Solid Films*, 56, 63, 1979.
25. F. Koshinga, T. Sugano, *Thin Solid Films*, 56, 39, 1979.
26. I. Shiota, N. Miyamoto, J. Nishizawa, *J. Electrochem. Soc.* 124, 1405, 1977.
27. G. J. Kuhlmann, R. K. Pancholy, D. H. Phillips, *Thin Solid Films* 56, 129, 1979.
28. B. L. Weiss, H. L. Hartnagel, *Thin Solid Films* 65, 143, 1979.
29. K. Navratil, J. Ohidal, F. Lukes, *Thin Solid Films* 56, 163, 1979.
30. P. Mark, S. C. Chang, W. F. Creighton, B. W. Lee *Critical Rev. in Solid State Sci.* 5, 189, 1975.
31. J. L. Freeouf, D. E. Eastman, *Critical Rev. in Solid State Sci.* 5, 245, 1975.
32. W. E. Spicer, P. E. Gregory, *Critical Rev. in Solid State Sci.* 5, 231, 1975.
33. R. Ludeke, A. Koma, *J. Vac. Sci. Technol.* 13, 241, 1976.
34. H. Lüth, M. Büchel, R. Dorn, M. Liehr, R. Matz, *Phys. Rev. B.* 15, 865, 1977.
35. P. Pianetta, I. Lindau, C. M. Garner, W. E. Spicer, *Phys. Rev. B.* 18, 2792, 1978.
36. W. Ranke, K. Jacobi, *Surf. Sci.* 81, 504, 1979.
37. W. E. Spicer, I. Lindau, P. Pianetta, P. W. Chye, C. M. Garner *Thin Solid Films* 56, 1, 1979.
38. P. Mark, W. F. Creighton, *Thin Solid Films* 56, 19, 1979.
39. W. E. Spicer, P. W. Chye, C. M. Garner, I. Lindau, P. Pianetta, *Surf. Sci.* 86, 763, 1979.
40. W. E. Spicer, *Conf. on Insulating Films on Semiconductors*, Durham, 1979.
41. W. A. Goddard, I. I. Barton, A. Redondo, T. C. McGill, *J. Vac. Sci. Technol.* 15, 1274, 1978.
42. D. J. Chadi, *J. Vac. Sci. Technol.* 15, 1244, 1978.
43. E. I. Mele, I. D. Joannopoulos, *Phys. Rev. B.* 18, 6999, 1978.
44. C. W. Wilmsen, S. Szpak, *Thin Solid Films* 46, 17, 1977.
45. A. Revesz, K. H. Zaininger, *J. Am. Ceram. Soc.* 46, 606, 1963.
46. K. H. Zaininger, A. G. Revesz, *J. Phys. (Paris)* 25, 208, 1964.
47. B. Schwartz, W. J. Sundburg, *J. Electrochem. Soc.* 120, 576, 1973.
48. S. M. Spitzer, B. Schwartz, M. Kuhn, *J. Electrochem. Soc.* 120, 669, 1973.
49. I. M. Poate, P. J. Silverman, J. Yahalom, *J. Electrochem. Soc.* 120, 844, 1973.
50. I. M. Poate, T. M. Buck, B. Schwartz, *J. Phys. Chem. Solids* 34, 779, 1973.

51. L. C. Feldman, I. M. Poate, *Thin Solid Films*, **19**, 81, 1973.
52. S. M. Spitzer, B. Schwartz, G. D. Weigle, *J. Electrochem. Soc.* **121**, 820, 1974.
53. S. M. Spitzer, B. Schwartz, G. D. Weigle, *J. Electrochem. Soc.* **122**, 397, 1975.
54. B. Schwartz, F. Ermanis, M. H. Brastad, *J. Electrochem. Soc.* **123**, 1089, 1976.
55. S. P. Muraka, *Appl. Phys. Lett.* **26**, 180, 1975.
56. R. P. H. Chang, A. K. Sinha, *Appl. Phys. Lett.* **29**, 56, 1976.
57. R. L. Kaufman, L. C. Feldman, I. M. Poate, R. P. H. Chang, *Appl. Phys. Lett.* **30**, 319, 1977.
58. C. C. Chang, P. H. Citrin, B. Schwartz, *J. Vac. Sci. Technol.* **14**, 943, 1977.
59. D. E. Aspnes, B. Schwartz, A. A. Studna, L. Derick, *J. Appl. Phys.* **48**, 510, 1977.
60. G. P. Schwartz, B. Schwartz, D. DiStefano, G. J. Guattieri, J. E. Griffiths, *Appl. Phys. Lett.* **34**, 205, 1979.
61. G. P. Schwartz, J. E. Griffiths, B. Schwartz, 6th Conference on Physics of Semiconductor Interfaces Asilomar, California, 1979.
62. J. B. Theeten, D. E. Aspnes, R. P. H. Chang, *J. Appl. Phys.* **49**, 6097, 1978.
63. C. C. Chang, R. P. H. Chang, S. P. Muraka, *J. Electrochem. Soc.* **125**, 481, 1978.
64. R. P. H. Chang, A. J. Polak, D. L. Allara, C. C. Chang, W. A. Lanford, *J. Vac. Sci. Technol.* **16**, 888, 1979.
65. R. P. Chang, T. T. Sheng, C. C. Chang, J. J. Coleman, *Appl. Phys. Lett.* **33**, 341, 1978.
66. R. P. H. Chang, *Thin Solid Films* **56**, 89, 1979.
67. R. P. H. Chang, C. C. Chang, T. T. Sheng, *Appl. Phys. Lett.* **30**, 657, 1977.
68. R. P. Chang, J. J. Coleman, *Appl. Phys. Lett.* **32**, 332, 1978.
69. R. P. H. Chang, C. C. Chang, J. J. Coleman, R. L. Kauffman, W. R. Wagner, L. C. Feldman, *Appl. Phys. Lett.* **48**, 5384, 1977.
70. H. C. Casey Jr., A. Y. Cho, E. H. Nicollian, *Appl. Phys. Lett.* **32**, 678, 1978.
71. H. C. Casey Jr., A. Y. Cho, D. V. Lang, E. H. Nicollian, *J. Vac. Sci. Technol.* **15**, 1408, 1978.
72. W. T. Tsang, M. Olmstead, R. P. H. Chang, *Appl. Phys. Lett.* **34**, 408, 1979.
73. R. P. H. Chang, J. J. Coleman, A. J. Polak, L. C. Feldman, C. C. Chang, *Appl. Phys. Lett.* **34**, 237, 1979.
74. F. A. Thiel, R. L. Barns, *J. Electrochem. Soc.* **126**, 1272, 1979.
75. I. Shiota, N. Miyamoto, J. Nishizawa, *J. Electrochem. Soc.* **124**, 1405, 1977.
76. H. Takagi, G. Kano, I. Teramoto, *Surf. Sci.* **86**, 264, 1979.
77. I. Teramoto, H. Takagi, G. Kano, *Japan J. Appl. Phys.* **18**, 723, 1979.
78. N. Yokoyama, T. Mimura, K. Odani, M. Fukuta, *Appl. Phys. Lett.* **32**, 58, 1978.
79. Y. Shinoda, M. Yamaguchi, *Appl. Phys. Lett.* **34**, 484, 1979.
80. T. Sugano, Y. Mori, *J. Electrochem. Soc.* **121**, 113, 1974.
81. H. Hasegawa, H. L. Hartnagel, *J. Electrochem. Soc.* **123**, 713, 1976.
82. A. Shimano, A. Moritani, J. Nakai, *Solid State El.* **21**, 1149, 1978.
83. H. Tokuda, H. Yokomizo, Y. Adachi, T. Ikoma, J. Frey, *Electronics Lett.* **14**, 163, 1978.
84. P. A. Breeze, H. L. Hartnagel, *Thin Solid Films* **56**, 51, 1979.
85. B. M. Arora, A. M. Narsale, *Thin Solid Films*, **56**, 153, 1979.
86. C. W. Wilmsen, *Crit. Rev. Solid State Sci.* **5**, 313, 1975.
87. A. Heime, H. Pagnia, *Appl. Phys.* **15**, 79, 1978.
88. B. Bayraktaroglu, S. J. Hannah, H. L. Hartnagel, *Electronics Lett.* **13**, 79, 1978.
89. S. Yokohama, K. Yukitomo, M. Hirose, Y. Osaka, *Thin Solid Films* **56**, 81, 1979.
90. K. Ploog, A. Fischer, R. Trommer, M. Hirose, *J. Vac. Sci. Technol.* **16**, 290, 1979.
91. S. Yokohama, K. Yukitomo, M. Hirose, Y. Osaka, A. Fischer, K. Ploog, *Surf. Sci.* **86**, 835, 1979.
92. T. Kawakami, M. Okamura, *Electronics Lett.* **15**, 502, 1979.
93. K. Kamimura, Y. Sakai, *Thin Solid Films* **56**, 215, 1979.
94. L. Messick, *J. Appl. Phys.* **47**, 4949, 1976.
95. J. Stannard, R. L. Henry, *Appl. Phys. Lett.* **35**, 86, 1979.
96. L. G. Meiners, *Thin Solid Films*, **56**, 201, 1979.
97. L. Messick, D. L. Lile, A. R. Clawson, *Appl. Phys. Lett.* **32**, 53, 1978.
98. L. G. Meiners, D. L. Lile, D. A. Collins, *Electronics Lett.* **15**, 578, 1979.
99. I. Shiota, N. Miyamoto, J. Nishizawa, *Surf. Sci.* **86**, 272, 1979.
100. R. K. Smeltzer, C. C. Chen, *Thin Solid Films* **56**, 75, 1979.
101. G. D. Bagratishvili, R. B. Dzhaneldidze, N. I. Kurdiani, Yu. I. Pashintsev, O. V. Saksagani, V. A. Skorikov, *Thin Solid Films*, **56**, 209, 1979.
102. C. W. Wilmsen, R. W. Kee, *Thin Solid Films* **51**, 93, 1978.
103. D. L. Lile, D. A. Collins, *Thin Solid Films* **56**, 225, 1979.

KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

A HULLÁMMEZŐK KVANTUMMECHANIKÁJA *

W. HEISENBERG ÉS W. PAULI

II. AZ ELEKTROMÁGNESES MEZŐKET ÉS AZ ANYAGHULLÁMOKAT LEÍRÓ ELMÉLET ALAPEGYENLETEINEK FELÁLLÍTÁSA

4. §. Az elektrodinamika nehézségei, a Maxwell-egyenletek kvantálása, kiegészítő tagok szükségessége. Próbáljuk meg az előző fejezet f. r.-inak sémáját a vákuumelektrodinamika egyenleteire alkalmazni. Most a fizikai állapotmennyiségek a négyespotenciál Φ_α komponensei ($\Phi_i = \mathfrak{A}_i$, $\Phi_4 = i\Phi_0$); ezekből differenciálással származnak a térerősségek:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Phi_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad (43)$$

$$F_{4k} = i\mathfrak{E}_k, (F_{23}, F_{31}, F_{12}) = (\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3); F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}.$$

Közismerten a vákuumelektrodinamika többi Maxwell-féle egyenlete:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0 \quad (44)$$

variálással a

$$\delta \int L dV dt = 0$$

variációs elvből származtatható, ha L Lagrange-függvényként az

$$L = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2) \quad (45)$$

kifejezést használjuk. **

A Φ_α -hoz kanonikusan konjugált impulzusokat az első fejezet általános előírása szerint képezzük:

$$P_{\alpha 4} = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_4}}$$

és azt találjuk, hogy

$$P_{k4} = -F_{4k} \quad (k = 1, 2, 3), \quad P_{44} \equiv 0. \quad (46)$$

* A dolgozat eleje az előző számban.

** Kétszer fellépő indexre mindig összegezni kell, és pedig mindegyik indexre a többtől függetlenül. A görög indexek 1—4-ig, a latinok 1—3-ig haladnak. Megjegyezzük, hogy ebben a fejezetben a térerősségeket Heaviside-féle egységekben mérjük.

A Φ_4 -hez konjugált impulzus azonosan zérus volta az elektrodinamika Lagrange-függvényének jellegzetes elfajulását jelenti és különleges nehézségeket okoz. Mindezekelőtt a P_{k4} -ek nem írhatók elő egy $t=0$ világmetszetre tetszőleges térfüggvények gyanánt, mivel közöttük ilyen metszetre már a

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial P_{k4}}{\partial x_k} = -\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0 \quad (44')$$

kapcsolat áll fenn [ahogy ez (44)-ből $\alpha=4$ esetre következik]. Az I. fejezet kanonikus f. r.-i [v. ö. (30) is], amelyek jelen esetben

$$[\Phi_\alpha, \Phi'_\beta] = 0, \quad [F_{4i}, F'_{4k}] = 0 \quad (47)$$

$$[F_{4k}, \Phi'_\alpha] = \delta_{k\alpha} \frac{-hc}{2\pi} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

lennének, nem alkalmazhatók minden további nélkül, hanem előbb meg kell vizsgálni, hogy mennyiben egyeztethetők össze a (44') mellékfeltételekkel. Azonnal látjuk, hogy az utoljára felírt egyenleteknél nem ez a helyzet, mert belőlük

$$\left[\frac{\partial F_{4k}}{\partial x_k}, \Phi'_i \right] = \frac{-hc}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

következik, míg (44') szerint ennek a kifejezésnek el kellene tűnnie. Mindenesetre azok a térerősségekre vonatkozó f. r.-k használhatók, amelyek a megadottakból a potenciálok differenciálással történt kiküszöbölésével keletkeznek:

$$[F_{ik}, F'_{lm}] = 0 \quad [F_{4i}, F'_{4k}] = 0 \quad (47')$$

$$[F_{4k}, F'_{lm}] = \frac{-hc}{2\pi} \left(\delta_{kl} \frac{\partial \delta}{\partial x_m} - \delta_{km} \frac{\partial \delta}{\partial x_l} \right)$$

vagy háromdimenziósan felírva:

$$[\mathfrak{S}_i, \mathfrak{S}_k] = 0, \quad [\mathfrak{E}_i, \mathfrak{E}'_k] = 0, \quad (47'')$$

$$[\mathfrak{E}_1, \mathfrak{S}'_2] = -[\mathfrak{E}_2, \mathfrak{S}_1] = \frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial \delta}{\partial x_3}.$$

Ugyanis az utoljára felírt egyenletekből következik, ahogy várjuk:

$$\left[\sum_k \frac{\partial F_{4k}}{\partial x_k}, F'_{lm} \right] = \frac{-hc}{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x_l \partial x_m} - \frac{\partial^2 \delta}{\partial x_m \partial x_l} \right) = 0.$$

A (47') f. r.-k valóban egyenértékűek az elektromágneses hullámok fénykvantum-elképzelés szerinti kvantálásával, amint ezt például a sajátrezgések bevezetése útján a 2. § végén megadott módszer alapján felismerhetjük. Tény marad az, hogy a f. r.-k ama általános sémája, amit az első fejezetben kifejlesztettünk, nem minden további

nélkül használható. A többtestprobléma relativisztikus tárgyalására vonatkozó feltevésünk szerint természetesnek tűnik, hogy a részecskék jelenlétét elsősorban a hozzájuk tartozó anyaghullámok bevezetésével vegyük számításba. Az átmenet a klasszikus elméletből a kvantumelméletbe tehát két lépésben történik: az első átmenet a klasszikus pontmechanikából a kvantummechanikai egytestprobléma kvantum-egyenletéhez (egy részecske egy megadott elektromágneses mezőben) és a nyert differenciálegyenletnek klasszikus kontinuumelmélet szerinti értelmezése; a második átmenet a többtestproblémához, miközben az anyaghullámokból adódó négyesáramot a Maxwell-egyenletek szerint az elektromágneses mező forrásának tekintjük és mind az anyag-, mind az elektromágneses hullámokat (mindketten közönséges tér-idővilágban futnak le) kvantálásnak vetjük alá. Ez az eljárás azonban azzal a következménnyel jár, hogy azok az elvi nehézségek, amelyek minden, a kvantummechanikai egytestproblémára eddig felállított elméletben felbukkantak és abból származnak, hogy az egy részecskére vonatkozó relativisztikus energiatétel szerint adott impulzushoz két különböző előjelű energia tartozik, elméletünkben is fennállanak és még teljesen megoldatlanok.

Alapul vesszük Dirac-nak az egy részecskére felállított és a spint számításba vevő elméletét és ezért — mielőtt az elektrodinamikánál szóban forgó nehézség további tárgyalásába belemennénk — összeállítjuk ennek az elméletnek számunkra fontos egyenleteit. Bevezetünk négy ψ_ϱ ($\varrho = 1 \dots 4$) függvényt, négyszer négyes, $\gamma_{\varrho\alpha}^\mu$ elemekkel megadott γ^μ mátrixot, amelyek eleget tesznek a

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\delta_{\nu\mu} \quad (48)$$

összefüggéseknek. Ekkor a ψ_ϱ -k kielégítik a

$$\sum_\mu \sum_\sigma \gamma_{\varrho\sigma}^\mu \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{e}{c} \Phi_\mu \right) \psi_\sigma - imc \psi_\varrho = 0 \quad (49)$$

mezőegyenleteket. Épp így a ψ_ϱ^+ -k kielégítik az adjungált

$$\sum_\mu \sum_\sigma \gamma_{\sigma\varrho}^\mu \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} \Phi_\mu \right) \psi_\sigma^+ + imc \psi_\varrho^+ = 0 \quad (50)$$

egyenleteket. Az elektrontöltést — e -vel jelöltük (ahol e pozitív). Azt állítjuk, hogy mindkét egyenletet a

$$\delta \int L dV dt = 0$$

variációs elvből vezethetjük le, ha

$$L = - \sum_\mu \sum_\sigma \sum_\varrho \left[\gamma_{\varrho\sigma}^\mu \psi_\varrho^+ \left(\frac{\hbar c}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_\mu} + e \Phi_\mu \right) \psi_\sigma - imc^2 \psi_\varrho^+ \psi_\varrho \right] \quad (51)$$

és ψ -t és ψ^+ -t egymástól függetlenül variáljuk. A (49) egyenletre ez az állítás triviális; az (50) egyenletre pedig abból következik, hogy L az

$$L' = + \sum_\mu \sum_\varrho \sum_\sigma \left[\gamma_{\sigma\varrho}^\mu \left(\frac{\hbar c}{2\pi i} \frac{\partial \psi_\sigma^+}{\partial x_\mu} - e \Phi_\mu \psi_\sigma^+ \right) \psi_\varrho + imc^2 \psi_\varrho^+ \psi_\varrho \right] \quad (51')$$

től csak olyan tagokban különbözik, amelyeket divergencia gyanánt lehet felírni és így $\int L dV dt$ variációjához semmi járulékot nem szolgáltatnak:

$$L - L' = - \sum_{\mu} \sum_{\varrho} \sum_{\sigma} \frac{hc}{2\pi i} \gamma_{\varrho\sigma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\psi_{\varrho}^{+} \psi_{\sigma}). \quad (52)$$

Fontos megjegyezni, hogy ezeknél a számításoknál ψ^{+} -t és ψ -t nem tekintjük felcserélhetőeknek, és hogy ψ^{+} -ot mindig ψ -től balra kell írunk. Mivel nem variált mezőlefutásra nézve (49) és (50) szerint L és L' is eltűnnek, $L - L'$ szintén eltűnik. Tehát lehetséges az

$$s_{\mu} = (-e) \sum_{\varrho, \sigma} \gamma_{\varrho\sigma}^{\mu} \psi_{\varrho}^{+} \psi_{\sigma} \quad (53)$$

vektort az ($s_k = \frac{1}{c} i_k$, $s_4 = iQ$) áramvektorral azonosítani; itt a $-e$ tényező természetesen a negatív elektrontöltés miatt jelenik meg. Ugyanis (49) és (50) következményeként fennáll

$$\frac{\partial s_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0, \quad (54)$$

továbbá (51) és (53)-ból következik

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu}} = s_{\mu}. \quad (55)$$

Hogy eme összefüggést megkapjuk, L képzésénél a (49) és (50) kifejezéseket mindig megszorozzuk c -vel.

Annak a variációs elvnek, amelyből a Dirac-féle mezőegyenleteket levezettük, közvetlenül a (12) Hamilton-féle alakja van, amit a függetlenül variálódó P_x és Q_x és a Lagrange-függvénynek a \dot{Q}_x -ban (esetünkben $\partial\psi_0/\partial x_4$ -ben) való linearitása jellemzi. Tehát

$$P_{\sigma 4} = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_{\sigma}}{\partial x_4}} = - \frac{hc}{2\pi i} \sum_{\varrho} \gamma_{\varrho\sigma}^4 \psi_{\varrho}^{+} = - \frac{hc}{2\pi} \psi_{\sigma}^{*}.$$

Az utolsó képletet az igazolja, hogy a (49) és (50) differenciálegyenlet következtében a ψ_{σ} -hoz konjugált komplex ψ_{σ}^{*} függvénynek a

$$\psi_{\sigma}^{*} = \frac{1}{i} \sum_{\varrho} \gamma_{\varrho\sigma}^4 \psi_{\varrho}^{+} \quad (56)$$

kifejezés választható, ha γ^{α} -k hermitikus mátrixok. Így a részecskesűrűség:

$$\frac{1}{(-e)} \frac{1}{i} s_4 = \sum_{\varrho} \psi_{\varrho}^{*} \psi_{\varrho}. \quad (53')$$

A (II), illetve (31) f. r.-k tehát itt a következő egyszerű alakban írhatók:

$$\begin{aligned} [\psi_{\varrho}, \psi'_{\sigma}] &= 0 \\ [\psi_{\varrho}, \psi'_{\sigma}] &= \frac{1}{i} \sum_{\tau} \gamma_{\tau\sigma}^4 [\psi_{\varrho}, \psi_{\tau}^{+}] = \delta_{\varrho\sigma} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ [\psi_{\varrho}^{*}, \psi'_{\sigma}] &= [\psi_{\varrho}^{+}, \psi_{\sigma}^{+}] = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

A ψ_θ és a ψ_θ^+ mennyiségek transzformációs törvényét a Lorentz-transzformációval szemben nem szükséges részletesen megtárgyalni, elegendő azt megjegyeznünk, hogy ez a 3. § általános szabályaival összhangban van, és hogy az (57) f. r.-k relativisztikus invarianciája is bebizonyítottak tekinthető.

Ezen a helyen beszéljük meg még azt a sajátoságot, hogy az (57) f. r.-k két egyen-jogú lehetőség közül csak az egyiket írják le, éspedig azt, amely a közönséges kvantum-mechanikai egyenletek konfigurációs térben szimmetrikus megoldásainak felel meg (Einstein—Bose-statisztika). A másik, az antiszimmetrikus megoldások esete (Fermi—Dirac-statisztika) q -számösszefüggéseknek felel meg, amelyek (57)-ből úgy keletkeznek, hogy a $-$ előjelet mindenütt a $+$ jel helyettesíti. A

$$[F, G]_+ = FG + GF$$

rövidítés bevezetésével

$$[\psi_\theta, \psi_\sigma^*]_+ = \frac{1}{i} \sum_{\tau} \gamma_{\tau\sigma}^4 [\psi_\theta, \psi_\tau^+]_+ = \delta_{\theta\sigma} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (57a)$$

$$[\psi_\theta, \psi'_\sigma] = [\psi_\theta^*, \psi_\sigma'^*]_+ = [\psi_\theta^+, \psi_\sigma^+] = 0.$$

Szükséges, hogy az ennek megfelelően a 2. § (19) és (20) általános egyenleteiben fellépő változásokra kitérjünk. Világos, hogy ezekbe a zárójeles kifejezésekre felírt egyenletekbe a $+$ előjelet kell beírni, amikor F a ψ -ben vagy ψ^+ -ban (vagy ezek deriváltjaiban) lineáris. Látható, hogy ez a helyzet az összes zárójeles kifejezés-nél, amely a 3. § invariancia-bizonyításában fellép és így ez vonatkozik az előttünk fekvő esetre is. Viszont (19) bizonyításánál az F_1 - és F_2 -ről az $F_1 F_2$ -re való következtetésnél óvatossággal kell eljárni. Ugyanis csak a $-$ előjeles közönséges zárójeles kifejezés-re érvényes az, hogy:

$$[F_1 F_2, Q_\alpha]_- = F_1 (F_2 Q_\alpha + Q_\alpha F_2) - (F_1 Q_\alpha + Q_\alpha F_1) F_2,$$

$$[P_\alpha, F_1 F_2]_- = (P_\alpha F_1 + F_1 P_\alpha) F_2 - F_1 (P_\alpha F_2 + F_2 P_\alpha),$$

míg a $[F_1 F_2, Q_\alpha]_+$ és $[P_\alpha, F_1 F_2]_+$ nem redukálhatók külön-külön F_1 és F_2 megfelelő szimbólumaira. Ha tehát F a ψ^+ , $\frac{\partial \psi^+}{\partial x_i}$, ψ , $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ bilineáris alakja, ahol ψ^+ mindig ψ -től balra áll, akkor az ilyen F -re a (19) és (20) összefüggések érvényben maradnak, amennyiben a közönséges zárójeles kifejezéseket $-$ előjellel vesszük. Ezért a (21) és (23), illetve (42) f. r.-k az energiára és az impulzusra közönséges zárójeles kifejezéssel érvényesek, ami az elmélet keresztülvihetősége tekintetében döntő fontosságú.

Látjuk, hogy a hullámok kvantálásának és a többtestprobléma relativisztikusan invariáns tárgyalása szempontjából is a kétféle megoldás: az Einstein—Bose-statisztika és a kizárási elv még mindig formálisan tökéletesen egyenértékűeknek látszik és nem kapunk kielégítő magyarázatot arra, hogy a természet miért a másodikat részesíti előnyben a két lehetőség közül.* Protonokra ugyanúgy, mint elektronokra speciális ψ -függvényeket kell bevezetnünk, amelyek az elektron ψ -függvényeivel fel-

* P. Jordan: Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften 7, 206, 1929. erre vonatkozó közlései nem helytállóak. Egyébként a két eset egyikében sem lép fel az anyaghullámoknál zéruspont-energia.

cserélhetők. Mivel ezek egyenletei — kivéve azt, hogy $-e$ helyett $+e$ -t és m helyett M -et írunk — teljesen azonosak, nem szükséges velük tovább foglalkozni.

Most megvizsgálhatjuk az anyaghullámok és az elektromágneses mező kölcsönhatását, ami a

$$\delta \int L dV dt = 0$$

variációs elvből adódik, ha L helyébe az $L^{(s)}$ sugárzási rész ((45) egyenlet) és $L^{(m)}$ anyagi rész ((51) egyenlet) összegét írjuk. Az (55) következtében ebből

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = s_\alpha,$$

ha s_α helyére az (53) kifejezést írjuk be. Ez fizikailag azt jelenti, hogy ez az áramvektor nemcsak egy külső mezőnek az anyagra való hatására mérvadó, hanem fordítva is: mezőt kelt. Itt azonban újból megmutatkozik olyan f. r.-k felállításának nehézsége, amelyek a

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{1}{i} s_4 = \varrho = (-e) \sum_\sigma \psi_\sigma^* \psi_\sigma$$

feltétellel összhangban vannak. Fennáll ugyanis

$$[\operatorname{div} \mathfrak{E}, \psi_\sigma^*] = (-e) \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_\sigma^*,$$

akár (57)-et, akár (57a)-t vesszük, és ebből (x_i) -nek egy (x'_i) pontot tartalmazó térfogatra való integrálásával következik

$$\left[\int \mathfrak{E}_n df, \psi_\sigma^* \right] = (-e) \psi_\sigma^*.$$

Ez azonban azt jelenti, hogy az (x_i) és (x'_i) pontok véges távolságára sem cserélhető fel az \mathfrak{E} elektromos térerősség a ψ anyaghullám-mezővel. Ilyen nem infinitezimális f. r.-kat tartalmazó elmélet felállítása azonban gyakorlatilag kilátástalannak látszik, főleg az ilyen f. r.-k relativisztikus invarianciájának igazolása ütközik igen nagy nehézségekbe.

Mégis lehetséges volt ezt az akadályt egy formális fogással kiküszöbölni. Ez abban áll, hogy az elektrodinamika $L^{(s)}$ Lagrange-függvényéhez kis kiegészítő tagokat fűzünk hozzá, amelyek szintén a Φ_a potenciáloknak csak első deriváltját tartalmazzák és nem zavarják a mezőegyenletek linearitását, de hatásuk az, hogy P_{44} már nem azonosan zérus. Ezután ezeknek a megváltoztatott egyenleteknek kanonikus f. r.-ival számolhatunk és csak a fizikai alkalmazásoknál a végeredményben konvergáltatjuk a kiegészítő tagok együtthatóit a zérushoz. A legegyszerűbb lehetőség ilyen póttagok számára:

$$-L^{(s)} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - \frac{\varepsilon}{2} (\operatorname{Div} \Phi)^2, \quad \operatorname{Div} \Phi = \sum_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (58)$$

Egy másik lehetőség volna még:

$$-L^{(s)} = \frac{1}{4} (1 + \varepsilon) F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

Könnyen megmutatható azonban, hogy L' és L integráljai variációinak különbsége azonosan eltűnik. A f. r.-k a két esetben némileg különbözők volnának, de fel kell tételeznünk, hogy minden fizikai végeredmény az $\varepsilon \rightarrow 0$ limeszben azonos lenne. A következőkben tehát L számára az (58) kifejezést tartjuk meg. Ekkor a módosított Maxwell-féle egyenletek:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\text{Div } \Phi) = (1 + \varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\text{Div } \Phi) - \square \Phi_\alpha = s_\alpha. \quad (59)$$

A Φ_α -hoz konjugált impulzusok (46) helyett:

$$P_{k4} = -F_{4k}, \quad P_{44} = \varepsilon \text{Div } \Phi. \quad (60)$$

A kanonikus f. r.-k pedig:

$$[\Phi_\alpha, \Phi'_\beta] = 0, \quad [F_{4i}, F'_{4k}] = 0, \quad [F_{4i}, \text{Div } \Phi] = 0. \quad (61)$$

$$[F_{4i}, \Phi'_\alpha] = \delta_{i\alpha} \frac{-hc}{2\pi} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad [\text{Div } \Phi, \Phi'_4] = \frac{1}{\varepsilon} \frac{hc}{2\pi} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Láthatjuk, hogy a korábban felírt (47) f. r.-k helyesek maradnak, de még olyan f. r.-k járulnak hozzájuk, amelyek $\partial \Phi_4 / \partial x_4$ -et tartalmazzák; a (47') vagy a (47'') egyenletek szintén megmaradnak; továbbá az (59) egyenlet $\alpha=4$ esetén nem zavar többé, mert időszerinti második deriváltja fordul elő benne úgy, hogy Φ_4 és a konjugált $P_{\alpha 4}$ -ek valóban egy bizonyos időpontra tetszőleges térfüggvényként írhatók elő. Jegyezzük meg még, hogy most az elmélet invarianciája a potenciálok olyan megváltoztatásaival szemben, amelyek a térerősségeket változtatlanul hagyják, vagyis, amikor

$$\Phi'_\alpha = \Phi_\alpha + \frac{\partial \lambda}{\partial x_\alpha},$$

többé nem áll fenn, de fennáll akkor, ha a λ függvényre kirójuk a

$$\square \lambda = \text{const.}$$

melékfeltételt. A (61) f. r.-k relativisztikus invarianciája a 2. §. szerinti megfontolások segítségével az $\varepsilon \neq 0$ esetre is szigorúan igazolt.

A sugárzás és az anyag Lagrange-függvényére vonatkozó (58) és (51) kifejezések és a hozzájuk tartozó (61) és (57) vagy (57a) f. r.-k tartalmazzák elméletünk alapfeltevéseit. Ezeket kiegészítjük még a Hamilton-féle függvény kifejezéseinek felírásával. Ezek a sugárzási rész esetében (60) és (58) szerint:

$$\begin{aligned} H^{(s)} &= P_{v4} \frac{\partial \Phi_v}{\partial x_4} - L^{(s)} = -F_{4k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_4} + \varepsilon \text{Div } \Phi \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_v} + \\ &+ \frac{1}{4} F_{ik} F_{ik} - \frac{\varepsilon}{2} (\text{Div } \Phi)^2 = -\frac{1}{2} F_{4k} F_{4k} + \frac{1}{4} F_{ik} F_{ik} - \\ &- F_{4k} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_k} + \frac{\varepsilon}{2} (\text{Div } \Phi)^2 - \varepsilon \text{Div } \Phi \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (58')$$

az anyagi rész esetén (51) és (56) szerint:

$$\begin{aligned}
 H^{(m)} = & -\frac{hc}{2\pi i} \gamma_{e\sigma}^4 \psi_e^+ \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_4} - L^{(m)} = +\frac{hc}{2\pi i} \gamma_{e\sigma}^k \psi_e^+ \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k} - \\
 & -imc^2 \psi_\sigma^+ \psi_\sigma + e\gamma_{e\sigma}^\mu \psi_e^+ \psi_\sigma \Phi_\mu = +\frac{hc}{2\pi i} \alpha_{e\sigma}^k \psi_e^* \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k} + \\
 & + mc^2 \alpha_{e\sigma}^\nu \psi_e^* \psi_\sigma + e\alpha_{e\sigma}^k \psi_e^* \psi_\sigma \Phi_\mu + ei\psi_e^* \psi_\sigma \Phi_4,
 \end{aligned} \quad (51')$$

ahol

$$\alpha^k = i\gamma^4 \gamma^k, \quad \alpha^4 = \gamma^4, \quad \alpha^\mu \alpha^\nu + \alpha^\nu \alpha^\mu = 2\delta_{\nu\mu}. \quad (48')$$

A kanonikus f. r.-kban a teljes térre vonatkozó kijelentéshez hozzá kell tennünk azt, hogy minden elektromágneses mezőmennyiség (potenciálok, térerősségek és $\text{Div } \Phi$) a (Ψ_e, Ψ_e^+) anyaghullámok minden mezőmennyiségével (azonos időpontra) felcserélhetők. Ez a körülmény, ami lényeges különbség az elméletünk és a $c \rightarrow \infty$ határesetben érvényes Jordan és Klein-féle elmélet között, a számítások nagyfokú egyszerűsítését eredményezi. Másrészt a Lagrange-függvények két logikailag teljesen független, az anyag- és a fényhullámoknak megfelelő összeadandóra bomlása (ha a protonokat is figyelembe vesszük, akkor három független összeadandóról van szó) elméletünk ideiglenes jellegére utal; ennek egy későbbi, mindenféle hullámmezőt illetően egységesebb felfogásban módosulnia kell.

5.§. A most felállított egyenletek kapcsolata a töltésnélküli mezők kvantum-elektrodinamikájára vonatkozó korábbi feltevésekkel. Jordan és Pauli egy korábbi munkájukban* az elektrodinamika f. r.-it a töltött részek távollétének speciális esetén némileg más szempontból fogalmazták meg, amennyiben (térre és időre vett) négydimenziós integrálokat vizsgálták az integrandusban zárójeles kifejezésekkel, ezért ezt négydimenziós szempontnak nevezhetjük. A minden $f(x...t)$ függvényre érvényes

$$\begin{aligned}
 \int_{V_3} f(x...t) \Delta(x...t) dV dt = & \int_{V_3^+} f(x_1...x_3, ct = -r) \frac{1}{r} dx_1 dx_2 dx_3 - \\
 & - \int_{V_3^-} f(x_1...x_3, ct = r) \frac{1}{r} dx_1 dx_2 dx_3
 \end{aligned} \quad (62)$$

összefüggéssel egy Δ -függvényt definiáltak úgy, hogy ez a függvény a $ct = -r$ és $ct = +r$ fénykúpokban szingularitást mutat, mégpedig a múltra és a jövőre ellentétes előjellel. Ilyen értelemben írhatjuk:

$$\Delta(x...t) = \frac{1}{r} [\delta(r+ct) - \delta(r-ct)], \quad (62')$$

ha δ alatt ismét a közönséges δ -függvényt értjük.

Felvetődik a kérdés: vajon mi következik a Δ -függvényre vonatkozó (62') összefüggésből, ha a téridőre vett négydimenziós integrál helyett az itt elfoglalt állás-

* P. Jordan és W. Pauli ZS. f. Phys. 47, 151, (1928). Ez a paragrafus a következők megértéséhez nem szükséges.

pont szerint mindig csak háromdimenziós integrálokat vezetünk be a $t=0$ -hoz tartozó térre?

Ekkor (62)-ből kapjuk először

$$\Delta = 0 \quad \text{a} \quad t = 0\text{-ra vett integrálokra,} \quad (63)$$

ugyanazt állíthatjuk ekkor φ térszerinti deriváltjairól és a második idő szerinti deriváltjáról, mivel ez

$$\sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_{\alpha}^2} = 0$$

alapján a térszerintiek segítségével kifejezhető. Valamivel érdekesebb adódik, ha $\frac{1}{c} \frac{\partial \Delta}{\partial t}$ -t (62') szerint háromdimenziós integrálokra specializáljuk. Először kapjuk

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{2}{r} \delta'(r),$$

ami még tovább átalakítható. Legyen ugyanis $f(x_1, x_2, x_3)$ a három térkoordináta tetszőleges függvénye és számítsuk ki a

$$\int f \frac{2}{r} \delta'(r) dx_1 dx_2 dx_3$$

integrált. Vezessünk be polárkoordinátákat és f szög-szerinti integrálját tegyük $\Phi(r)$ -rel egyenlővé:

$$\Phi(r) = \int f d\Omega \quad \text{tehát} \quad \Phi(0) = 4\pi f(0)$$

ekkor

$$\int f \frac{2}{r} \delta'(r) dV = \int_0^{\infty} \Phi(r) 2\delta'(r) r dr.$$

Ha $\Phi(r)$ -et negatív r -ekre párosfüggvény gyanánt folytatva képzeljük — úgy, hogy $\Phi(r)$ az $r=0$ -nál folytonos maradjon és $r\Phi(r)$ az $r=0$ -nál még egy folytonos deriválttal rendelkezzen — akkor, mivel $\delta'(r)$ páratlan függvény, felírható:

$$\int f \frac{2}{r} \delta'(r) dV = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi \delta'(r) r dr = -\frac{d}{dr} (r\Phi) \Big|_{r=0} = -\Phi(0) = -4\pi f(0).$$

Míntehogy tehát a kiszámított integrál értéke minden $f(x_1, x_2, x_3)$ -ra $-4\pi f(0)$, mondhatjuk, hogy fennáll

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Delta}{\partial t} = -4\pi \delta(x_1, x_2, x_3) \quad t = 0\text{-hoz tartozó integrálokra.} \quad (64)$$

Most már könnyen átvihetjük a Jordan és Pauli munkájában szereplő térerősségekre vonatkozó f. r.-kat:

$$[\mathfrak{E}_i, \mathfrak{E}_k'] = [\mathfrak{H}_i, \mathfrak{H}_k'] = \frac{ihc}{8\pi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} - \delta_{ik} \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right) \Delta(P' - P),$$

$$[\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_2'] = -[\mathfrak{H}_1, \mathfrak{E}_2'] = \frac{ihc}{8\pi^2} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Delta(P' - P)$$

az itt használt (47'')-re, amelyek (63) és (64) következtében valóban a felírtakból származnak.

A négydimenziós álláspontnak a háromdimenzióssal szemben az az előnye, hogy a f. r.-k relativisztikus invarianciája közvetlenül belátható, míg ezt az itt képviselt háromdimenziós álláspontból a 2. §. meglehetősen körülményes eljárása szerint be kell bizonyítani. Mégis több okból a háromdimenziós álláspontot kell a f. r.-k megfogalmazásánál előnyben részesíteni. Először, a négydimenziós álláspontnál, annak következtében, hogy nem csak végtelenül közeli pontok adnak járulékot a zárójeles kifejezések integráljához, fényhullámoktól különböző más hullámokra történő általánosítás nehezen áttekinthető. Már az erőmentes anyaghullámoknál a hullámhossztól függő fázissebesség következtében a fénykúpra vett háromdimenziós integrál mellett fellép a hozzá tartozó Δ -függvény definíciójában még egy, e kúp belsejére vett négydimenziós integrál is. Külső elektromágneses térben terjedő anyaghullámoknál a Δ -függvény analogonja ugyan tulajdonságai alapján a hullámegyenlettel definiálható, de általánosan explicite nem számítható ki. Végül minden fizikai alkalmazásnál csak a $t = \text{const.}$ -hoz tartozó háromdimenziós integrál jön szóba úgy, hogy a háromdimenziós álláspontnak az elmélet fizikai tartalmához szorosabb kapcsolata van, mint a négydimenziósnak.

6. § A teljes hullámmező energiája és impulzusa megmaradási törvényeinek differenciális és integrál alakja. Az I. fejezetben megmutattuk, hogyan lehet mindig megadni a mezőegyenletek kanonikus alakja esetén időben állandó térfogati integrálokat a teljes energiára és a teljes impulzusra (lásd a (7), (13) és (41) egyenleteket). Ugyanis

$$J_u = \int \left(\sum_{\alpha} P_{\alpha} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_u} - \delta_{u4} L \right) dV, \quad (41')$$

ahol a J_v négyesvektor komponensei $v = 1, 2, 3$ esetén a $-ic$ -vel szorzott impulzuskomponenseket állítják elő, míg $J_4 = \bar{H}$ a teljes energiát határozza meg. Ott azonban nem mutattuk meg, hogy az energia- és impulzustétel kifejezhető-e a

$$\frac{\partial T_{uv}}{\partial x_v} = 0 \quad (65)$$

differenciális alakban, ahol $T_{\mu\nu}$ ismert módon a feszültség valamint az energia- és impulzussűrűség tenzorát jelenti; innen aztán

$$J_{\mu} = \int T_{\mu 4} dV \quad (66)$$

állandósága következik. Meg akarjuk mutatni, hogy tényleg ez a helyzet és bár az integranduszok (41')-ben és (66)-ban nem esnek egybe, de az integrálértékek igen, ha a maradék kétdimenziós felületi integrálokat mindig zérusnak vesszük fel. Hangsúlyozni kell azonban, hogy csak az elektromágneses és anyaghullámokból álló teljes mezőre várhatók tényleges megmaradási tételek.

Kezdjük az energiatenzornak az anyaghullámoktól származó járulékával. Ez jól ismert és legtökéletesebben Tetrode* számította ki. Tekintettel a tényezők előforduló fel nem cserélhetőségére, a kérdéses számítást röviden megismétljük. A Lagrange-függvény anyaghullámra vonatkozó részének (51) kifejezéséből és az (55) össze-

* H. Tetrode, ZS. f. Phys. loc. cit.

függésből kiindulva igyekszünk a Lorentz-erő $F_{\mu\nu} s_\nu$ kifejezését négydimenziós divergenciává átalakítani. Legelőször kapjuk:

$$F_{\mu\nu} s_\nu = \left(\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} \right) s_\nu = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} s_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\Phi_\mu s_\nu),$$

ahol a már említett, az anyaghullámok mezőegyenleteiből következő, fontos (54) összefüggést:

$$\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \quad (54)$$

felhasználtuk. Vegyük figyelembe még az (55)-t is és ekkor

$$F_{\mu\nu} s_\nu = \frac{\partial L}{\partial \Phi_\nu} \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\Phi_\mu s_\nu). \quad (67)$$

Itt fontos, hogy az áramkomponensek — mivel csupán Ψ és Ψ^+ -gal kifejezhetők — az összes elektromágneses mezőmennyiségekkel felcserélhetők, úgy, hogy (67)-ben a tényezők sorrendje nem számít. Ugyanezen okból $\left(\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} \right)$ felcserélhetősége ψ -vel és ψ^+ -gal) írhatjuk:

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} = \frac{\partial L}{\partial \Phi_\nu} \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \psi_e^+}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \psi_e^+} + \frac{\partial^2 \psi_e^+}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_e^+}{\partial x_\nu}} + \frac{\partial L}{\partial \psi_e} \frac{\partial \psi_e}{\partial x_\mu} + \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_e}{\partial x_\nu}} \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial x_\nu \partial x_\mu},$$

ahol vigyáztunk arra, hogy a ψ^+ -ot tartalmazó tényezők mindig a ψ -t tartalmazóktól balra álljanak. Ezenkívül, ahogy L variációjából következik, fennállanak a

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_e^+} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_e^+}{\partial x_\nu}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi_e} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_e}{\partial x_\nu}}$$

mezőegyenletek úgy, hogy (67)-ből következik

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} s_\nu = & -\frac{\partial \psi_e^+}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_e^+}{\partial x_\nu}} - \frac{\partial^2 \psi_e^+}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_e^+}{\partial x_\nu}} - \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_e}{\partial x_\nu}} \right) \frac{\partial \psi_e}{\partial x_\mu} \\ & - \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_e}{\partial x_\nu}} \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \frac{\partial L}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\Phi_\mu s_\nu), \end{aligned}$$

de ez azt jelenti, hogy az anyag energiaimpulzus-tenzorára, melyet

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{\partial \psi_e^+}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_e^+}{\partial x_\nu}} + \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_e}{\partial x_\mu}} \frac{\partial \psi_e}{\partial x_\nu} - \delta_{\mu\nu} L + \Phi_\mu s_\nu \quad (68)$$

definiál, fennállanak az

$$F_{\mu\nu} s_\nu = -\frac{\partial T_{\mu\nu}^{(m)}}{\partial x_\nu} \quad (69)$$

összefüggések. (68) első tagja az L -nek az (51) szerinti megválasztásával kiesik és ekkor L -et magát is nullával tehetjük egyenlővé; mégis érdemes megemlíteni, hogy a levezetés szerint a (69) összefüggés akkor is helyes marad, ha a (68)-ban L -et L' -vel — lásd (51') egyenlet — vagy $(L+L')/2$ -vel helyettesítjük. Az L -re vonatkozó (51) kifejezéssel (68)-ból kapjuk:

$$\begin{aligned} -T_{\mu\nu}^{(m)} &= \frac{hc}{2\pi i} \sum_{\sigma, \varrho} \gamma_{\sigma\varrho}^v \psi_\sigma^+ \frac{\partial \psi_\varrho}{\partial x_\mu} - \Phi_\mu s_\nu = \\ &= \sum_{\sigma, \varrho} \gamma_{\sigma\varrho}^v \psi_\sigma^+ \left(\frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_\mu} + e\Phi_\mu \right) \psi_\varrho. \end{aligned} \quad (70)$$

A $T_{\mu\nu}^{(m)}$ tenzor eme kifejezése nem szimmetrikus μ -ben és ν -ben. Ahogy Tetrode kimutatta, alkalmazhatunk egy μ -ben és ν -ben szimmetrizált kifejezést is. Mivel ez az energiának és az impulzusnak ugyanazon integrálértékére vezet, mint a (68)-as vagy (70)-es nem szimmetrikus kifejezés, nem szükséges részletesebben kitérni erre a pontra.*

Térjünk át az energiaimpulzus-tenzornak az elektromágneses mezőtől származó részére. Azt fogjuk megkövetelni, hogy ez a rész az áramnak az

$$s_\nu = \frac{\partial F_{\nu\varrho}}{\partial x_\varrho} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\text{Div } \Phi) \quad (59)$$

kifejezésével eleget tegyen a

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}^{(s)}}{\partial x_\nu} = F_{\mu\nu} s_\nu \quad (71)$$

összefüggésnek. Ha nem lennének ε -nal szorzott tagok jelen, akkor ismert módon $-T_{\mu\nu}^{(s)}$ gyanánt az

$$S_{\mu\nu} = F_{\mu\varrho} F_{\nu\varrho} - \frac{1}{4} F_{\varrho\sigma} F_{\varrho\sigma} \delta_{\mu\nu} \quad (72)$$

Maxwell-féle tenzort vehetnénk, mivel ez a (43) tekintetbevételével az

$$\frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -F_{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\varrho}}{\partial x_\varrho} \quad (73)$$

azonosságot kielégíti. Tehát keresnünk kell még az áram második tagjához ε -nal arányos kiegészítő tagokat. Közben figyelembe vesszük, hogy az anyaghullámok mező-egyenleteiből következő

$$\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu} = 0$$

* Viszont a teljes impulzusnyomaték kiszámításához szükséges μ -ben és ν -ben szimmetrikus kifejezést használni $T_{\mu\nu}^{(m)}$ -re.

egyenletek szerint (59) következtében fenn kell állnia:

$$\square \operatorname{Div} \Phi = \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\nu} = 0. \quad (74)$$

Azt állítjuk, hogy ekkor a (72)-höz hozzáfűzendő $\varepsilon \sum \mu \nu$ tagok, a

$$\begin{aligned} \sum_{\mu \nu} = & \overline{\Phi_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\operatorname{Div} \Phi)} + \overline{\Phi_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\operatorname{Div} \Phi)} - \\ & - \overline{\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon} (\Phi_\varepsilon \operatorname{Div} \Phi) \delta_{\mu \nu}} + \frac{1}{2} (\operatorname{Div} \Phi)^2 \delta_{\mu \nu} \end{aligned} \quad (75)$$

választással a kívánt eredményt szolgáltatják. A felülvonás szimmetrizálást jelent a tényezők fel nem cserélhetősége miatt. Ekkor kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_{\mu \nu}}{\partial x_\nu} = & \overline{(\operatorname{Div} \Phi) \frac{\partial}{\partial x_\mu} \operatorname{Div} \Phi} + \overline{\Phi_\nu \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\mu} (\operatorname{Div} \Phi)} + \overline{\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\operatorname{Div} \Phi)} + \\ & + \overline{\Phi_\mu \square \operatorname{Div} \Phi} - \overline{\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\operatorname{Div} \Phi)} - \overline{\operatorname{Div} \Phi \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\operatorname{Div} \Phi)} - \overline{\Phi_\nu \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\mu} (\operatorname{Div} \Phi)}. \end{aligned}$$

Ebből (74) következtében csak

$$\frac{\partial \sum_{\mu \nu}}{\partial x_\nu} = \left(\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\operatorname{Div} \Phi) = -F_{\mu \nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\operatorname{Div} \Phi) \quad (76)$$

marad, tehát az $L^{(s)}$ (58) kifejezésének alkalmazásával kapott

$$\begin{aligned} -T_{\mu \nu}^{(s)} = & S_{\mu \nu} + \varepsilon \sum_{\mu \nu} = F_{\mu \varepsilon} F_{\nu \varepsilon} + \varepsilon \overline{\Phi_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\operatorname{Div} \Phi)} + \\ & + \varepsilon \overline{\Phi_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\operatorname{Div} \Phi)} - \varepsilon \overline{\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon} (\Phi_\varepsilon \operatorname{Div} \Phi) \delta_{\mu \nu}} + L^{(s)} \delta_{\mu \nu} \end{aligned} \quad (77)$$

valóban kielégíti a (71) összefüggést. Ez még (59) szerint átalakítható:

$$\begin{aligned} -T_{\mu \nu}^{(s)} = & F_{\nu \varepsilon} \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon} (\Phi_\mu F_{\nu \varepsilon}) - \varepsilon \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} \operatorname{Div} \Phi + \Phi_\mu s_\nu + \\ & + \varepsilon \overline{\frac{\partial}{\partial x_\mu} (\Phi_\mu \operatorname{Div} \Phi)} - \varepsilon \overline{\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon} (\Phi_\varepsilon \operatorname{Div} \Phi) \delta_{\mu \nu}} + L^{(s)} \delta_{\mu \nu}. \end{aligned} \quad (77')$$

Lényeges, hogy (77') és (68) összeadásánál a $\Phi_\mu s_\nu$ -es tagok kiesnek. A (69) és (71) szerint a (65) megmaradási tételt ténylegesen kielégítő

$$T_{\mu \nu} = T_{\mu \nu}^{(m)} + T_{\mu \nu}^{(s)} \quad (78)$$

összeg és (41') intergrandusza közötti különbség az elektromágneses mező (60) impulzusa figyelembevételével $v=4$ esetén:

$$T_{\mu 4}^{(s)} + T_{\mu 4}^{(m)} - \left(\sum_{\alpha} P_{\alpha 4} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_{\mu}} - L \delta_{\mu 4} \right) = + \frac{\partial}{\partial x_0} (\Phi_{\mu} F_{40}) - \\ - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\Phi_4 \text{Div } \Phi) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_0} (\Phi_0 \text{Div } \Phi) \delta_{\mu 4}.$$

Ezek a kifejezések azonban csak térszerinti deriváltakat tartalmaznak, tehát eltűnnek a térbeli tartományra való integrálásnál. Ez az $F_{44}=0$ miatt az első tagra triviális, a másik kettőse közvetlenül látható $\mu=1, 2, 3$ esetén, míg $\mu=4$ esetében

$$- \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_4} (\Phi_4 \text{Div } \Phi) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_0} (\Phi_0 \text{Div } \Phi) = \varepsilon \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\Phi_k \text{Div } \Phi)$$

marad.

Ezzel a kívánt bizonyítást teljesen befejeztük és a megmaradási törvények differenciális és kanonikus integrálalakja közötti kapcsolatot megeremtettük. Egyúttal újból igazoltuk J_k vektorjellegét. Hangsúlyozni kell azonban, hogy az energia és impulzus elektromágneses részére megadott kifejezés a sugárzásnak nullapontenergiát, az elektronoknak és protonoknak pedig sajátenergiát tulajdonít, ami a valóságnak nem felel meg. * Azt, hogy az itt kifejtett elmélet ezen elvi hibája mennyiben nem zavarja a speciális fizikai problémák megoldását, a következő fejezet világítja meg.

III. Közelítő eljárások az egyenletek integrálására és fizikai alkalmazások

7.§. Valószínűségi amplitúdók differenciálegyenleteinek felállítása. Ennek a fejezetnek számításaihoz azt a H Hamilton-féle függvényt vesszük alapul, amelynek a sugárzásra és az anyaghullámokra vonatkozó részeit (58'), illetve (51') adja meg. Célszerű a képzetes időkoordináta helyett az $x_4 = ict$ szint valós t és $\Phi_4 = i\Phi_0$ bevezetése; egyébként az alkalmazásokra való tekintettel Heaviside-féle

egységekről ismét közönségesekre kell áttérnünk úgy, hogy Φ_{μ} -t $\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \Phi_{\mu}$ -vel, s_{μ} -t

pedig $\sqrt{4\pi} s_{\mu}$ -vel kell helyettesítenünk. Végül célszerű még bevezetni a külső „beléol-tott” erőket, amelyeknek forrásai nem tartoznak a rendszerhez; ezek potenciáljait (c -számok) jelölje Φ_{μ}^0 . Pl. az atommag nagy tömege miatt a belőle származó erőhatásokat gyakran a Φ_{μ}^0 -ban vesszük figyelembe, tehát a visszahatást elhanyagoljuk.

* Közismerten Klein és Jordan az elméletükben ki tudták küszöbölni az elektronok saját-energiáját az energia kifejezés bizonyos tényezőinek átalakításával. Ez az átalakítás egyenértékű bizonyos, a $[\Phi_k, \psi]$ zárójeles kifejezéseket tartalmazó tagoknak az energiasűrűséghez való hozzáadásával. Elméletünkben, ahol azonos időpontban Φ_k felcserélhető ψ -vel, a Klein—Jordan-féle fogásnak, úgy látszik nincs egyszerű analógja.

Ha bevezetjük a közönséges egységekben mért Φ_μ potenciálhoz konjugált impulzust:

$$\Pi_k = -\frac{1}{4\pi c} \mathfrak{E}_k = +\frac{1}{4\pi c} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_k} \right), \quad (60')$$

$$\Pi_0 = \frac{\varepsilon}{4\pi c} \text{Div } \Phi = \frac{\varepsilon}{4\pi c} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \right),$$

akkor a f. r.-k:

$$[\Pi_\varrho, \Phi'_0] = \frac{h}{2\pi i} \delta_{\varrho\sigma} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (61')$$

eszerint a Hamilton-függvény sugárzási része az

$$\begin{aligned} \bar{H}^{(s)} = \int dV \left\{ \frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \right)^2 + 2\pi c^2 \Pi_k^2 - c \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_k} \Pi_k + \right. \\ \left. + \frac{2\pi c^2}{\varepsilon} \Pi_0^2 - c \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} \Pi_0 \right\} \end{aligned} \quad (79)$$

alakot veszi fel. Ekkor a Hamilton-függvény anyagi része:

$$\begin{aligned} \bar{H}^{(m)} = \int dV \left[\frac{hc}{2\pi i} \alpha_{\varrho\sigma}^k \psi_\varrho^* \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k} + mc^2 \alpha_{\varrho\sigma}^4 \psi_\varrho^* \psi_\sigma + \right. \\ \left. + e(\Phi_k^0 + \Phi_k) \alpha_{\varrho\sigma}^k \psi_\varrho^* \psi_\sigma - e(\Phi_0^0 + \Phi_0) \psi_\varrho^* \psi_\sigma \right]. \end{aligned} \quad (79a)$$

A hozzájuk tartozó f. r.-kat épp úgy, mint az előbb, az (57) és (57a) szabja meg, és pedig

a) Einstein—Bose-statisztika esetén

$$\psi_\varrho(\mathbf{r}) \psi_\sigma^*(\mathbf{r}') - \psi_\sigma^*(\mathbf{r}') \psi_\varrho(\mathbf{r}) = \delta_{\varrho\sigma} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (57)$$

b) Kizárási elv (ekvivalencia-tilalom) esetén

$$\psi_\varrho(\mathbf{r}) \psi_\sigma^*(\mathbf{r}') + \psi_\sigma^*(\mathbf{r}') \psi_\varrho(\mathbf{r}) = \delta_{\varrho\sigma} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (57a)$$

A (79a) egyenlettel definiált kvantumelméleti probléma megoldása céljából célszerű φ -ket, illetve Φ -ket sorbafejteni alkalmas ortogonális rendszerek szerint. Erre a sorfejtésre természetes módon kínálkoznak azon mezőegyenletek klasszikus megoldásai, amelyeket akkor kapunk, ha a (79a)-ból a kölcsönhatási tagokat (tehát a $\varphi^* \alpha \varphi \Phi$ alakú tagokat) töröljük.

Legelőször is tehát tegyük fel, hogy az anyaghullámok Dirac-féle egyenleteit az időben állandónak feltételezett Φ_μ^0 potenciálok esetén integráltuk. (Ha a Φ_μ^0 potenciálok egy időtől függő részt tartalmaznak, akkor ezt a tagot leválaszthatjuk és célszerű módon (79) kölcsönhatási tagjaival együtt tárgyalhatjuk.) A megoldott „perturbálatlan” probléma minden egyes E^s sajátértékéhez a sajátfüggvények egy, az

$$\int dV u_\varrho^{*r} u_\varrho^s = \delta_{rs} \quad (80)$$

szerint normált rendszere ($\varrho = 1, 2, 3, 4$) tartozik. Továbbá fennállanak az

$$\sum_s u_\varrho^{*s}(\mathbf{r}) u_\sigma^s(\mathbf{r}') = \delta_{\varrho\sigma} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (80')$$

„inverz” ortogonalitási relációk. Ekkor felírjuk

$$\psi_\rho = \sum_s a_s u_\rho^s, \quad \psi_\rho^* = \sum_s a_s^* u_\rho^{*s}. \quad (81)$$

Itt az a mennyiségek kielégítik a

$$\text{Bose—Einstein-statisztika esetén} \quad a_s a_t^* - a_t^* a_s = \delta_{st}, \quad (82)$$

$$\text{Kizárási elv esetén} \quad a_s a_t^* + a_t^* a_s = \delta_{st}$$

f. r.-kat. Ugyanezt az eljárást kell alkalmazni az anyaggal való kölcsönhatás nélküli üreksugárzásra is. Ekkor azonban később megmagyarázandó okok miatt nem a (79) Hamilton-függvényből, hanem egy némileg módosított függvényből indulunk ki (kétszer fellépő indexekre a következőkben mindig összegezzünk):

$$H_0^{(s)} = \int dV \left\{ \frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \right)^2 + 2\pi c^2 \Pi_k^2 - c \frac{\delta \Phi_0}{\partial x_k} \Pi_k + \right. \\ \left. + \frac{2\pi c^2}{\varepsilon + \delta} \Pi_0^2 - \frac{\varepsilon c}{\varepsilon + \delta} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} \Pi_0 = \frac{\varepsilon \delta}{8\pi(\varepsilon + \delta)} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\delta}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right)^2 \right\}, \quad (83)$$

ahol δ kis paraméter. A (82)-höz tartozó klasszikus hullámprobléma megoldásait keressük. Evégből legyen

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}} q_1^r \cos \frac{\pi}{L} \chi_r x \cdot \sin \frac{\pi}{L} \lambda_r y \cdot \sin \frac{\pi}{L} \mu_r z, \\ \Phi_2 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}} q_2^r \sin \frac{\pi}{L} \chi_r x \cdot \cos \frac{\pi}{L} \lambda_r y \cdot \sin \frac{\pi}{L} \mu_r z, \\ \Phi_3 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}} q_3^r \sin \frac{\pi}{L} \chi_r x \cdot \sin \frac{\pi}{L} \lambda_r y \cdot \cos \frac{\pi}{L} \mu_r z, \\ \Phi_0 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}} q_0^r \sin \frac{\pi}{L} \chi_r x \cdot \sin \frac{\pi}{L} \lambda_r y \cdot \sin \frac{\pi}{L} \mu_r z. \end{aligned} \quad (84)$$

Itt L jelenti a (kockaalakúnak képzelt) üreg élhosszát; χ_r, λ_r, μ_r egész számok, amelyek az r indexű rezgéshez tartoznak.

Legyenek:

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}} p_1^r \cos \frac{\pi}{L} \chi_r x \cdot \sin \frac{\pi}{L} \lambda_r y \cdot \sin \frac{\pi}{L} \mu_r z \\ H_2 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}} p_2^r \sin \frac{\pi}{L} \chi_r x \cdot \cos \frac{\pi}{L} \lambda_r y \cdot \sin \frac{\pi}{L} \mu_r z \\ H_3 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}} p_3^r \sin \frac{\pi}{L} \chi_r x \cdot \sin \frac{\pi}{L} \lambda_r y \cdot \cos \frac{\pi}{L} \mu_r z \\ H_0 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}} p_0^r \sin \frac{\pi}{L} \chi_r x \cdot \sin \frac{\pi}{L} \lambda_r y \cdot \sin \frac{\pi}{L} \mu_r z. \end{aligned} \quad (85)$$

Ezáltal a Hamilton-függvény átalakul:

$$\begin{aligned}\bar{H}^{(s)} = & 2\pi c^2 \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \frac{1}{\varepsilon + \delta} p_0^2 \right) \\ & - \frac{c\pi}{L} q_0^r (\kappa_r p_1^r + \lambda_r p_2^r + \mu_r p_3^r) + \frac{\varepsilon c\pi}{L(\varepsilon + \delta)} p_0^r (q_1^r \kappa_r + q_2^r \lambda_r + q_3^r \mu_r) \\ & - \frac{\pi}{8L^2} (q_1^r \kappa_r + q_2^r \lambda_r + q_3^r \mu_r)^2 \frac{\varepsilon\delta}{\varepsilon + \delta} + \frac{\delta\pi}{8L^2} q_0^2 (\kappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2) + \\ & + \frac{\pi}{8L^2} [(q_1^r \lambda_r - q_2^r \kappa_r)^2 + (q_1^r \mu_r - q_3^r \kappa_r)^2 + (q_2^r \mu_r - q_3^r \lambda_r)^2].\end{aligned}\quad (86)$$

Az ehhez tartozó kanonikus egyenletek a p -k kiküszöbölése után

$$\begin{aligned}\left(\frac{L}{c\pi}\right)^2 \ddot{q}_1^r + (\kappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2) q_1^r &= (1 + \varepsilon) \left(-\frac{L}{c\pi} \dot{q}_0^r + \kappa_r q_1^r + \lambda_r q_2^r + \mu_r q_3^r \right) \kappa_r \\ \left(\frac{L}{c\pi}\right)^2 \ddot{q}_2^r + (\kappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2) q_2^r &= (1 + \varepsilon) \left(-\frac{L}{c\pi} \dot{q}_0^r + \kappa_r q_1^r + \lambda_r q_2^r + \mu_r q_3^r \right) \lambda_r \\ \left(\frac{L}{c\pi}\right)^2 \ddot{q}_3^r + (\kappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2) q_3^r &= (1 + \varepsilon) \left(-\frac{L}{c\pi} \dot{q}_0^r + \kappa_r q_1^r + \lambda_r q_2^r + \mu_r q_3^r \right) \mu_r \\ (1 - \delta) \left[\left(\frac{L}{c\pi}\right)^2 \ddot{q}_0^r + (\kappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2) q_0^r \right] &= -(1 + \varepsilon) \left(-\frac{L}{c\pi} \dot{q}_0^r + \kappa_r q_1^r + \lambda_r q_2^r + \mu_r q_3^r \right)\end{aligned}\quad (87)$$

r minden értékére (azaz minden $\kappa_r, \lambda_r, \mu_r$ értékrendszerre) a (87) egyenletek négy csatolt oszcillátor mozgásait írják le. Ilyen feladat klasszikus megoldását a $q_0^r = b_0 \cos 2\pi\nu_r t$; $q_1^r = b_1 \sin 2\pi\nu_r t$; $q_2^r = b_2 \sin 2\pi\nu_r t$ ansatz szolgáltatja. Ekkor a (87) egyenlet átmegy olyan lineáris egyenletrendszerbe, melynek determinánsa $\left(\frac{2L}{c} \nu_r = v_r', X_r = \kappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2 - v_r'^2\right)$:

$$\begin{vmatrix} \frac{X_r}{1 + \varepsilon} - \kappa_r^2, & -\kappa_r \lambda_r, & -\kappa_r \mu_r, & -\kappa_r v_r' \\ -\lambda_r \kappa_r, & \frac{X_r}{1 + \varepsilon} - \lambda_r^2, & -\lambda_r \mu_r, & -\lambda_r v_r' \\ -\mu_r \kappa_r, & -\mu_r \lambda_r, & \frac{X_r}{1 + \varepsilon} - \mu_r^2, & -\mu_r v_r' \\ +v_r' \kappa_r, & v_r' \lambda_r, & v_r' \mu_r, & \frac{X_r(1 - \delta)}{1 + \varepsilon} + v_r'^2 \end{vmatrix}.\quad (88)$$

Ha ezt zérussal tesszük egyenlővé, akkor kapunk egy $v_r'^2 = \kappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2$ háromszoros gyököt és egy

$$v_r'^2 = \frac{\varepsilon - \varepsilon\delta}{\varepsilon + \delta} \cdot (\kappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2)$$

egyszeres gyököt. Legyen a négy gyök: $v_{r,1}$; $v_{r,2}$; $v_{r,3}$; $v_{r,0}$. A háromszoros $v_{r,1} = v_{r,2} = v_{r,3}$ gyökhöz három lineárisan független megoldás tartozik, amelyek kielégítik a

$$b_1 \kappa_r + b_2 \lambda_r + b_3 \mu_r + b_0 v'_{r,1} = 0 \quad (89)$$

feltételt. A $v_{r,0}$ -hoz a

$$b_1 = \kappa_r, \quad b_2 = \lambda_r, \quad b_3 = \mu_r, \quad b_0 = -\frac{v_{r,0}}{1-\delta} \quad (90)$$

(nem normált) megoldás tartozik. A $\delta=0$ határesetben még $v_{r,0}=v_{r,1}$ is fennáll és így a negyedik rezgés nem lineárisan független az első háromtól. Ekkor (87)-nek ténylegesen csak három lineárisan független periodikus megoldása létezik. A (87) negyedik lineárisan független megoldása aperiodikus és $\delta \rightarrow 0$ határátmenet révén a következőképpen kapható. A $\delta \neq 0$ esetében a

$$\begin{aligned} q_1^r &= \kappa_r \sin 2\pi v_{r,1} t; & q_1^r &= \kappa_r \sin 2\pi v_{r,0} t; \\ q_2^r &= \lambda_r \sin 2\pi v_{r,1} t; & q_2^r &= \lambda_r \sin 2\pi v_{r,0} t \\ q_3^r &= \mu_r \sin 2\pi v_{r,1} t; & q_3^r &= \mu_r \sin 2\pi v_{r,0} t \\ q_0^r &= -v'_{r,1} \cos 2\pi v_{r,1} t, & q_0^r &= -\frac{v'_{r,0}}{1-\delta} \cos 2\pi v_{r,0} t \end{aligned}$$

megoldásokat kombináljuk kivonás útján egy lebegéssé:

$$\begin{aligned} q_1^r &= 2\kappa_r \cos 2\pi \frac{v_{r,1} + v_{r,0}}{2} t \cdot \sin 2\pi \frac{v_{r,1} - v_{r,0}}{2} t, \\ q_2^r &= 2\lambda_r \cos 2\pi \frac{v_{r,1} + v_{r,0}}{2} t \cdot \sin 2\pi \frac{v_{r,1} - v_{r,0}}{2} t, \\ q_3^r &= 2\mu_r \cos 2\pi \frac{v_{r,1} + v_{r,0}}{2} t \cdot \sin 2\pi \frac{v_{r,1} - v_{r,0}}{2} t \\ q_0^r &= 2v'_{r,1} \sin 2\pi \frac{v_{r,1} + v_{r,0}}{2} t \cdot \sin 2\pi \frac{v_{r,1} - v_{r,0}}{2} t - \left(v'_{r,1} - \frac{v'_{r,0}}{1-\delta} \right) \cos 2\pi v_{r,0} t. \end{aligned} \quad (91)$$

A $\delta \rightarrow 0$ határértékben $v_{r,0} = v_{r,1} \left(1 - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2\varepsilon} \right)$; s ha q értékeit ε/δ -val szorozzuk és azután áttérünk a $\delta=0$ limeszre, akkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} q_1^r &= 2\pi(1+\varepsilon)v_r t \cdot \kappa_r \cos 2\pi v_r t \\ q_2^r &= 2\pi(1+\varepsilon)v_r t \cdot \lambda_r \cos 2\pi v_r t \\ q_3^r &= 2\pi(1+\varepsilon)v_r t \cdot \mu_r \cos 2\pi v_r t \\ q_0^r &= 2\pi(1+\varepsilon)v_r t \cdot v'_r \sin 2\pi v_r t - (1-\varepsilon)v'_r \cos 2\pi v_r t. \end{aligned} \quad (92)$$

Tehát a $\delta=0$ esetben (87)-nek aperiodikus megoldásai léteznek. Ha a térerősségek ehhez tartozó parciális rezgéseit képezzük, akkor adódik:

$$q_1^r \lambda_r - q_2^r \kappa_r = 0, \dots,$$

$$q_0^r \kappa_r + \frac{L}{c\pi} \dot{q}_1^r = 2\varepsilon v_r' \kappa_r \cos 2\pi v_r t, \dots \quad (93)$$

A potenciálok aperiodikus változásaihoz tehát a térerősségeknek maguknak periodikus rezgéseit tartoznak, amelyek ezenfelül az $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenettel eltűnnek. Ezeknek az itt vizsgált aperiodikus megoldásoknak köszönhetjük a f. r.-k (61') egyszerű alakját is, ezek kezeskednek Φ_0 és Φ_k felcserélhetőségéről. Az $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenet pedig valamennyi fizikai kérdésfeltevésnél minden nehézség nélkül keresztülvihető, mert a térerősségek számára nem léteznek (92) fajtájú aperiodikus megoldások.

Mégis kényelmetlen volna ezekkel az aperiodikus kiindulási megoldásokkal számolni; a \bar{H}_0^s függvényben ezért csatoltunk még δ tagokat. A δ tagok bevezetésének tehát az üreg bevezetéséhez hasonló értelme van, ez kényszeríti ki a diszkrét sajátértékspektrumot. Az üreg és a δ tagok mindenesetre megzavarják az egyenletek invarianciáját a térbeli és az időbeli transzformációkkal szemben. A végeredményben azonban a végtelen nagy üreg és $\delta=0$ határesetére térünk át és ekkor az invariancia ismét helyreáll.

A (86) egyenlet kvantumelméleti megoldásához úgy jutunk, hogy a p^r, q^r helyett a főrezgések P^r impulzusait és Q^r koordinátáit vezetjük be (minden r -hez 4); az elemi számítás a következő lehetséges sémát adja:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4cL}} q_1^r &= \frac{\lambda_r}{\sqrt{v_{r,1}'(\lambda_r^2 + \kappa_r^2)}} Q_1^r + \frac{\mu_r \kappa_r}{v_{r,1}' \sqrt{v_{r,1}'(\lambda_r^2 + \kappa_r^2)}} Q_2^r + \frac{\kappa_r}{\sqrt{\delta v_{r,1}'^3}} Q_3^r + \frac{\kappa_r \sqrt{1-\delta}}{\sqrt{\delta v_{r,1}'^2 v_{r,0}'}} P_0^r, \\ \frac{1}{\sqrt{4cL}} q_2^r &= -\frac{\kappa_r}{\sqrt{v_{r,1}'(\lambda_r^2 + \kappa_r^2)}} Q_1^r + \frac{\mu_r \lambda_r}{v_{r,1}' \sqrt{v_{r,1}'(\lambda_r^2 + \kappa_r^2)}} Q_2^r + \frac{\lambda_r}{\sqrt{\delta v_{r,1}'^3}} Q_3^r + \frac{\lambda_r \sqrt{1-\delta}}{\sqrt{\delta v_{r,1}'^2 v_{r,0}'}} P_0^r, \\ \frac{1}{\sqrt{4cL}} q_3^r &= -\frac{\sqrt{\lambda_r^2 + \kappa_r^2}}{v_{r,1}' \sqrt{v_{r,1}'}} Q_2^r + \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta v_{r,1}'^3}} Q_3^r + \frac{\mu_r \sqrt{1-\delta}}{\sqrt{\delta v_{r,1}'^2 v_{r,0}'}} P_0^r, \\ \frac{1}{\sqrt{4cL}} q_0^r &= -\frac{v_{r,1}'}{\sqrt{\delta v_{r,1}'}} P_3^r - \frac{v_{r,0}'}{\sqrt{(1-\delta) \delta v_{r,0}' v_{r,1}'^2}} Q_0^r, \\ \sqrt{4cL} p_1^r &= \lambda_r \sqrt{\frac{v_{r,1}'}{\lambda_r^2 + \kappa_r^2}} P_1^r + \frac{\mu_r \kappa_r}{\sqrt{v_{r,1}'(\lambda_r^2 + \kappa_r^2)}} P_2^r - \kappa_r \sqrt{\frac{\delta v_{r,0}'}{(1-\delta) v_{r,1}'^2}} Q_0^r, \\ \sqrt{4cL} p_2^r &= -\kappa_r \sqrt{\frac{v_{r,1}'}{\lambda_r^2 + \kappa_r^2}} P_1^r + \frac{\mu_r \lambda_r}{\sqrt{v_{r,1}'(\lambda_r^2 + \kappa_r^2)}} P_2^r - \lambda_r \sqrt{\frac{\delta v_{r,0}'}{(1-\delta) v_{r,1}'^2}} Q_0^r, \\ \sqrt{4cL} p_3^r &= -\frac{\sqrt{\lambda_r^2 + \kappa_r^2}}{\sqrt{v_{r,1}'}} P_2^r - \mu_r \sqrt{\frac{\delta v_{r,0}'}{(1-\delta) v_{r,1}'^2}} Q_0^r, \\ \sqrt{4cL} p_0^r &= \sqrt{\delta v_{r,1}'} Q_3^r. \end{aligned} \quad (94)$$

Itt fennáll

$$P_i^r = \frac{1}{2\pi v_{r,i}} \dot{Q}_i^r, \quad P_0^r = -\frac{1}{2\pi v_{r,0}} \dot{Q}_0^r,$$

és a f. r.-k:

$$[P_i^r, Q_k^s]_- = \delta_{ik} \delta_{rs} \frac{h}{2\pi i}; \quad [P_i^r, P_k^s]_- = 0; \quad [Q_i^r, Q_k^s] = 0.$$

$$(i = 1, 2, 3, 0; \quad k = 1, 2, 3, 0).$$

A $P_0^r = -\frac{1}{2\pi v_{r,0}} \dot{Q}_0^r$ egyenlet mutatja, hogy a Hamilton-féle függvény $(P_0^r)^2$ -et és $(Q_0^r)^2$ -et negatív előjellel tartalmazza:

$$\begin{aligned} H_0 = 2\pi v_{r,1} \frac{1}{2} [(P_1^r)^2 + (Q_1^r)^2] + 2\pi v_{r,2} \frac{1}{2} [(P_2^r)^2 + (Q_2^r)^2] + \\ + 2\pi v_{r,3} \frac{1}{2} [(P_3^r)^2 + (Q_3^r)^2] - 2\pi v_{r,0} \frac{1}{2} [(P_0^r)^2 + (Q_0^r)^2]. \end{aligned} \quad (95)$$

Hogy ne kényszerüljünk a következőkben a 0-indexű főrezgéseket mindig külön felírni, bevezetjük a

$$v_{r,4} = -v_{r,0},$$

továbbá a

$$P^{r,4} = -Q_0^r, \quad Q^{r,4} = P_0^r \quad (96)$$

jelöléseket.

Ezután a főrezgéseket 1—4-ig haladó λ indexszel számozzuk.

$$\begin{aligned} Q^{r\lambda}(Q_1^r, Q_2^r, Q_3^r, P_0^r) \\ P^{r\lambda}(P_1^r, P_2^r, P_3^r, -Q_0^r). \end{aligned}$$

Most a potenciálokat (94) és (84) segítségével a (81)-hez hasonló

$$\Phi_i = Q^{r\lambda} v_i^{r\lambda}; \quad \Phi_0 = P^{r\lambda} v_0^{r\lambda}, \quad (97)$$

$$\Pi_i = \frac{1}{4cL} P^{r\lambda} w_i^{r\lambda}; \quad \Pi_0 = \frac{1}{4cL} Q^{r\lambda} w_0^{r\lambda}$$

alakban írhatjuk; $v_i^{r\lambda}$ és $w_i^{r\lambda}$ az üreg sajátfüggvényeinek ortogonális rendszerét jelentik.

A (81) egyenlet a , a^* és a (97) egyenlet P , Q együttartói helyébe változóként bevezetjük most — ahogy ezt először Dirac a sugárzáselméletében alkalmazta — a megfelelő kvantumállapotban levő korpuszculák számát. Az elektronok száma az s állapotban legyen N_s , a fénykvantumok száma r állapotban legyen M_r . A kanonikusan konjugált szögek legyenek θ_s , illetve δ_r .

Ekkor tehát fennáll: *

Bose—Einstein-statisztika esetén:

$$a_s = e^{\frac{-2\pi i}{4} Q_s} N_s^{1/2}; \quad a_s^* = N_s^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{4} Q_s},$$

* V. ö. Jordan és Wigner sokszor idézett munkáját.

Kizárási elv esetén:

$$a_s = v_s e^{\frac{-2\pi i}{4} Q_s} N_s^{1/2}; \quad a_s^* = N_s^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{4} Q_s} v_s, \quad (98)$$

Sugárzás esetén:

$$P^{r\lambda} = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi}} \left(M_{r,\lambda}^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \chi_{r,\lambda}} + e^{\frac{-2\pi i}{\hbar} \chi_{r,\lambda}} M_{r,\lambda}^{1/2} \right)$$

$$Q^{r\lambda} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi}} \left(M_{r,\lambda}^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \chi_{r,\lambda}} - e^{\frac{-2\pi i}{\hbar} \chi_{r,\lambda}} M_{r,\lambda}^{1/2} \right)$$

A v_s mennyiségek a Jordan és Wigner bevezette „előjel-függvények”:

$$v_s = \prod_{t \leq s} (1 - 2N_t). \quad (99)$$

A fázisszögek exponenciális függvényei operátorokként foghatók fel és a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

Bose—Einstein-statisztikánál:

$$e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \theta_s} \quad \text{átviszi} \quad N_s\text{-et } N_s - 1\text{-be}$$

$$\text{Kizárási elvnel: } e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \theta_s} \quad \text{átviszi} \quad N_s\text{-et } 1 - N_s\text{-be} \quad (100)$$

$$\text{Sugárzásnál: } e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \chi_r} \quad \text{átviszi} \quad M_r\text{-et } M_r - 1\text{-be}$$

Most hozzálátunk a (79) Hamilton-féle függvény és a hozzátartozó (79a) Schrödinger-egyenlet felállításához. A φ valószínűségi függvénynek az N_s és M_r változótól kell függenie, tehát $|\varphi|^2$ -nek kell megadnia annak valószínűségét, hogy N_s elektron s állapotban, M_r fénykvantum r állapotban van. Megkapjuk a φ -re vonatkozó differenciálegyenletet, ha (79)-ben és (79a)-ban H -t (81), (97), (98) segítségével N , θ , és M , χ változókkal kifejezzük, majd a szögeket operátorokként felfogva a $(H - E)\varphi = 0$ egyenletet írjuk fel, ahol E a rendszer teljes energiája. Közben előnyösen felhasználjuk azt a körülményt, hogy u_s és $v_{r,\lambda}$ a (79), illetve (79a) a kölcsönhatási tagok nélküli Hamilton-féle egyenlet megoldásai. A „perturbálatlan” energia egyszerűen ilyen alakú:

$$E = \sum_s E_s N_s + \sum_{r,\lambda} (M_{r,\lambda} + 1/2) \hbar v_{r,\lambda}.$$

A $1/2 \sum \hbar v$ tagok az üregsugárzásnak végtelen nagy additív zéruspontenergiáját jelentik. Mivel ez a kifejezés a teljes energiában csak additív állandóként lép fel, nincs semmi fizikai jelentése és ezért elhagyható (v. ö. 35. oldal). Ha a kölcsönhatási tagot H -ban u -val és v -vel kifejezzük, akkor a következő integrálok lépnek fel:

$$c_{st}^{r\lambda} = \int u_q^{*s} \alpha_{q\sigma}^i u_\sigma^t v_i^{r\lambda} dV, \quad (101)$$

$$d_{st}^{r\lambda} = \int u_q^{*s} u_q^t v_0^{r\lambda} dV.$$

A $\varphi(N_1, N_2, \dots, M_1, M_2, \dots)$ valószínűségi amplitúdóra vonatkozó differencia-egyenletek végül (a következőkben ismét kiírjuk az összegezés jelét):

a) Ha az anyagra Bose—Einstein-statisztika érvényes:

$$\begin{aligned}
 & (-E + \sum_s N_s E_s + \sum_r M_{r\lambda} h\nu_{r\lambda}) \varphi(N_1, N_2, \dots; M_1, M_2, \dots) = \\
 & = e \sqrt{\frac{h}{4\pi}} \sum'_{s, t, r, \lambda} N_s^{1/2} (N_t + 1)^{1/2} [M_{r\lambda}^{1/2} (d_{st}^{r\lambda} - i c_{st}^{r\lambda}) \varphi(N_1, \dots, N_s - 1, \dots, \\
 & \quad N_t + 1, \dots; M_1, \dots, M_{r\lambda} - 1, \dots) + (M_{r\lambda} + 1)^{1/2} (d_{st}^{r\lambda} + i c_{st}^{r\lambda}) \cdot \\
 & \quad \cdot \varphi(N_1, \dots, N_s - 1, \dots, N_t + 1, \dots; M_1, \dots, M_{r\lambda} + 1, \dots)] + \\
 & + e \sqrt{\frac{h}{4\pi}} \sum_s N_s [M_{r\lambda}^{1/2} (d_{ss}^{r\lambda} - i c_{ss}^{r\lambda}) \varphi(N_1, \dots; M_1, \dots, M_{r\lambda} - 1, \dots) + \\
 & \quad + (M_{r\lambda} + 1)^{1/2} (d_{ss}^{r\lambda} + i c_{ss}^{r\lambda}) \varphi(N_1, \dots; M_1, \dots, M_{r\lambda} + 1, \dots)] \quad (102)
 \end{aligned}$$

b) Ha az anyagra a kizárási elv érvényes:

$$\begin{aligned}
 & (-E + \sum_s N_s E_s + \sum_r M_{r\lambda} h\nu_{r\lambda}) \varphi(N_1, N_2, \dots; M_1, M_2, \dots) = \\
 & = e \sqrt{\frac{h}{4\pi}} \sum_{s, t, r, \lambda} v_s(N_1, \dots, 1 - N_s, \dots) v_t(N_1, \dots, 1 - N_t, \dots) [M_{r\lambda}^{1/2} (d_{st}^{r\lambda} - i c_{st}^{r\lambda}) \\
 & \quad \varphi(N_1, \dots; 1 - N_s, 1 - N_t, \dots; M_1, \dots, M_{r\lambda} - 1, \dots) + (M_{r\lambda} + 1)^{1/2} \cdot \\
 & \quad \cdot (d_{st}^{r\lambda} + i c_{st}^{r\lambda}) \varphi(N_1, \dots, 1 - N_s, 1 - N_t, \dots; M_1, \dots, M_{r\lambda} + 1, \dots)] + \\
 & + e \sqrt{\frac{h}{4\pi}} \sum_s N_s [M_{r\lambda}^{1/2} (d_{ss}^{r\lambda} - i c_{ss}^{r\lambda}) \varphi(N_1, \dots; M_1, \dots, M_{r\lambda} - 1, \dots) + \\
 & \quad + (M_{r\lambda} + 1)^{1/2} (d_{ss}^{r\lambda} + i c_{ss}^{r\lambda}) \varphi(N_1, \dots; M_1, \dots, M_{r\lambda} + 1, \dots)]. \quad (103)
 \end{aligned}$$

A \sum' összegekben $r=s$ összeadandót ki kell hagyni.

8.§. Sajátérték-perturbáció kiszámítása a kölcsönhatási tagokban másodrendig. Ha a (102) és (103) egyenletben a kölcsönhatási tagokat kis perturbációként fogjuk fel, akkor megkísérelhetjük (102)-t és (103)-at szukcesszív approksimációval integrálni. A perturbálatlan rendszerben, mondjuk, N_s^0 elektron található, de egyetlen fénykvantum sincs jelen. Ezzel a kiindulási megoldással kizárjuk a diszperziós és az abszorpciós folyamatokat, amelyek minket egyelőre nem érdekelnek. A perturbálatlan valószínűségi amplitúdók:

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(N_1, \dots; M_1, \dots) &= \delta_{N_1, N_1^0} \delta_{N_2, N_2^0} \dots \delta_{M_1, 0} \delta_{M_2, 0} \dots, \\
 \delta_{N_1, N_1^0} &= \begin{cases} 1, & \text{ha } N_1 = N_1^0, \\ 0, & \text{ha } N_1 \neq N_1^0 \end{cases} \quad (104)
 \end{aligned}$$

Ha a (102), illetve (103) egyenlet kölcsönhatási tagjaiba φ_0 eme értékét helyettesítjük, akkor megkapjuk a $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots$ valószínűségi amplitúdó φ_1 első közelítését. Erre adódik:

a) Bose—Einstein-statisztika esetén:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(N_1^0, \dots, N_s^0+1 \dots N_t^0-1 \dots; 0, 0, \dots, 1^{\lambda}, 0, 0) = \\
 = \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}}}{E_s - E_t + h\nu_{r\lambda}} (N_s^0+1)^{1/2} N_t^{0\frac{1}{2}} (d_{st}^{r\lambda} - ic_{st}^{r\lambda}); \\
 \varphi_1(N_1^0 \dots; 0, 0 \dots 1^{\lambda}, 0, 0) = \\
 = \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}}}{h\nu_{r\lambda}} \sum_s N_s^0 (d_{ss}^{r\lambda} - ic_{ss}^{r\lambda}).
 \end{aligned} \tag{105}$$

b) Kizárási elv esetén:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(N_1^0 \dots 1 - N_s^0 \dots 1 - N_t^0 \dots; 0, 0 \dots 1^{\lambda}, 0 \dots) = \\
 = \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}}}{E_s - E_t + h\nu_{r\lambda}} v_s(N_1^0 \dots 1 - N_t^0 \dots) v_t(N_1^0 \dots 1 - N_t^0 \dots) N_t^0 (1 - N_s^0) \cdot \\
 \cdot (d_{st}^{r\lambda} - ic_{st}^{r\lambda}) + \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}}}{E_t - E_s + h\nu_{r\lambda}} v_t(N_1^0 \dots 1 - N_s^0 \dots) v_s(N_1^0 \dots 1 - N_s^0 \dots) \\
 \cdot N_s^0 (1 - N_t^0) (d_{ts}^{r\lambda} - ic_{ts}^{r\lambda}), \\
 \varphi_1(N_1^0 \dots; 0 \dots 1^{\lambda}, 0 \dots) = \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}}}{h\nu_{r\lambda}} \sum_s N_s^0 (d_{ss}^{r\lambda} - ic_{ss}^{r\lambda}).
 \end{aligned}$$

Az N_1^0, N_2^0, \dots tér minden más pontjában $\varphi_1=0$. A (105) és (106)-ból kiszámított φ_1 behelyettesítése (102)-be és (103)-ba szolgáltatja az $E^{(2)}$ sajátértékperturbációt ($E=E^0+E^{(1)}+E^{(2)}+\dots$), ha az egyenletet $N_1^0, N_2^0, \dots; 0 \dots$ helyen írjuk fel. A perturbációs tagok időbeli középértéke, tehát az $E^{(1)}$ perturbációs energia, eltűnik.

A számítási eredménye:

a) Bose—Einstein-statisztika esetén:

$$\begin{aligned}
 -E^{(2)} = \sum'_{st, r\lambda} \frac{e^2 \frac{h}{4\pi}}{E_s - E_t + h\nu_{r\lambda}} (N_s^0+1) N_t^0 (d_{st}^{r\lambda} - ic_{st}^{r\lambda}) (d_{ts}^{r\lambda} + ic_{ts}^{r\lambda}) + \\
 + \sum_{st, r\lambda} \frac{e^2}{4\pi\nu_{r\lambda}} N_s^0 (d_{ss}^{r\lambda} - ic_{ss}^{r\lambda}) N_t^0 (d_{tt}^{r\lambda} + ic_{tt}^{r\lambda}).
 \end{aligned} \tag{107}$$

b) Kizárási elv esetén:

$$\begin{aligned}
 -E^{(2)} = \sum'_{st, r\lambda} \frac{e^2 \frac{h}{4\pi}}{E_s - E_t + h\nu_{r\lambda}} N_t^0 (1 - N_s^0) (d_{st}^{r\lambda} - ic_{st}^{r\lambda}) (d_{ts}^{r\lambda} + ic_{ts}^{r\lambda}) + \\
 + \sum_{st, r\lambda} \frac{e^2}{4\pi\nu_{r\lambda}} N_s^0 (d_{ss}^{r\lambda} - ic_{ss}^{r\lambda}) N_t^0 (d_{tt}^{r\lambda} + ic_{tt}^{r\lambda}).
 \end{aligned} \tag{108}$$

A (105)-től (108)-ig az egyenletek jobb oldalán esetleg kicsi $E_s - E_t + hv_{r\lambda}$ alakú nevezők léphetnek fel, amelyek az eljárás konvergenciáját zavarják. Ennek fizikai jelentése a következő: ahhoz, hogy $E_s - E_t + hv_{r\lambda}$ kicsi legyen, $E_t - E_s \sim hv_{r\lambda}$ szükséges, azaz a perturbálatlan rendszer t állapotból képes az s állapotba ugrásra egy $hv_{r\lambda}$ fénkvantum kibocsátása közben. A kis nevezők további vizsgálata tehát pontosan úgy történne, mint a Dirac-féle elméletben a kisugárzásé; minthogy bennünket itt inkább a sajátértékperturbáció érdekel, feltételezzük, hogy a kérdéses tagok az eredményt alig befolyásolják. Ez a helyzet például egy atom normál állapotában, ahonnan semmi emisszió nem lehetséges. De még a gerjesztett állapotokban is van annak értelme, hogy az elektronok kölcsönhatását tekintetbe vesszük, a sugárzási hatásokat ellenben elhanyagoljuk; mivel a kölcsönhatás kiszámítását tűztük ki célul, a kis nevezők fellépésével tovább nem törődünk.

A következőkben bebizonyítjuk, hogy a (107), (108) szerint kiszámított sajátértékperturbáció egy bizonyos közelítésben megegyezik azzal a másodrendű energia-perturbációval, amit akkor kapunk, ha az elektronok között közönséges módon elektrosztatikus kölcsönhatásokat tételezünk fel és a Schrödinger-egyenletet megoldjuk a konfigurációs térben. Evégből megjegyezzük, hogy a $c_{st}^{r\lambda}$ mennyiségek az áramokkal és így az elektronok mágneses kölcsönhatásával vannak kapcsolatban, míg a $d_{st}^{r\lambda}$ mennyiségek az elektromos kölcsönhatásra vonatkoznak. Mivel a mágneses kölcsönhatások olyan nagyságrendűek, mint a relativisztikus hatások, azért bizonyításunkban a $c_{st}^{r\lambda}$ tagokat elhanyagoljuk.

Marad a

$$\sum_{r\lambda} \frac{1}{E_s - E_t - hv_{r\lambda}} d_{st}^{r\lambda} d_{st}^{r\lambda} \quad (109)$$

típusú összegek kiszámítása. A $d_{st}^{r\lambda}$ ($r \neq t$) integrálok csak olyan $v_{r\lambda}$ -ra lesznek észrevehetően nagyok, amelyekre a fény hullámhossza összemérhető az atomi méretekkkel, tehát igen nagy $v_{r\lambda}$ -ra. Mivel továbbá a sajátrezgések száma növekvő v -vel gyorsan nő, azt gyanítjuk, hogy az összeg főjáruléka igen nagy v értékektől származik. Ezért jogosnak látszik első közelítésben (111) helyett az

$$\sum_{r,\lambda} \frac{1}{hv_{r\lambda}} d_{st}^{r\lambda} d_{ts}^{r\lambda} \quad (110)$$

összeget vizsgálni. A hiba, ahogy ezt egy becslés mutatja, nem nagyobb, mint a $c_{st}^{r\lambda}$ -k elhanyagolásával elkövetett hiba. A (110) összeg könnyen meghatározható; némileg általánosítva kapjuk

$$\sum_{r,\lambda} \frac{1}{hv_{r\lambda}} d_{st}^{r\lambda} d_{nm}^{r\lambda} = \sum_{r,\lambda} \int dV dV' (u_q^{*s} u_q^t v_0^{r\lambda})_P \cdot (u_\sigma^{*n} u_\sigma^m v_0^{r\lambda})_{P'} \cdot \frac{1}{hv_r}. \quad (111)$$

(Itt a kérdéses térfogatbeli pontra P és P' indexekként állanak.)

Ebben a

$$\sum_{r\lambda} \frac{v_0^{r\lambda}(P) v_0^{r\lambda}(P')}{v_{r\lambda}} = G(P, P')$$

összeg szerepel. Kiszámításához képezzük $\Delta_P G(P, P')$ -t. Ekkor (94) és (84)-ből adódik

$$\begin{aligned} \Delta_P G(P, P') &= \sum_{r, \lambda} \frac{\Delta v_0^{r, \lambda}(P) \cdot v_0^{r, \lambda}(P')}{v_{r, \lambda}} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{r, \lambda} \frac{-(v'_{r, 1})^2 v_0^{r, \lambda}(P) v_0^{r, \lambda}(P')}{v_{r, \lambda}} = \\ &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{8}{L^3} 4cL \left[-\frac{1}{\delta} + \frac{1}{(1-\delta)\delta}\right] \frac{2L}{c} \sum_r \sin \frac{\pi}{L} \kappa_r x_P \sin \frac{\pi}{L} \lambda_r y_P \sin \frac{\pi}{L} \mu_r z_P \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi}{L} \kappa_r x_{P'} \cdot \sin \frac{\pi}{L} \lambda_r y_{P'} \cdot \sin \frac{\pi}{L} \mu_r z_{P'} = \frac{8\pi^2}{1-\delta} \cdot \delta(P-P'), \end{aligned} \quad (112)$$

ahol $\delta(P-P')$ a P és P' pontok Dirac-féle δ függvényét jelenti. A (112) differenciálegyenlet megoldása $G(P, P')$ -re, ha az üreg elég nagy.

$$G(P, P') = -\frac{2\pi}{1-\delta} \frac{1}{r_{PP'}}. \quad (113)$$

Ebből következik a $\delta=0$ határértékben:

$$\begin{aligned} -\sum_{r, \lambda} \frac{1}{2\pi v_{r, \lambda}} d_{st}^{r, \lambda} d_{nm}^{r, \lambda} &= A_{st, nm} = \\ &= \int dV dV' \frac{u_{\sigma}^{*s}(P) u_{\sigma}^t(P) u_{\sigma}^{*n}(P') \cdot u_{\sigma}^m(P')}{r_{PP'}}. \end{aligned} \quad (114)$$

Az $A_{st, nm}$ integrálok tehát az ismert kicserélődési integrálok, amelyek a perturbációelméletben fellépnek, ha a többtestproblémát a kvantummechanika szerint közös módon tárgyaljuk. Az $E^{(2)}$ perturbációs energiára tehát δ rendű tagokig bezárólag adódik:

a) Bose—Einstein-statisztika esetén:

$$E^{(2)} = \frac{e^2}{2} \left[\sum_{st} (N_s^0 + 1) N_t^0 A_{st, ts} + \sum_{st} N_s^0 N_t^0 A_{ss, tt} \right].$$

b) Kizárási elv esetén:

$$E^{(2)} = \frac{e^2}{2} \left[\sum_{st} N_t^0 (1 - N_s^0) A_{st, ts} + \sum_{st} N_s^0 N_t^0 A_{ss, tt} \right].$$

Az itteni kifejezések még tartalmaznak

$$\sum_s A_{st, ts} = S_t,$$

alakú végtelen összegeket. A (114)-ből következik:

$$\begin{aligned} S_t &= \sum_s A_{st, ts} = \int \sum_s \frac{u_{\sigma}^{*s}(P) u_{\sigma}^t(P) u_{\sigma}^{*t}(P') u_{\sigma}^s(P')}{r_{PP'}} dV dV' = \\ &= \int \frac{u_{\sigma}^t(P) u_{\sigma}^{*t}(P') \delta(P-P') \delta_{\sigma\sigma}}{r_{PP'}} dV dV' = \int \frac{(u_{\sigma}^{*t} u_{\sigma}^t)}{r_{PP}} dV = \\ &= \frac{1}{r_{PP}} \int u_{\sigma}^{*t} u_{\sigma}^t dV = \frac{1}{r_{PP}}. \end{aligned} \quad (115)$$

Az S_t mennyiség tehát megfelel egy részecskének önmagával való, Jordan és Klein által vizsgált kölcsönhatásának, ami végtelen nagy. S_t nem függ a t állapottól, azaz egy elektron önmagára gyakorolt kölcsönhatása minden állapotban ugyanaz. Ezért az S_t tagok éppúgy, mint a sugárzás zérusponti energiája, mindenesetre végtelen nagy, a teljes energiához additív állandót jelentenek. Az itt felépített elméletben nem fordulnak elő olyan tagok, amelyeknél az elektronok száma változik. Tehát az additív kiegészítő tagok nem zavarunk, mert csak az energiakülönbségek érdekesek; ezért az elektronoknak önmagukra gyakorolt kölcsönhatását az $E^{(2)}$ -ből levonjuk és így:

a) Bose—Einstein-statisztika esetén:

$$E^{(2)} = e^2 \sum_{s>t} N_s^0 N_t^0 (A_{st,ts} + A_{ss,tt}) + e^2 \sum_s \frac{N_s^0 (N_s^0 - 1)}{2} A_{ss,ss} + \text{const.} \quad (116)$$

b) Kizárási elv esetén:

$$E^{(2)} = e^2 \sum_{s>t} N_s^0 N_t^0 (-A_{st,ts} + A_{ss,tt}) + e^2 \sum_s \frac{N_s^0 (N_s^0 - 1)}{2} A_{ss,ss} + \text{const.} \quad (117)$$

Ezek pontosan ugyanazok a képletek, mint amelyeket a közönséges kvantummechanika szolgáltat, ha az elektronok kölcsönhatását első közelítésben vesszük figyelembe. Az itt tárgyalt elmélet csak bizonyos olyan elhanyagolások árán jut ezekhez a képletekhez, amelyeket még röviden tárgyalni kell.

A $c_{st}d_{ts}$ és $c_{st}c_{ts}$ mágneses tagokat elhagytuk. Mivel a (110)-hez hasonló

$$\sum_{r\lambda} \frac{1}{\hbar v_{r\lambda}} c_{st} d_{nm}$$

összeg eltűnik, amint a számítás mutatja, a mágneses kölcsönhatásnál elsősorban a $c_{st}c_{ts}$ tagok játszanak szerepet, amelyek a

$$\int \frac{u_\sigma^{*s}(P) \alpha_{\sigma\sigma}^i u_\sigma^t(P') \cdot u_\mu^{*t}(P') \alpha_{\mu\mu}^i u_\mu^s(P')}{r_{PP'}} dV dV'$$

alakú kicserélődési kifejezésekhez vezetnek. Járulékkuk $(v/c)^2$ rendű kicsi az $E^{(2)}$ értékekhez képest. Ezenkívül a (107) és (108) egzakt képletek még $\sum \frac{E_s - E_t}{(E_s - E_t + \hbar v_r) \hbar v_r} d_{st} d_{ts}$ fajtájú kiegészítő tagokat tartalmaznak, amelyeket a (109)-ről a (110)-re való áttérésnél elhanyagolunk és a potenciálok retardálásából származnak. Végül $E^{(2)}$ még nem adja meg az egzakt sajátértéket, hanem E -ben még számításba kell vennünk $E^{(3)}$ -at és $E^{(4)}$ -et stb. is. Sok esetben $E^{(3)}$ nagyobb, mint az eddig elhanyagolt tagok. $E^{(3)}$ kiszámítása és a konfigurációs térbeli tárgyalás megfelelő perturbációs tagjával való összehasonlítás nagyon fáradságos számításokat igényelne. Nagyon kíváncsi volna az elmélet alapegyenleteinek integrálására egy másik módszer, amelynél az elektronok kölcsönhatását nem kellene kicsinek feltételezni és

$1/c$ hatványai szerint sorbafejthető lenne. Szintén szükséges lenne az elektronok sajátenergiájának szerepét a $(v/c)^2$ rendű tagokban pontosabban megvizsgálni.

9.§. Az elmélet szerint várható fényemisszió az elektronoknak potenciálküszöbön való átmeneténél. Az előző fejezet számításai azt kívánják megmutatni, hogy az itt tárgyalt elmélet az eddigi elméletek eredményeit speciális esetként tartalmazza. Ennek bizonyítását könnyű elvégezni sugárzási jelenségek esetén is, ahol a (102) és (103) egyenletek lényegében ugyanarra az eredményre vezetnek, mint a sugárzás Dirac-féle elmélete. A stacionárius állapotok energiájának élessége kérdésében sem adódik semmi új.

Viszont néhány kísérletet kell itt még tárgyalni, amelyeket az eddigi elmélet álláspontjából még nem tárgyaltak. * Egy meghatározott példát mondunk: álljon egy héliumatom normál állapotban erős elektromos mező hatás alatt; ez a mező a hélium-atomot bizonyos valószínűséggel ionizálni tudja; hasonlóképpen ismeretes, hogy a Geiger-Nutall-féle törvény Gamow-Gurney-Condon-féle elméletében bizonyos valószínűsége van annak, hogy egy α részecske egy potenciálküszöb átlépése után elhagyja a magot. Egy ilyen átmenet a kvantummechanika szerint oly módon történik, hogy az elektron az atomját azzal a meghatározott energiával hagyja el, amely a héliumállapot eredetileg meglévő energiája és a pozitív héliumon visszamaradó energiája közötti különbség. Ha azonban az anyag és a sugárzás kölcsönhatását az itt javasolt módon vesszük tekintetbe, akkor fennáll lényegesen csekélyebb energiájú elektronok kibocsátásának is bizonyos valószínűsége; közben az energiatétel érvényességét egy megfelelő fénykvantum kibocsátása biztosítja. A kibocsátott elektronok energiája pontatlanságának az illető állapot időtartamához nincs köze, mert a jelenség az ionizációs valószínűségtől teljesen függetlenül lép fel. Az elmélet szerint egyébként teljesen hasonló viszonyok (mutatis mutandis) várhatók az Auger-féle ugrások esetében.

A megnevezett jelenségeket a matematikai tárgyalás szempontjából „azonos energiájú állapotokba való átmenetek” címmel lehet összefoglalni. Feltételezzük tehát, hogy a perturbálatlan rendszerben létezik az atom egy diszkrét sugárzásmentes állapota (normál állapot vagy metastabil állapotok) és ennek energiaértéke közelében transzlációs állapotok kontinuumja, amelyet az üregben kvantálás révén egy sor diszkrét, egymáshoz nagyon közel eső szintre lehet felbontani. Ha ezt a problémát először a közönséges kvantummechanika szerint tárgyaljuk, akkor az atom diszkrét kiindulási állapotához az elektronkoordinátáknak bizonyos φ^a sajátfüggvénye tartozik. Az egyes transzlációs állapotokhoz φ^t sajátfüggvények tartoznak, amelyeket jó közelítéssel előállíthatunk az ion sajátfüggvényének és az egyes elektron transzlációs sajátfüggvényének (síkhullám) szorzataként. Ha az elektron kinetikus energiáját E_t -vel jelöljük, akkor az E_t energia két szomszédos transzlációs állapota közötti ΔE_t közepes távolság:

$$\Delta E_t = \frac{h^2}{16\pi(2m)^{3/2}L^3 E_t^{1/2}} \quad (118)$$

(L =az üreg élhossza).

* Ha — amint a következőkben megteesszük — az első közelítésre szorítkozunk, akkor oly eredményeket kapunk, amik a Dirac-féle sugárzáselméletből is levezethető. Ez azonban magasabb közelítésben nem igaz, mert akkor a kölcsönhatási és a sugárzási hatások egységes tárgyalása szükséges, ezt pedig a Dirac-féle sugárzáselmélet még nem tartalmazza.

A vizsgált folyamatnak, egy elektron átmenetének az atomi kötélekből egy energetikailag megfelelő transzlációs állapotba, valószínűsége Dirac * szerint

$$|\Phi_{at}^0|^2 \frac{4\pi^2}{h\Delta E_t} = |\Phi_{at}^0|^2 \frac{64\pi^3}{h^4} (2m)^{3/2} L^3 E_t^{1/2}. \quad (119)$$

Itt Φ_{at}^0 a perturbáló potenciálnak a vizsgált átmenethez tartozó mátrixelemét jelenti. Tehát

$$\Phi_{at}^0 = -e \int \varphi^{*a} \Phi^0 \varphi^t d\Omega, \quad (120)$$

ahol $d\Omega$ a konfigurációs tér térfogateleme. Perturbáló potenciálként itt a Gamow-féle átmenetek esetén maga a potenciálkültség lép fel, Φ_{at}^0 kicsisége onnan származik, hogy a $\varphi^{*a} \varphi^t$ szorzat mindenütt kicsi. (A transzláció sajátfüggvénye, valamint az atomé a küszöbnél exponenciálisan csökken.) A fényelektromos jelenség esetén Φ^0 egy perturbáló külső fényhullám ** potenciálját jelenti, az Auger-féle folyamatnál pedig az elektronok Coulomb-féle kölcsönhatását. Mivel az elektron koordinátáiban kifejezett φ^t sajátfüggvény az egész üregre normált, könnyen belátható, hogy Φ_{at}^0 mint L függvénye $L^{3/2}$ szerint viselkedik. Így tehát a (119) átmeneti valószínűség L -től független, ahogy ennek lennie kell.

Különösen egyszerű a (120) egyenlet, ha az elektronok kölcsönhatását általában kicsinek tekintjük. Ekkor a legdurvább közelítésben a kizárási elv esetén

$$\Phi_{at}^0 = -e \int dV u^{a*} \Phi^0 u^t,$$

ahol u^a annak az állapotnak sajátfüggvényét jelenti, amelyből az elektron az átmenet következtében eltávozott; u^t a transzlációs sajátfüggvény, az integrált csak egy háromdimenziós térre, nevezetesen egy elektron koordinátáira kell kiterjeszteni.

Ha ugyanezt a problémát a jelen munkában leírt módszer szerint tárgyaljuk, akkor mindenekelőtt a V perturbáló potenciál helyébe a Hamilton-függvényben egy $-e\Phi^0\psi^*\psi$ alakú perturbáló tag lép. Ha ψ_e^* és ψ_e -t ismét N_s - és θ_s -sel fejezzük ki, akkor (98) szerint a kizárási elv esetében

$$\begin{aligned} H_1 &= -e\Phi^0\psi_e^*\psi_e = \\ &= N_s(1-N_t)v_s(N_1 \dots 1-N_s \dots) v_t(N_1 \dots 1-N_s \dots) e^{\frac{2\pi}{h}i(\theta_s-\theta_t)} a_{st} \dots, \end{aligned} \quad (121)$$

ahol

$$a_{st} = -e \int \Phi^0 u_e^{*s} u_e^t dV. \quad (121a)$$

A (119) átmeneti valószínűség esetére ismét közvetlenül felhasználhatjuk a Dirac-féle egyenletet, ha most Φ_{at}^0 -re fennáll

$$\Phi_{at}^0 = \sum_{N_1, N_2 \dots M_1, M_2} \varphi^{*a}(N_1 \dots M_1 \dots) H_1 \varphi^t, \quad (122)$$

* Proc. Roy. Soc. 114, 243, 1927, lásd főleg a 264. old. (32) egy.

** Vö. ehhez G. Wentzel Phys. ZS. 29, 321, 1928.

itt φ^a , illetőleg φ^t jelentik a kezdeti, illetőleg végállapotra vonatkozó valószínűségi amplitúdókat az $N_1 \dots M_1 \dots$ térben. Ha először a fénykibocsátás nélküli átmenet érdekel minket, akkor

$$\begin{aligned} \varphi^a &= \delta_{N_1, N_1^0} \delta_{N_2, N_2^0} \dots \delta_{N_a, 1} \dots \delta_{N_t, 0} \dots \delta_{M_1, 0} \dots \\ &+ \text{magasabbrendű tagok,} \end{aligned} \quad (123)$$

$$\begin{aligned} \varphi^t &= \delta_{N_1, N_1^0} \dots \delta_{N_a, 0} \dots \delta_{N_t, 1} \dots \delta_{M_1, 0} \dots \\ &+ \text{magasabbrendű tagok.} \end{aligned}$$

A (122)-ben H_1 -et operátornak kell felfogni [v. ö. (100)] és így nulladik közelítésben

$$\Phi_{at}^0 = a_{at} = -e \int dV \Phi^0 u_e^{*a} u_e^t \quad (124)$$

a korábbi eredménnyel összhangban.

Előfordulnak azonban fénykvantumemisszióval járó átmenetek is. Az a állapot sajátfüggvénye olyan marad, mint eddig, csupán φ^a -t elsőrendű tagokig kell kiszámítani, amelyeket a (106) egyenlet ad meg. A t végállapotra a nulladik közelítés sajátfüggvénye most:

$$\varphi_0^t = \delta_{N_1, N_1^0} \dots \delta_{N_a, 0} \dots \delta_{N_t, 1} \dots \delta_{M_1, 0} \dots \delta_{M_{r\lambda}, 1} \dots$$

φ^t -ben az első közelítés perturbáló tagjai (106)-hoz hasonlóan:

$$(N_t^0 = 0, N_a^0 = 1),$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(N_t^0 \dots 1 - N_a^0 \dots 1 - N_s^0 \dots N_t^0 \dots 0, \dots 1^2 \dots) = \\ = \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}}}{E_s - E_t - h\nu_{r\lambda}} \gamma_s(N_1^0 \dots N_t^0 \dots) \gamma_t(N_1^0 \dots N_t^0 \dots) \cdot (1 - N_s^0 + \delta_{as} - \delta_{st}) (d_{st}^{r\lambda} + i c_{st}^{r\lambda}), \\ \varphi_1(N_1^0 \dots N_t^0 \dots 0, 0 \dots) = \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}}}{-h\nu_{r\lambda}} \sum (N_s^0 - \delta_{as} + \delta_{st}) (d_{ss}^{r\lambda} + i c_{ss}^{r\lambda}). \end{aligned} \quad (125)$$

Előfordulnak még φ_1 más értékei is az $N_1 \dots, M_1 \dots$ -tér más helyein, de ezek nem érdekelnek bennünket, mert a (122) összegben nem lépnek fel.

Eszerint első közelítésben (a nulladrendű tagok kiesnek):

$$\begin{aligned}
 \Phi_{at, hv_{r\lambda}}^0 &= \sum_{N \dots, M \dots} \varphi^{*a}(N_1 \dots M_1 \dots) H_1 \varphi^{t, hv_{r\lambda}} = \\
 &= \sum_s \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}}}{E_s - E_t + h\nu_{r\lambda}} v_s(N_1^0 \dots 1 - N_a^0 \dots) v_a(N_1^0 \dots 1 - N_a^0 \dots) \\
 &\quad (1 - N_s^0)(d_{as}^{r\lambda} + ic_{as}^{r\lambda}) \cdot v_s(N_1^0 \dots 1 - N_a^0 \dots) v_t(N_1^0 \dots 1 - N_a^0 \dots) a_{st} + \\
 &\quad + \sum \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}}}{h\nu_{r\lambda}} N_s^0(d_{ss}^{r\lambda} + ic_{ss}^{r\lambda}) a_{at} \cdot v_a(N_1^0 \dots 1 - N_a^0 \dots) v_t(N_1^0 \dots 1 - N_a^0 \dots) + \\
 &\quad + \sum a_{as} v_a(N_1^0 \dots 1 - N_a^0 \dots) v_s(N_1^0 \dots 1 - N_a^0 \dots) \\
 &\quad \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}}}{E_s - E_t - h\nu_{r\lambda}} v_s(N_1^0 \dots 1 - N_a^0 \dots) v_t(N_1^0 \dots 1 - N_a^0 \dots) \cdot (1 - N_s^0 + \delta_{as} - \delta_{st})(d_{st}^{r\lambda} + ic_{st}^{r\lambda}) + \\
 &\quad + a_{at} v_a(N_1^0 \dots 1 - N_a^0 \dots) v_t(N_1^0 \dots 1 - N_a^0 \dots) \cdot \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}}}{-h\nu_{r\lambda}} \sum (N_s^0 - \delta_{as} + \delta_{st})(d_{ss}^{r\lambda} + ic_{ss}^{r\lambda}).
 \end{aligned} \tag{126}$$

Itt felhasználtuk a $a_{st}^* = d_{ts}$ kapcsolatot. Különböző tagok összevonása segítségével:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{at, hv_{r\lambda}}^0 &= v_a(N_1^0 \dots 1 - N_a^0 \dots) v_t(N_1^0 \dots 1 - N_a^0 \dots) \cdot \left[a_{at} \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}}}{h\nu_{r\lambda}} (d_{aa} + ic_{aa} - d_{tt} - ic_{tt}) + \right. \\
 &\quad + \sum_s \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}}}{E_s - E_a - h\nu_{r\lambda}} (1 - N_s^0)(d_{as}^{r\lambda} + ic_{as}^{r\lambda}) a_{st} + \\
 &\quad + \sum_s \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}}}{E_s - E_t - h\nu_{r\lambda}} (1 - N_s^0 + \delta_{as} - \delta_{st}) \cdot (d_{st}^{r\lambda} + ic_{st}^{r\lambda}) \cdot a_{as} \left. \right] = \\
 &= v_a(N_1^0 \dots 1 - N_a^0 \dots) v_t(N_1^0 \dots 1 - N_a^0 \dots) \\
 &\quad \left[\sum_s \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}}}{E_s - E_a + h\nu_{r\lambda}} (1 - N_s^0 + \delta_{as}) \cdot (d_{as}^{r\lambda} + ic_{as}^{r\lambda}) a_{st} + \right. \\
 &\quad + \sum_s \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}}}{E_s - E_t - h\nu_{r\lambda}} (1 - N_s^0 + \delta_{as}) \cdot (d_{st}^{r\lambda} + ic_{st}^{r\lambda}) a_{as} \left. \right].
 \end{aligned} \tag{127}$$

$\Phi_{at, hv_{r\lambda}}^0$ -nak (119)-be való behelyettesítése révén megkapjuk az a állapotból egy ugyanolyan energiájú állapotba való átmenet valószínűségét, amelynél egy $h\nu_{r\lambda}$ fénykvantum gerjesztődik és egy E_t állapotú elektron emittálódik. A $\lambda=1,2$ értékek esetén a nevezett végállapot energiája csak keveset különbözik a $h\nu_{r\lambda}$ meg a fénykvantum nélküli i állapotú atomrendszer energiájából álló összegtől ($E_{ion} + E_t + h\nu_{r\lambda}$). $\lambda=3$ vagy 4 esetén a végállapot energiája a megfelelő összegtől $1/\delta$ nagyságrendű mennyiséggel különbözik. Ha a végállapot energiája egyenlő a kezdeti állapotéval, akkor $\lambda=3,4$ és kis δ mellett vagy $h\nu_{r\lambda}$ -nak vagy E_t -nek kell igen nagyoknak lennie; $\delta=0$ határértékben tehát $\lambda=3$ és $\lambda=4$ járulékait törölni kell.

Egy ν és $\nu + \Delta\nu$ közötti frekvenciájú fénykvantum kibocsátásának és egy

$$E_t = E_a - E_{ion} - h\nu \quad (128)$$

„megfelelő” energiájú elektron egyidejű emissziójának valószínűsége tehát (119) alapján

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2}{h\Delta E_t} \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\nu}^{\nu+\Delta\nu} r \left| \sum_s \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}} (d_{as}^{r\lambda} + i c_{as}^{r\lambda}) a_{st}}{E_s - E_a + h\nu_{r\lambda}} (1 - N_s^0 + \delta_{as}) + \right. \\ \left. + \sum_s \frac{e \sqrt{\frac{h}{4\pi}} a_{as} (d_{st}^{r\lambda} + i c_{st}^{r\lambda})}{E_s - E_t - h\nu_{r\lambda}} (1 - N_s^0 + \delta_{as}) \right|^2. \quad (129) \end{aligned}$$

Mivel λ csak az 1,2 értékeket veheti fel, a (94) egyenlet szerint v_0 és ezért d_{as} is eltűnik. A (129)-ben az abszolút érték jelei közötti összegek tehát így alakulnak át:

$$\left| \sum_s e \sqrt{\frac{h}{4\pi}} (1 - N_s^0 + \delta_{as}) \left[\frac{c_{as}^{r\lambda} a_{st}}{E_s - E_a + h\nu_{r\lambda}} + \frac{a_{as} c_{st}^{r\lambda}}{E_s - E_t - h\nu_{r\lambda}} \right] \right|. \quad (130)$$

Ha a fény $h\nu_{r\lambda}$ -hez tartozó hullámhossza nagy az atom méreteihez képest, akkor írható

$$c_{mn}^{r\lambda} = \sum_i \int u_e^{*m} \alpha_{e\sigma}^i u_\sigma^n v_i^{r\lambda} = \sum_i (v_i^{r\lambda})_A \frac{1}{c} \dot{x}_i^{nm}. \quad (131)$$

Itt az A index azt jelenti, hogy az illető helyfüggvényt az atom helyén kell felvennünk. Ha az r, λ -ra vonatkozó összegezést ν és $\nu + \Delta\nu$ között végezzük el, akkor a (84) és (94) alapján a (129) átmeneti valószínűsége kapjuk

$$\frac{1}{\Delta E_t} \frac{16\pi^2 c^2}{3c^3} \nu \Delta\nu \sum_i \left| \sum_s (1 - N_s^0 + \delta_{as}) \left[\frac{\dot{x}_i^{as} a_{st}}{E_s - E_a + h\nu} + \frac{a_{as} \dot{x}_i^{st}}{E_s - E_t - h\nu} \right] \right|^2. \quad (132)$$

Az $1/\Delta E_t$ tényező elesne, ha az a_s és \dot{x}_i^{st} matrixokat olyan sajátfüggvényekkel számítanánk ki, amelyek a dE_t skálán normáltak.

Ha ν és $\Delta\nu$ $\frac{E}{h}$ nagyságrendűek, akkor a fénykvantumkibocsátással járó folyamat viszonylagos gyakorisága a közönséges folyamat gyakoriságához képest nagyságrendileg

$$\sim \frac{e^2}{hc} \left(\frac{\dot{x}}{c} \right)^2. \quad (133)$$

Az itt vizsgált átmenetek valószínűsége tehát a közönséges folyamathoz képest a sugárzási jelenségek nagyságrendjébe eső kicsi mennyiség.

Ennek az eredménynek a mag radioaktív bomlása Gamow—Gurney—Condon-féle elméletre való alkalmazásából következik, hogy a primér β sugár spektrumai sohasem lehetnek élesek, mivel az elektronok összes sugárhatásai a magban viszonylagosan 1 nagyságrendűek. Természetesen az itt felépített elmélet szerint fel kellene lépniük a hozzárendelt folytonos γ -spektrumoknak is, mivel ebben az elméletben az energiatétel érvényessége mindig fennáll. Az ilyen γ -spektrumok látszólagos nemlétével kapcsolatos nehézségről ez az elmélet semmi felvilágosítást nem nyújt.

A folytonos primér β -spektrumokra vonatkozó érvelésünk bizonyos hasonlóságot mutat Rosseland* egyik gondolatmenetével, amely szerint az elektronoknak ama gyorsulás révén, amellyel a magot elhagyják, sugárzást kell kibocsátaniuk. Alaposabb összehasonlítás mégis különbséget mutat a két elmélet között, A (129) összegben csak azok a tagok felelnek meg a Rosseland-féle átmeneteknek, amelyeknél $E_s - E_t - h\nu_{r\lambda}$ igen kicsinek tekinthető. A hozzájuk tartozó d_{st} , c_{st} együtthatók kicsisége miatt csak kis járulékot szolgáltatnak az összeredményhez.

A fényelektromos jelenségre is alkalmazható a (129) egyenlet. Nem mond ki rá semmi újat, de megadja a Compton-effektus ismert valószínűségi képletét. Ha a t állapotot a diszkrét spektrumban választjuk, akkor (129)-ből megkapjuk a Ladenburg—Kramers-féle diszperziós formula újabb levezetését.

A (132) végképletből látható, hogy ez még a Dirac-féle $+mc^2 \rightarrow -mc^2$ ugrásokat is tartalmazza, amelyek természetesen az eredményt befolyásolják. Mivel ezek az ugrások a valóságban kétségtelenül nem lépnek fel, azért (132) vizsgálatában nem vettük figyelembe. Ez az itt tárgyalt elmélet következetlensége, amit el kell fogadnunk, amíg a Dirac-féle nehézség megmagyarázatlan marad.

Fordította: Csoma Zsigmond

* S. Rosseland, ZS. f. Phys. 14, 173, 1923.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Sándor István

A kézirat nyomdába érkezett: 1980 XII. 3. Terjedelem: 10,50 (A/5) ív
80-5281 — Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Dobó József igazgató

Ára: 15,— Ft
Előfizetés kötetenként: 90,— Ft

INDEX: 26 491
ISSN 0025—0104

TARTALOMJEGYZÉK

Szilárdságnövelő mechanizmusok fémekben II.	287
Szerkesztő: Kovács István	
Bérces György: Befagyasztási keményedés	287
Ungár Tamás és Honyek Gyula: Szilárdoldatos keményedés	299
Lendvai János: Kiválásos keményedés	329
Somogyi Mária: A^{III} — B^{V} alapú MOS rendszerek	351

A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

W. Heisenberg és W. Pauli: A hullámmezők kvantummechanikája	375
---	-----

307.226

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

GÁSPÁR REZSŐ, KISS DEZSŐ, KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR
ÉS SZALAY SÁNDOR
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI
PÁL LÉNÁRD

XXIX. KÖTET

5. FÜZET



AKADÉMIAI KIADÓ
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST 1981

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klasszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10-10 dolgozat megjelenése után a folyóirattól leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóirattól évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelemben.

A kéziratok a következő címre küldendőek:

Turchányi György egyetemi tanár

Biofizikai Intézet

1444 Budapest VIII., Postafiók 263

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 90 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a KULTÚRA Külkereskedelmi Vállalat, 1389 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmi ismertetőt írjanak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közöljék. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írjanak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.

INTERNATIONAL PHYSICS COMPETITIONS

I—XI.

1967—1979

Problems and Solutions collected by

Dr. N. VERMES

Translation and Preface by

R. KUNFALVI

SOME NOTES ON PROBLEM SOLVING AND INTERNATIONAL COMPETITIONS

by

R. KUNFALVI

Competitions may be regarded also as a part of the regular school work. Competitive examinations have a long-standing tradition in several countries especially in England, France or the United States. In Hungary we are using them extensively as entrance examinations to our Universities. They are very useful as search for and discovery of talents ("brain quest"). In Hungary the Mathematical and Physical Society started organizing them in 1894. Yearly competitions in mathematics are held during autumn time for students who have finished the secondary school. (Some of the problems of these competitions were published by Random House, New York: "Hungarian Problem Book I and II".) Similar competitions in physics exist since 1916. Some well known scientists and mathematicians like Leo Szilárd, Eduard Teller, Theodor Kármán, Gábor Szegő, Marcel Riesz, Lipót Fejér, László Tisza and many others were among the prize winners. The official school authorities organized competitions in different subjects in 1923 for the first time. At present we have yearly competitions in practically all subjects taught in secondary schools. They are very popular since prize winners are given preference when entering universities.

Readers of the "Journal of Mathematics and Physics for Secondary School Students" (Középiskolai Matematikai Lapok) may enter competitions organized by the journal. The problems published in the journal are solved at home and sent in to the editors who award marks. Prizes are given yearly to those who won a certain number of marks. The participation is voluntary. Similar journals and competitions are well known in Czechoslovakia, Poland, Roumania, the Soviet Union and other countries.

The first and second International Competitions in Mathematics were held in Roumania. The jubileum of the Roumanian Mathematical Society in 1959 was occasion for the organization of an international competition of this kind. The last — the 22. — in 1981 was held in the USA. 7 countries were represented at the first event, the number has been growing ever since and 27 countries from 5 continents met in Washington in 1981.

Similar competitions are held in chemistry since 1968 with good participation.

Exchange of views about the possibility of organizing an International Physical Competition began after 1960. The first invitation was sent round by Poland in 1967.

Teams of 3 students, and one teacher from 5 countries (Bulgaria, Czechoslovakia, Hungary, Poland, Roumania) met in Warsaw. Next year in Budapest (Hungary) the number of countries participating was 8, including the German Democratic Republic, the Soviet Union and Yugoslavia. Based on the experiences gained, a Statute was discussed and drawn up by a meeting of delegates in Brno (Czechoslovakia) in February 1969. This statute is still in force with slight modifications. International Physical Competitions were held since: 1969 Brno, 1970 Moscow, 1971 Sophia, 1972 Bucarest. After an interruption Warsaw followed again in 1974, the German Democratic Republic (Güstrow) in 1975, Budapest in 1976, Czechoslovakia (Hradec Králové) in 1977, Moscow in 1979 and Varna in 1981. The number of countries competing was 5 in 1967, 8 in 1968, 1969, 1970, 7 in 1971, 9 in 1972, 8 in 1974, 9 in 1975, 10 in 1976, 12 in 1977, 10 in 1979 and 14 in 1981. New participants joined in Bucarest (Cuba and France), Warsaw (the Federal Republic of Germany), Budapest (Sweden), Hradec Králové (Finland) Italy and Vietnam in 1981. The teams consisted of 3 pupils in 1967 and 1968, 6 in 1970 and 5 on all other occasions, nearly all boys only a few girls (a maximum of 3 in Budapest 1976).

A few important items from the Statute:

"1. In recognition of the growing significance of physics in all fields of science and technology, and in the general education of young people, and with the aim of enhancing the development of international contacts in the field of school instruction in physics, an annual physics competition has been organized for secondary school students. The competition is called "International Physics Competition."

2. The competition is organized by the Ministry of Education or other appropriate institution of one of the participating countries.... The organizing country is obliged to ensure equal participation of all the delegations, and to invite all the participants of the previous competitions. Additionally it has the right of inviting other countries.

3. Each participating country sends a team consisting of students of general or technical secondary schools, i.e. schools which can not be considered technical colleges. The age of the participants should not be above twenty on the day of the opening of the competition. Each team should include 3—6 members. Two accompanying persons are invited from each country, one of them the head of the delegation, the other the pedagogical leader.

4. The financial principles of the organization of the competition are as follows: the Ministry which sends the students to the competition covers the travel costs of the delegation. All other costs from the moment of arrival to the moment of departure are covered by the Ministry of the organizing country....

5. The competition lasts for two halves of two different working days. During the half of the first day the participants work on the solution in written form of three physics problems, and during the half of the second day — they work on the solution of an experimental problem..."

The success of the competitions depends on the quality of the problems.

Good problems promote the understanding of nature. Whatever kind of problem the student encounters he has to work methodically, in a scientific way. First he has to study carefully the text of the problem. Problems describe a certain situation for which he has to work out a model. The model is simpler than the nature or the real mechanism but has some of its most important features. It is a first approximation or even a zero approximation which can be generalized later. The given data should be

examined carefully: do they contain sufficient information or not. If not, one has to use parameters which can be chosen later accordingly. Eventually there may be more information than necessary, some can be neglected. The next step is to find out what general laws and definitions are pertinent to the problem in question. Dressing the problem in mathematical form follows. Mathematics is the language of science. Its sentences are equations and inequalities. Their solution is the least interesting part of the job for the physicist. Daniel Bernouilli wrote once to Lagrange that the solving of mathematical problems is no art, it can be taught to any shoemaker, but let him show a shoemaker who can understand and solve a physical problem. According to Dirac a good scientist ought to be able to see the mathematical result before solving the equations. The real task of the physicist begins when the formal solution of the equations has been obtained. He has to translate it into the language of nature, apply it to the reality, discuss it, alter the conditions (parameters) and see what happens if he changes them.

Though these general rules should be observed, problem solving is not a routine work. It means not merely substituting numbers for symbols in known formulae like fitting together pieces of a jigsaw puzzle. There is plenty of possibility for creative activity, finding of new ways and new applications.

The problems are set by the organizing country but the participating countries have the right to propose suitable problems. In practice they seldom do it. A thorough knowledge of all branches of physics, taught in secondary schools, is expected from the participants. The number of problems set during 10 years:

	Theoretical	Practical	Total
Mechanics	10	1	11
Heat	8	2	10
Light	10	1	11
Electricity	6	7	13
Other or complex	3	—	3

Electricity is the subject favoured most for practical problems, the usual form is a "black box" of some kind (6). In mechanics the good old inclined plane (3) and moving cars (2) are popular. Light means refraction (3), lenses (3) or interference (3). Heat requires mostly the use of the equation of state (6) or work on specific heat (2).

The texts of the problems published here are slight modifications of the original texts. In some cases they are shorter and clearer or give more information. We aim at giving help, show how problems are solved and not to write a historical account of the competitions.

Physical quantities are given in different units. The units are sometimes not repeated in the numerical calculations but are always given for the results.

The level of the problems has increased steadily. Looking back, those, set at the first International Competition, seem to be too easy. As a consequence the requirements at the home competitions have been raised in all participating countries and this fact must have influenced the level of teaching physics too. The solution of the problems asks for more creativity and less routine work. No higher mathematics are involved but more logical thinking.

Studying the lists of prize-winners in past competitions we find that many of them

became eminent scientists in their fields. It must be said on the other hand, that the majority of prominent scientists never took part in competitions, or never excelled in them. We must remember that talents are of different kinds. Some are good at quick intuitive ideas, others at long-planned, patient work. By setting problems of different kinds, by planning an ample variety of competitions of different forms, we are more certain of finding all or, at least most, talents in time. The statics of the prize-winners of the International Physical Competitions are promising. All participants of former competitions have finished or are finishing their studies on our universities. Many got their degrees with honour, are working on the University or in Research Institutes and produced a number of scientific papers. They have good personnel contacts with scientists of different countries, some made while taking part in competitions. This is a point worth keeping in mind when summing up the value of international students competitions.

THE PROBLEMS AND THEIR SOLUTIONS

I.

1967. Warsaw. Poland

Problem 1. A ball of mass $M=0.2$ kg rests on a vertical column, height $h=5$ m. A bullet, mass $m=0.01$ kg, traveling at $v_0=500$ m/s, passes horizontally through the centre of the ball. The ball reaches the ground at a distance of $s=20$ m. Where does the bullet reach ground? What part of the kinetic energy of the bullet was transferred as heat to the bullet?

Solution. The total momentum of a system remains constant in all cases of collisions:

$$mv_0 = mv + MV.$$

v is the velocity of the bullet and V is the velocity of the ball after the collision. The time of flight for both

$$t = \sqrt{2gh} = 0.01 \text{ s}.$$

During this time the ball covers a distance of 20 m in horizontal direction, its velocity in horizontal direction $V=20 \text{ m} : 1.01 \text{ s} = 19.8 \text{ m/s}$. The equation

$$0.01 \cdot 500 = 0.01v + 0.2 \cdot 19.8$$

gives the velocity of the bullet immediately after the collision:

$$v = 104 \text{ m/s}.$$

The bullet falls also 1.01 s, thus it reaches the ground at $S=vt=104 \text{ m/s} \cdot 1.01 \text{ s} = 105 \text{ m}$ distance in horizontal direction from the column (Fig. 1).

The initial kinetic energy $mv_0^2/2=1250$ joule. Immediately after the collision the kinetic energy of the ball is

$$MV^2/2 = 39.2 \text{ joule},$$

the kinetic energy of the bullet

$$mv^2/2 = 54 \text{ joule}.$$

thus the total kinetic energy

$$39.2 \text{ J} + 54 \text{ J} = 93.2 \text{ J}.$$

The difference

$$1250 \text{ J} - 93.2 \text{ J} = 1156.8 \text{ J},$$

92.5% of the original kinetic energy is absorbed by the ball as heat. The collision is not completely inelastic. In case of a completely elastic collision the kinetic energy is conserved. If the collision were completely inelastic the bullet would remain inside the ball.

Problem 2. In Fig. 2 we have an infinite network of resistors, resistance r each what is the resultant resistance between point A and B?

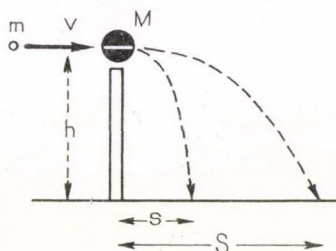


Figure 1

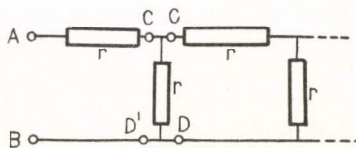


Figure 2

Solution. Let us suppose that the resistance of the network, taken from right to left as far as points CD, is r_n . Proceeding to the left resistance r is connected in parallel to r_n , giving a resultant resistance at C'D'

$$\frac{r \cdot r_n}{r + r_n}.$$

Next a resistance r is connected in series, thus the resistance between A and B is

$$r + \frac{r \cdot r_n}{r + r_n}.$$

If the network is infinite, connecting r , the next resistor does not change the resultant, thus the resistance between AB is the same r_n as between CD, hence the equation:

$$r_n = r + \frac{r \cdot r_n}{r + r_n}.$$

The solution of the equation for r_n :

$$r_n = r \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Problem 3. Given are two spheres of the same kind. One is at rest on a horizontal plane, the other hanging from a thin cord. The same quantities of heat are supplied to

both spheres. Are the temperatures of the spheres going to be the same or not? Give your reasons! (All kind of heat loss is negligible.)

Solution. If heated, the volume of the sphere increases. The centre of gravity of the first sphere rises and the work against the gravitational force uses up a part of the heat (Fig. 3). Thus less heat remains to raise the temperature of the sphere. As a result, the temperature of the first sphere will be less than the temperature of the second sphere. (The difference is very small. For a copper sphere of 10 cm radius the relative difference is about 10^{-7} .)

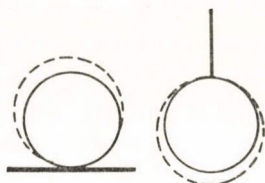


Figure 3

Experimental problem. The specific heat of petroleum is to be determined. A balance, calorimeter, thermometer, source, switches, wires, stop-watch, electric heater, vessels, water and petroleum are at disposal.

Solution. The specific heat can be determined in the usual way by mixing water and petroleum of known temperature in the calorimeter. Reading the temperature of the mixture we can calculate the specific heat from the equation containing the heat given up by one and the heat gained by the other.

We can also heat first water, then the same quantity of petroleum using the electric heater and observe the change of temperature in time. The quotient of the values of the tangents at the initial point of the curves is in inverse ratio to the values of the specific heats.

Alternative problem for students who had no electricity in their schools.

10 liters of dry air at atmospheric pressure and 0°C temperature are contained in a closed vessel. 3 g water is added and the system is heated to 100°C . Find the pressure in the vessel.

Solution. At 100°C the whole quantity of water is in vapour phase. 3 g water is $1/6$ gram-mole ($18:3=6$), which gives at 100°C and atmospheric pressure a volume of

$$22.4 \cdot 373/6 \cdot 273 = 5.1 \text{ liter.}$$

The pressure of $1/6$ gram-mole vapour is gained from the equation of state:

$$\frac{1/6 \cdot 22.4}{273} = \frac{p_{\text{vapour}} \cdot 10}{373},$$

hence

$$p_{\text{vapour}} = 0.507 \text{ atm.}$$

The equation of state for the air:

$$\frac{1}{273} = \frac{p_{\text{air}}}{373},$$

hence

$$p_{\text{air}} = 1.366 \text{ atm.}$$

Adding the partial pressures:

$$p = p_{\text{vapour}} + p_{\text{air}} = 0.507 + 1.366 = 1.873 \text{ atm.}$$

II. 1968. Budapest. Hungary

Problem 1. On an inclined plane of 30° a block, mass $m_2=4$ kg, is joined by a light cord to a solid cylinder, mass $m_1=8$ kg, radius $r=5$ cm (Fig. 4). Find the acceleration if the bodies are released. The coefficient of friction between the block and the inclined plane $\mu=0.2$. Friction at the bearing and rolling friction are negligible.

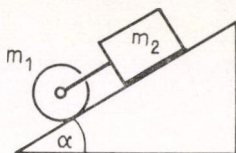


Figure 4

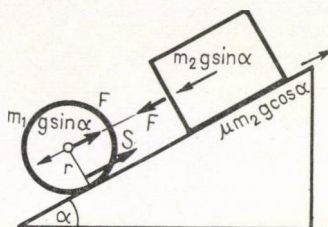


Figure 5

Solution. If the cord is stressed the cylinder and the block move with the same acceleration a . Let F be the tension in the cord, S the frictional force between the block and the inclined plane (Fig. 5). The angular acceleration of the cylinder is a/r . The force causing the acceleration of the block:

$$m_2 a = m_2 g \sin \alpha - \mu m_2 g \cos \alpha + F,$$

the force causing the acceleration of the cylinder:

$$m_1 a = m_1 g \sin \alpha - S - F.$$

The equation of motion for the rotation of the cylinder:

$$S r = \frac{a}{r} \cdot \Theta.$$

(Θ is the moment of inertia of the cylinder; $S \cdot r$ the torque of the frictional force.) Solving the system of equations we get:

$$a = g \cdot \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - \mu m_2 \cos \alpha}{m_1 + m_2 + \Theta/r^2}, \quad (1)$$

$$S = \frac{\Theta}{r^2} \cdot g \cdot \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - \mu m_2 \cos \alpha}{m_1 + m_2 + \Theta/r^2}, \quad (2)$$

$$F = m_2 g \cdot \frac{\mu(m_1 + \Theta/r^2) \cos \alpha - \Theta \sin \alpha/r^2}{m_1 + m_2 + \Theta/r^2}. \quad (3)$$

The moment of inertia of a uniform cylinder $\Theta = m_1 r^2/2$. Using the given numerical values:

$$a = \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - \mu m_2 \cos \alpha}{1.5m_1 + m_2} \cdot g = 0.3317g = 3.25 \text{ m/s}^2,$$

$$S = \frac{m_1 g}{2} \cdot \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - \mu m_2 \cos \alpha}{1.5m_1 + m_2} = 1.327 \text{ kp} = 13.01 \text{ N},$$

$$F = m_2 g \cdot \frac{(1.5\mu \cos \alpha - 0.5 \sin \alpha) m_1}{1.5m_1 + m_2} = 0.020 \text{ kp} = 0.196 \text{ N}.$$

Discussion. (See Fig. 6.) The condition for the system to start moving is $a > 0$. Inserting $a = 0$ into (1) we obtain the limit for angle α_1 :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \mu \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\mu}{3} = 0.0667, \quad \alpha_1 = 3^\circ 49'.$$

For the cylinder separately $\alpha_1 = 0$, and for the block separately $\alpha_1 = \operatorname{arctg} \mu = 11^\circ 19'$.

If the cord is not stretched the bodies move separately. We obtain the limit by inserting $F = 0$ into (3):

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \mu \left(1 + \frac{m_1 r^2}{\Theta} \right) = 3\mu = 0.6, \quad \alpha_2 = 30^\circ 58'.$$

The condition for the cylinder to begin skidding is that the value of S (calculated from (2) taking the same coefficient of friction) attains the value of $\mu m_1 g \cos \alpha$. This gives the same value for α_2 as we had for α_1 . The acceleration of the centres of both

the cylinder and the block is the same: $g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$, the frictional force at the bottom of the cylinder $\mu m_1 g \cos \alpha$, the tangential acceleration of the peripheral points of the cylinder: $\mu (m_1 r^2 / \Theta) \cdot g \cos \alpha$.

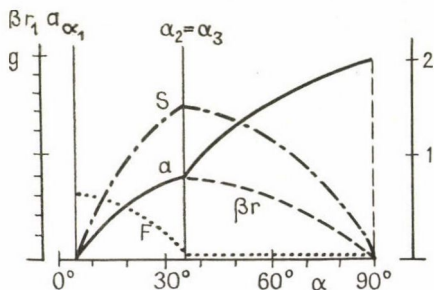


Figure 6

Problem 2. We have 300 cm³ toluene of 0 °C temperature in one glass and 110 cm³ toluene of 100 °C temperature in another glass. (The sum of the volumes is 410 cm³.) Find the final volume after the two liquids are mixed. The coefficient of volume expansion of toluene $\beta = 0.001$ (°C)⁻¹. Neglect the loss of heat.

Solution. If the volume at temperature t_1 is V_1 , then the volume at temperature 0 °C is $V_{10} = V_1 / (1 + \beta t_1)$. In the same way if the volume at t_2 temperature is V_2 , at 0 °C we have $V_{20} = V_2 / (1 + \beta t_2)$. Furthermore if the density of the liquid at 0 °C is d , then the masses are $m_1 = V_{10} d$ and $m_2 = V_{20} d$, respectively. After mixing the liquids the temperature

$$t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}.$$

The volumes at this temperature are $V_{10}(1 + \beta t)$ and $V_{20}(1 + \beta t)$.

The sum of the volumes after mixing:

$$\begin{aligned}
 V_{10}(1+\beta t) + V_{20}(1+\beta t) &= V_{10} + V_{20} + \beta(V_{10} + V_{20})t = \\
 &= V_{10} + V_{20} + \beta \cdot \frac{m_1 + m_2}{d} \cdot \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} = \\
 &= V_{10} + V_{20} + \beta(m_1 t_1/d + m_2 t_2/d) = V_{10} + \beta V_{10} t_1 + V_{20} + \\
 &+ \beta V_{20} t_2 = V_{10}(1 + \beta t_1) + V_{20}(1 + \beta t_2) = V_1 + V_2.
 \end{aligned}$$

The sum of the volumes is constant. In our case 410 cm^3 . The result is valid for any number of quantities of toluene, as the mixing can be done successively adding always one more glass of liquid to the mixture.

Problem 3. Rays of light fall on the plane surface of a half cylinder, at an angle of 45° , in the plane perpendicular to the axis (Fig. 7). (Index of refraction $\sqrt{2}$.) Where do the rays leave the cylindrical surface?

Solution. Let us use the angle φ to describe the position of the rays in the glass (Fig. 8). According to the law of refraction $\sin 45^\circ / \sin \beta = \sqrt{2}$, $\sin \beta = 0.5$, $\beta = 30^\circ$. All refracted rays include an angle of 30° with the perpendicular. We have to investigate what happens if φ increases from 0° to 180° .

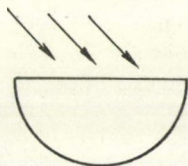


Figure 7

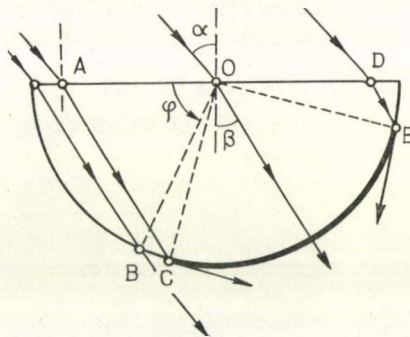


Figure 8

It is easily seen that φ can not be less than 60° . The critical angle at the glass surface is given by $\sin \beta_t = 1/n = \sqrt{2}/2$; hence $\beta_t = 45^\circ$. In the case of total internal reflection $\angle ACO = 45^\circ$, hence $\varphi = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$. If φ is more than 75° the rays leave the cylinder. Increasing the angle we reach the critical angle again if $\angle OED = 45^\circ$. Thus the rays leave the glass cylinder if:

$$75^\circ < \varphi < 165^\circ,$$

CE, arc of the emerging rays, subtends a central angle of 90° .

Experimental problem. The participants receive three closed boxes two plug sockets on each. They have to find out, without opening the boxes, what kind of

elements are in them and measure their characteristic properties. At the disposal are: instruments for AC and DC (their internal resistance and accuracy given) AC (50/s frequency) and DC sources.

Solution. No voltage is observed at any of the plug sockets therefore none of the boxes contains a source.

Measuring the resistances using first AC then DC, one of the boxes gives the same result. Conclusion: the box contains a simple resistor. Its resistance is determined by measurement.

One of the boxes has a very great resistance for DC but conducts AC well. It contains a capacitor, the value can be computed as $C=1/\omega R$.

The third box conducts both AC and DC, its resistance for AC is greater. It contains a resistor and an inductor connected in series. The values of the resistance and the inductance can be computed from the measurements.

III.

1969. Brno. Czechoslovakia

Problem 1. The mechanical system in Fig. 9 consists of three cars, masses $m_A = 0.3$ kg, $m_B = 0.2$ kg and $m_C = 1.5$ kg.

a) Force F , acting on car C in horizontal direction, is so strong that cars A and B remain at rest relative to C. Find the force F and the tension in the cord.

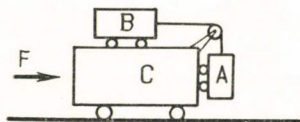


Figure 9

b) Car C is at rest. Determine the accelerations of A and B and the tension in the cord.

Drag, friction, the inertial moments of pulleys and wheels are negligible.

Solution. a) Car A has no acceleration in vertical direction, therefore it pulls the cord with the force $m_A g$. This force accelerates car B with $a_B = m_A g / m_B$. The whole system of three cars moves with the same acceleration, therefore:

$$F = (m_A + m_B + m_C) \cdot \frac{m_A}{m_B} \cdot g.$$

With the given numerical values:

$$a_B = a_C = 1.5g = 14.7 \text{ m/s}^2.$$

The tension:

$$0.3 \text{ kp} = 2.94 \text{ N},$$

and

$$F = 29.4 \text{ N} = 3 \text{ kp}.$$

b) If car C is at rest, force $m_A g$ accelerates mass $m_A + m_B$, thus the acceleration:

$$\frac{m_A}{m_A + m_B} \cdot g = 0.6g.$$

The tension is given by the difference of the weight and the accelerating force:

$$m_A g - m_A \cdot 0.6g = 0.12 \text{ kp} = 1.176 \text{ N}.$$

Problem 2. Water of mass m_2 is contained in a copper calorimeter of mass m_1 . The common temperature is t_{12} . A piece of ice, mass m_3 , temperature t_3 , is dropped into the calorimeter (Fig. 10). Find the final temperature in all possible cases. t_3 should be a negative number in our calculations. (Specific heat of copper $c_1 = 0.1 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$, specific heat of water $c_2 = 1 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$, specific heat of ice $c_3 = 0.5 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$, latent heat of fusion 80 kcal/kg .)

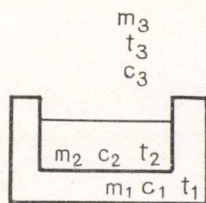


Figure 10

Solution. Three different final states are possible: a) ice only; b) ice and water; c) water only.

a) Ice becomes warmer for some (negative) temperature t_a ; equating the supplied and the removed heat

$$c_3 m_3 (t_a - t_3) = (c_1 m_1 + c_2 m_2) (t_{12} - t_a) + m_2 L,$$

we get for the final temperature:

$$t_a = \frac{(c_1 m_1 + c_3 m_2) t_{12} + c_3 m_3 t_3 + m_2 L}{c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3}. \quad (1)$$

Condition for case (a) is; $t_a < 0$; if the numerator is negative we get the following condition:

$$(c_1 m_1 + c_2 m_2) t_{12} < -c_3 m_3 t_3 - m_2 L. \quad (2)$$

c) Let us investigate now the case when the whole ice melts. Equating the heat taken up by the ice and given up by the calorimeter:

$$c_3 m_3 (0 - t_3) + m_3 L + c_2 m_3 t_c = (c_1 m_1 + c_2 m_2) (t_{12} - t_c),$$

we get for the final temperature:

$$t_c = \frac{(c_1 m_1 + c_2 m_2) t_{12} + c_3 m_3 t_3 - m_3 L}{c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_2 m_3}. \quad (3)$$

This case ensues only if $t_c > 0$; for a positive numerator we obtain the following condition:

$$-c_3 m_3 t_3 + m_3 L < (c_1 m_1 + c_2 m_2) t_{12}. \quad (4)$$

b) This is the case when after mixing both ice and water are present in the calorimeter at the temperature 0°C . Its condition according to (2) and (4):

$$-c_3 m_3 t_3 + m_3 L < (c_1 m_1 + c_2 m_2) t_{12} < c_3 m_3 t_3 - m_2 L.$$

If x gram ice melts after mixing:

$$-c_3 m_3 t_3 + xL = (c_1 m_1 + c_2 m_2) t_{12},$$

thus the quantity of ice melted :

$$x = \frac{(c_1 m_1 + c_2 m_2) t_{12} + c_3 m_3 t_3}{L}.$$

There will be $m_3 - x$ ice and $m_2 + x$ water in the calorimeter after mixing. Negative x means that some water froze and the quantity of ice increased. From the formulae we can easily obtain the final results for the given numerical values.

Problem 3. The radius of the wire ring in a vertical plane $R=5$ cm (see Fig. 11). A small sphere of mass $m=1$ gram, attached to light insulating cord of length l , is suspended from the highest point of the ring. Giving like charges of $Q=9 \cdot 10^{-8}$ C to both the ring and the sphere we find that the sphere is in equilibrium in the symmetry axis perpendicular to the plane of the ring. Find the length of the cord.

Solution. If the whole charge on the ring were centred in one point we should have the Coulomb force $F=kQ^2/l^2$. The forces exerted by the points of the ring include an angle α with the symmetry axis, their projection on the axis $F_n = F \cdot \cos \alpha$. The weight of the sphere is mg . From Fig. 11:

$$\sin \alpha = \frac{mg}{F} = \frac{R}{l} = \frac{mg}{kQ^2/l^2}.$$

Hence

$$l = \sqrt[3]{\frac{RkQ^2}{mg}} = 7.2 \text{ cm} \quad (k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2).$$

Problem 4. A glass plate is placed above a glass cube of 2 cm edges in such a way that there remains a thin parallel air space between them. Electromagnetic waves of wave lengths between $0.4 \mu\text{m}$ and $1.15 \mu\text{m}$ incident perpendicular to the plate are reflected from both surfaces of the air and interfere. In this range only two wave lengths give maximum reinforcements. One of them $\lambda_1=0.4 \mu\text{m}$. Find the thickness of the air layer.

Solution. In an airtlayer of thickness d , light, passing there and back, covers a distance of $2d$ (Fig. 12). Reflected by the glass it undergoes also a phase change of 180° . Thus the condition of reinforcement for the light of wave length λ_1 :

$$2d = k_1 \lambda_1 + \frac{\lambda_1}{2} \quad (k_1 = 0, 1, 2, \dots).$$

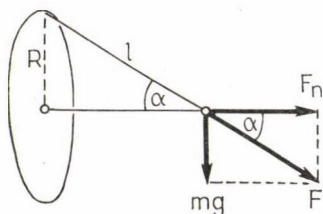


Figure 11

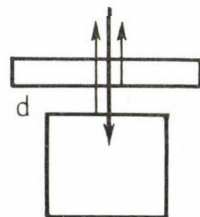


Figure 12

Similarly for the other wave length producing maximum reinforcement:

$$2d = k_2 \lambda_2 + \frac{\lambda_2}{2} \quad (k_2 = 0, 1, 2, \dots).$$

Comparing these conditions we get:

$$\frac{2k_1 + 1}{2k_2 + 1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

It follows from the given wave length range, that $\lambda_2/\lambda_1 = 1.15/0.4 = 2.875$.

The least possible value of the ratio is 1, therefore we have the following condition for k_1 and k_2 :

$$1 < \frac{2k_1 + 1}{2k_2 + 1} < 2.875. \quad (0)$$

Investigating the value of the fraction for different k_1 and k_2 , we get:

k_2	k_1	0	1	2	3	4	5
0		1	3	5	7	9	11
1		0.33	1	1.67	2.33	3	3.67
2		0.2	0.6	1	1.4	1.8	2.2
3		0.14	0.43	0.71	1	1.29	1.57
4		0.11	0.33	0.56	0.78	1	1.22
5		0.09	0.27	0.45	0.64	0.81	1

Only those pairs of k_1 and k_2 are eligible, for which the value of the fraction satisfies condition (0). We have marked these in our table, but only one pair is permissible. This means that we should look for such a column where only one permissible pair can be found. Only one exists such: $k_1 = 2$ and $k_2 = 1$, the value of the fraction is 1.67. This provides the solution.

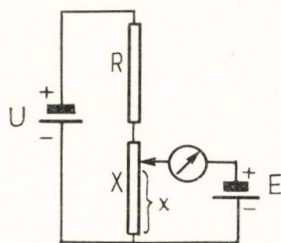
For $\lambda_1 = 0.4 \mu\text{m}$ the thickness of the air layer from $2d = 2 \cdot 0.4 + 0.2 = 1 \mu\text{m}$, $d = 0.5 \mu\text{m}$.

The second wave length from

$$2 \cdot 0.5 = 1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2/2, \quad \lambda_2 = 0.667 \mu\text{m}.$$

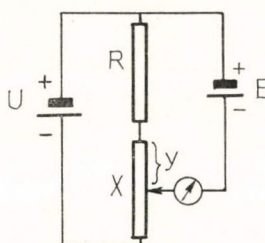
Experimental problem. Given a closed circuit consisting of a known resistor R , an unknown resistor X and a source of negligible internal resistance. X is an adjustable resistor consisting of a wire, a mm scale and a sliding contact. A circuit, consisting of a dry cell and a zero centre galvanometer should be connected to the main circuit in such a way that no current flows across the galvanometer. Resistance X and the ratio of the terminal voltages should be determined.

Solution. Two compensating circuits (Fig. 13/a and 13/b) are made. We measure first including the potential difference across R , then without it. The position of the



$$\frac{E}{U} = \frac{xX}{R+X}$$

Figure 13/a



$$\frac{E}{U} = \frac{R+yX}{R+X}$$

Figure 13/b

sliding contact is given in the first case by ratio x in the second case by y . The ratio of the resistances is equal in both cases with the ratio of the potential differences.

Hence

$$\frac{E}{U} = \frac{x}{1+x-y}, \quad X = R \cdot \frac{1}{x-y}.$$

IV.

1970. Moscow. Soviet Union

Problem 1. In Fig. 14/a and 14/b a small sledge, mass $m=0.1$ kg, is seen on a board of mass $M=1$ kg. A motor on the sledge pulls a cord and thus the sledge with a velocity $v_0=0.1$ m/s. The friction between table and board is negligible. The coefficient of friction between board and sledge $\mu=0.02$. We hold the board and start the motor. When the sledge reaches the velocity v_0 we let the board go. At this moment the distance between the sledge and the end of the board $L=0.5$ m. The cord is fastened a) to a distant pole, b) to the end of the board.

Describe the motion of the board and the sledge in both cases. When does the sledge reach the end of the board?

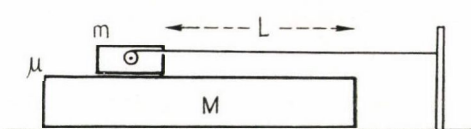


Figure 14/a

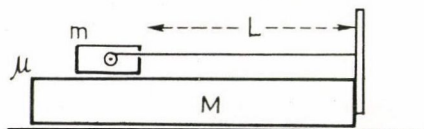


Figure 14/b

Solution. a) in the first case (Fig. 14/a) the sledge is in uniform motion. The sledge and the board move with different velocities. This causes a maximum frictional force μmg , which acts on the board and produces $a=\mu mg/M$ acceleration until the board reaches the velocity of the sledge v_0 . For the time of acceleration we get

$$t_0 = v_0/a = v_0 M/\mu mg = 5.1 \text{ s.}$$

During this time the sledge covers on the board the distance

$$S_0 = v_0^2/(2a) = v_0^2 M/(2\mu mg) = 0.255 \text{ m},$$

thus it is in $0.5 - 0.255 = 0.245 \text{ m}$ distance from the right end of the board. The sledge can not reach the end of the board because after this time the board is also in uniform motion. The motor has to pull the cord with the force μmg during the acceleration, but afterwards it can not exert any force, it winds up the cord only.

b) In the second case (Fig. 14/b) there is no friction between the table and the board. The sledge and the board form an isolated system, we can use the law of conservation of momentum. When we let the board go the momentum is mv_0 .

Having released the board when its velocity is v_2 :

$$mv_0 = Mv_2 + m(v_0 + v_2).$$

The equation shows that $v_2 = 0$, the board remains at rest, the sledge continues to advance in the same way.

Problem 2. The crystal lattice of NaCl consists of cubical elementary cells with edges of length $5.6 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$. It is a face centred cubical lattice. The atomic weight of sodium is approximately 23, the atomic weight of chlorine 35.5. The density of NaCl is 2.22 g/cm^3 , compute the mass of the hydrogen atom (Fig. 15).

Solution. Let us find first the number of Na ions in a cell. There is one ion in the centre of the elementary cube and one on each edge of the cube, but only one fourth of the latter belongs to the cube. Thus for the number of Na ions we get $1 + 12/4 = 4$. We have the same number of chlorine ions. The density can be expressed as the quotient of the mass and the volume of an elementary cell. Denoting the mass of the hydrogen atom by m :

$$\frac{4 \cdot 23m + 4 \cdot 35.5m}{(5.6 \cdot 10^{-8})^3} = 2.22,$$

hence the mass of the hydrogen atom:

$$m = 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ gram} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

Problem 3. A metal sphere, radius $r = 10 \text{ cm}$, is placed concentrically into a thin hollow metal sphere of radius $R = 20 \text{ cm}$. The inner sphere is earthed by a long wire through an opening of the outer sphere. Find the potential of the outer sphere if it has a charge of $Q = 10^{-8} \text{ coulomb}$ (Fig. 16).

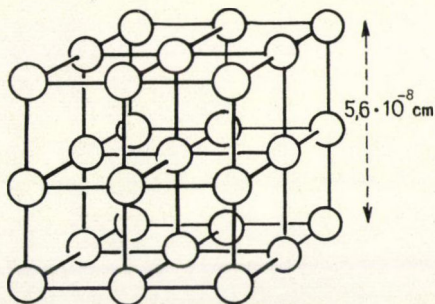


Figure 15

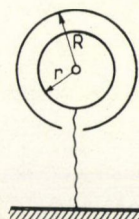


Figure 16

Solution. We have two capacitors connected in parallel. One consists of the outer and the inner sphere, the other consists of the earth and the outer sphere. By adding the capacitances the potential can be computed.

The capacitance of a conducting sphere relative to the distant earth is $(1/k) \cdot \text{radius}$. In the case of a hollow sphere, if the inner sphere is earthed:

$$\frac{1}{C_a} = k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right),$$

hence

$$C_a = \frac{1}{k} \cdot \frac{R \cdot r}{R - r}.$$

By adding the capacitances of the hollow sphere and the sphere, connected in parallel, we get

$$C = \frac{1}{k} \cdot \frac{Rr}{R-r} + \frac{1}{k} \cdot R = \frac{1}{k} \cdot \frac{R^2}{R-r}.$$

Using the numerical values $R=0.2$ m, $r=0.1$ m, $k=9 \cdot 10^9$:

$$C = 44.4 \cdot 10^{-12} \text{ farad} = 44.4 \text{ pF}.$$

The potential relative to the earth: $U=Q:C=227$ volt.

Problem 4. At the focal point of a concave mirror of radius $r=2$ m, diameter $d=0.5$ m, a circular screen is placed such that all incident rays parallel to the axis and reflected by the mirror should reach it. Find the diameter of the screen. What part of the light reaches the screen in the same position if its diameter is only one eights of that in the first case?

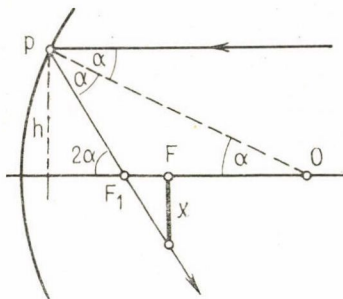


Figure 17

Solution. We have to apply the laws of reflection in exacter form through using some mathematical approximations.

According to the usual theoretical deductions in schoolbooks the focal point of a concave mirror of radius $PO=R$ is found at F the midpoint of distance R . (See Fig. 17) Let us denote the half of the diameter of the mirror by h . The ray incident at P , including an angle α with the radius, is reflected and intersects the axis at F_1 . OPF_1 is an isosceles triangle. $OF_1 = r/(2 \cos \alpha)$ thus the deviation of the focus from the theoretical distance:

$$FF_1 = OF_1 - OF = \frac{r}{2 \cos \alpha} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} (\sec \alpha - 1).$$

We place the screen at point F and want to find the minimum value for radius x . From the right angled triangle with the usual approximation for small angles we get:

$$\begin{aligned} x &= F_1F \cdot \tan 2\alpha \approx F_1F \cdot \sin 2\alpha = F_1F \cdot \frac{2h}{R} = \\ &= \frac{R}{2} (\sec \alpha - 1) \cdot \frac{2h}{R} = h(\sec \alpha - 1). \end{aligned}$$

For small angles:

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \quad \text{thus} \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2}.$$

Substituting $\alpha \approx h/R$, our result for the radius of the focal "spot"

$$x = \frac{h^3}{2R^2}.$$

With our numerical values:

$$h = 50/2 \text{ cm} = 25 \text{ cm}; \quad R = 200 \text{ cm}, \quad \text{thus} \quad x = 0.195 \text{ cm} = 1.95 \text{ mm}.$$

Let us see the second part of the problem. If the radius of the screen is x , then the radius of the light beam, incident on the screen:

$$h = \sqrt[3]{2R^2x}.$$

If we use a screen of radius kx instead of radius x , we have for the radius of the incident beam:

$$h_k = \sqrt[3]{2R^2kx}.$$

The amount of incident light is proportional to h_k^2 , hence

$$h_k^2 = (\sqrt[3]{2R^2kx})^2 = h^2 \sqrt[3]{k^2}.$$

In our case $k=1/8$. It follows that the amount of light falling upon the screen will be one fourth of its former value.

Experimental problem. There are on the desk three lenses mounted on stands, a screen with a geometrical design on it, a stick and a measuring tape. Measure the focal distances of the lenses by different methods using only the given tools.

Solution. Some possible methods. In the case of a convex lens we observe visually the disappearance of the virtual image and measure the distance of the lens. We look at the real image and with the help of the parallax put the stick on its place, measure the distances of object and image and compute the focal distance.

Let us see the case of a concave lens. We fit together the concave lens and a stronger convex lens and measure the focal distance of the system by one of the former methods then compute the focal distance of the concave lens.

V.

1971. Sophia. Bulgaria

Problem 1. Masses m_1 and m_2 are attached to the ends of a cord which passes over the top of a double inclined plane (Fig. 18). The mass of the inclined planes is m_1 they include angles α_1 and α_2 with the horizontal plane. The whole system is initially at rest. Find the acceleration of the inclined planes and the accelerations of

the bodies after the system has been released. What is the condition for the inclined planes to remain at rest? Friction is negligible.

Solution. Let us denote the acceleration of the double inclined plane in the inertial reference system by a (positive sign means the right hand deriction). a_0 denotes the acceleration of the bodies relative to the inclined planes (the acceleration is positive when m_1 , the body on the left, descends). The accelerations of the bodies in the inertial system, a_1 and a_2 , are obtained by adding the vectors a and a_0 . F denotes the tension in the cord (Fig. 19).

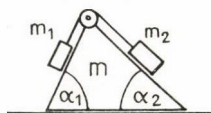


Figure 18

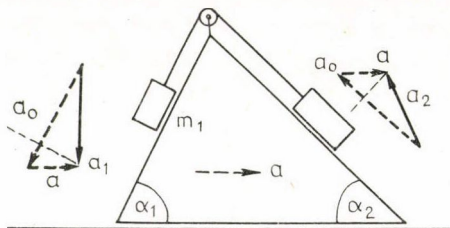


Figure 19

We apply Newton's second law for the components along the inclined planes. The force accelerating m_1 downhill is

$$m_1 g \sin \alpha_1 - F.$$

In the inertial system the component of the acceleration of m_1 along the inclined plane is

$$a_0 - a \cos \alpha_1.$$

Hence Newton's second law for the components:

$$m_1(a_0 - a \cos \alpha_1) = m_1 g \sin \alpha_1 - F.$$

Similarly for m_2 :

$$m_2(a_0 - a \cos \alpha_2) = F - m_2 g \sin \alpha_2.$$

Adding the equations:

$$(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)a = (m_1 + m_2)a_0 - (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)g. \quad (1)$$

In investigating the motion of the inclined planes we use the principle of conservation of momentum.

The velocity of the inclined planes in the inertial system is v (to the right). The horizontal components of v_0 (left), the velocities of the bodies on the inclined planes, in the initial system are

$$v_0 \cos \alpha_1 - v \quad \text{and} \quad v_0 \cos \alpha_2 - v, \quad \text{respectively.}$$

Using the principle of conservation of momentum:

$$m_1(v_0 \cos \alpha_1 - v) + m_2(v_0 \cos \alpha_2 - v) = mv.$$

For a uniformly accelerated motion the velocities are proportional to the accelerations, thus:

$$m_1(a_0 \cos \alpha_1 - a) + m_2(a_0 \cos \alpha_2 - a) = ma.$$

Hence:

$$a = \frac{m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2}{m + m_1 + m_2} \cdot a_0. \quad (2)$$

This equation gives us information about the accelerations. It is obvious that the inclined planes are at rest only if both bodies are at rest, that means the bodies are in equilibrium. This is a natural consequence of the principle of conservation of momentum.

The system of equations (1) and (2) gives the accelerations:

$$a_0 = \frac{(m + m_1 + m_2)(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{(m_1 + m_2)(m + m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2} \cdot g,$$

$$a = \frac{(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{(m_1 + m_2)(m + m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2} \cdot g.$$

Both accelerations are zero if

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}.$$

Problem 2. The well known Torricelli apparatus is assembled in a cylinder provided with a piston. There is hydrogen above the mercury and air in the cylinder. In stage 1 the height of the mercury column is 70 cm, the pressure of the air $p_{a1} = 1.314 \text{ atm} = 133.4 \text{ kPa} = 100 \text{ Hg cm}$, the temperature $0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$. We move the piston upwards until the height of the mercury column decreases to 40 cm; the pressure of the air will be $p_{a2} = 0.79 \text{ atm} = 80 \text{ kPa} = 60 \text{ Hgcm}$ (stage 2). Then keeping the volume constant we raise the temperature to T_3 ; the height of the mercury column is now 50 cm (stage 3). Finally in stage 4 the temperature is T_4 , the height of the mercury column 45 cm, the pressure of the air unchanged. Find the pressure and the temperature of the hydrogen in the final stage.

Solution. We tabulate the data of the air and the hydrogen. Their temperatures are the same. The length of the glass tube is denoted by L . We measure the volume of the hydrogen in cm simply by the length of the tube containing it. All pressures are given in Hgcm. (See Fig. 20/1—4.)

	1	2	3	4
Pressure of hydrogen	p_{h1}	p_{h2}	p_{h3}	p_{h4}
Volume of hydrogen	V_{h1}	V_{h2}	V_{h3}	V_{h4}
Pressure of air	100 Hgcm	60 Hgcm	p_{a34}	p_{a34}
Volume of air	V_{a1}	V_{a23}	V_{a23}	V_{a4}
Temperature of both	273 K	273 K	T_3	T_4

We apply Boyle's law for the hydrogen between stages 1—2:

$$(L - 70)(100 - 70) = (L - 40)(60 - 40).$$

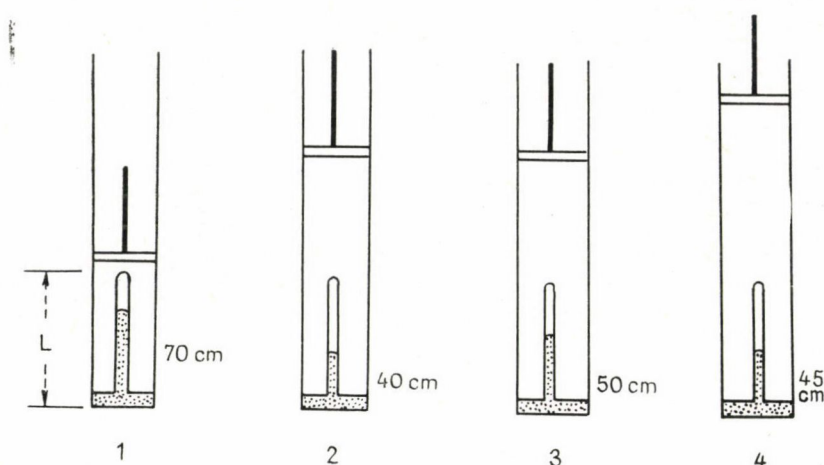


Figure 20

From the equation we obtain the length of the tube: $L = 130$ cm, hence the volumes of hydrogen:

$$V_{h1} = 60 \text{ cm}, \quad V_{h2} = 90 \text{ cm}, \quad V_{h3} = 80 \text{ cm}, \quad V_{h4} = 85 \text{ cm}.$$

Between stages 3—4 we had to move the piston upwards that the pressure of the air should remain constant.

The equation of state for the hydrogen between stages 2 and 3:

$$\frac{20 \cdot 9}{273} = \frac{(P_{a34} - 50) \cdot 80}{T_3}.$$

The equation of state for hydrogen between stages 3 and 4:

$$\frac{(p_{a34} - 50) \cdot 80}{T_3} = \frac{(p_{a34} - 45) \cdot 85}{T_4}.$$

Gay-Lussac's law for the air between stages 2 and 4:

$$\frac{p_{a34}}{T_3} = \frac{60}{273}.$$

As solutions of the system of equations we obtain:

$$p_{a34} = 80 \text{ Hgcm}, \quad T_3 = 364 \text{ K}, \quad T_4 = 451 \text{ K}.$$

Hence the values for the pressure of the hydrogen:

$$p_{h3} = 30 \text{ Hgcm}, \quad p_{h4} = 35 \text{ Hgcm},$$

computing the ratio of the volumes of hydrogen:

$$V_{a1} : V_{a2} : V_{a4} = 6 : 10 : 12,4.$$

Problem 3. Four equal resistors R , four capacitors $1\ \mu\text{F}$ each and four batteries are connected on the edges of a cube as seen in Fig. 21. The voltages of the batteries are: $U_1=4$ volt, $U_2=8$ volt, $U_3=12$ volt and $U_4=16$ volt. Their internal resistances are negligible. a) Find the voltages and charges of each capacitor. b) Find the charge on capacitor C_2 if points H and B are short circuited.

Solution. Unfold the network in the plane (Fig. 22). No charges flow through the capacitors, therefore there is current only in the wires drawn with thick lines in the Fig.

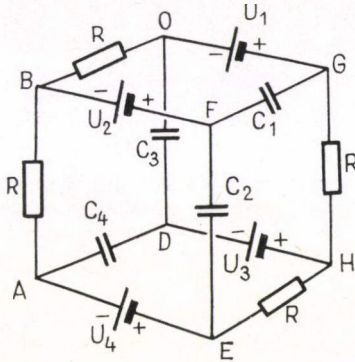


Figure 21

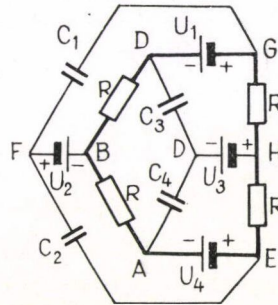


Figure 22

In this circuit the voltage is 12 volt, the resistance $4R$. Thus the current:

$$I = \frac{U_4 - U_1}{4R}.$$

The voltages across the resistances and the sources are known. We can easily compute the potentials in each point, taking the potential zero in point A.

A	0 volt
B	$(U_4 - U_1)/4$ 3 volt
O	$(U_4 - U_1)/2$ 6 volt
G	$(U_4 - U_1)/2 + U_1$ 10 volt
H	$(U_4 - U_1)/2 + U_1 + (U_4 - U_1)/4$ 13 volt
E	$(U_4 - U_1)/2 + U_1 + (U_4 - U_1)/2$ 16 volt
D	$(U_4 - U_1)/2 + U_1 + (U_4 - U_1)/4 - U_3$ 1 volt
F	$(U_4 - U_1)/4 - U_3 + U_2$ 11 volt

From the potential differences across each capacitor we can calculate the charges:

- C_1 (11 - 10) volt = 1 volt, $1 \cdot 10^{-6}$ coulomb,
 C_2 (16 - 11) volt = 5 volt, $5 \cdot 10^{-6}$ coulomb,
 C_3 (6 - 1) volt = 5 volt, $5 \cdot 10^{-6}$ coulomb,
 C_4 (1 - 0) volt = 1 volt, $1 \cdot 10^{-6}$ coulomb.

We can calculate the energy in the capacitors: $CU^2/2$. For the capacitors C_1 and C_4 we get $0.5 \cdot 10^{-6}$ joule, for C_2 and C_3 $12.5 \cdot 10^{-6}$ joule. The sum is $26 \cdot 10^{-6}$ joule.

b) Joining points H and B we have two separate circuits. In the lower one (see Fig.) the current is $U_4/2R$ and the potential of point E relative to A is $U_4=16$ volt, the potential of HB is $U_4/2=8$ volt. At point F we have $U_4/2+U_2=16$ volt. Thus the potential on both plates of capacitor C_2 is 16 volt, consequently there is no charge on C_2 .

Problem 4. A spherical glass aquarium of radius R is placed in front of a plane vertical mirror. The walls of the aquarium are thin, its centre is in a distance of $3R$ from the mirror, it is filled with water. A far off observer is looking at the aquarium in line with the centre, perpendicular to the mirror. A small fish is swimming with velocity v along the wall of the aquarium at the nearest point to the mirror. Find the relative velocities of the images of the fish seen by the observer. The index of refraction of water $n=4/3$. (See Fig. 23/a and 23/b).

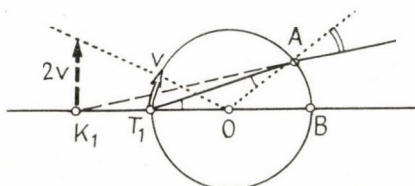


Figure 23/a

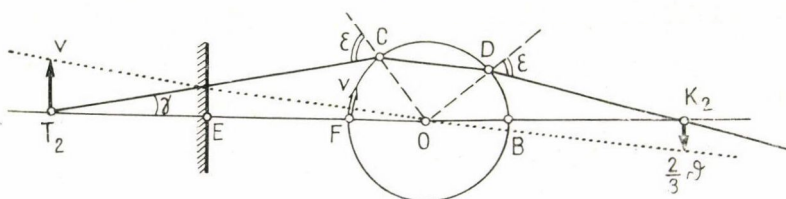


Figure 23/b

Solution. The fish covers a distance v in one second. We have to find two different images of this distance as object. In our calculations we consider only paraxial rays and small angles. We may approximate the sine of an angle by the angle itself.

From the fish, swimming at point P_1 , only one refracting surface forms an image. At A the angle of refraction of the ray, coming from T_1 at an angle $\gamma = \angle AT_1O$ is γ in water and $n\gamma$ in the air. Producing backwards the emerging ray gives the position of the virtual image in K_1 . Obviously

$$K_1AT_1 = n\gamma - \gamma = (n-1)\gamma.$$

From triangle K_1T_1A

$$\frac{K_1T_1}{K_1A} = \frac{(n-1)\gamma}{\gamma} = n-1.$$

Using conventional approximations:

$$K_1 A = K_1 O + R \quad \text{and} \quad K_1 T_1 = K_1 O - R.$$

Thus

$$\frac{K_1 O - R}{K_1 O + R} = n - 1.$$

Hence the distance of the virtual image from the centre:

$$K_1 O = \frac{n}{2-n} \cdot R.$$

For water $n=4/3$ and $K_1 O=2R$. If the index of refraction is more than 2 the image is real. The magnification is given by the quotient of the distances of image and object:

$$\frac{K_1 O}{T_1 O} = \frac{n}{2-n}.$$

For water we obtain a magnification by 2.

The plane mirror at F forms from the object at $2R$ distance, that is from the line segment corresponding to the velocity v , a virtual image of the same size as the object in distance $2R$ in T_2 , behind the mirror. The distance of T_2 from the centre of the sphere is $5R$. In the general case let us assume $T_2 O = kR$. The virtual image in T_2 will be the (virtual) object we observe through the sphere used as a lens. We do not need to consider the plane mirror any more but determine the real image of T_2 .

We want to find ε , the angle of incidence at C of the ray coming at angle $\gamma = \angle CT_2 F$ from T_2 . From triangle $T_2 OC$

$$\frac{\varepsilon}{\gamma} = \frac{T_2 O}{CO} = \frac{kR}{R} = k, \quad \varepsilon = k\gamma.$$

The angle of refraction in glass:

$$\frac{\varepsilon}{n} = \frac{k\gamma}{n} = \angle DCO = \angle CDO.$$

We have to compute the angle $\angle DOG$. We have

$$\angle COF = \varepsilon - \gamma = k\gamma - \gamma = \gamma(k-1).$$

Adding $\angle COD$ to the sum of the angles at C and D or the sum of the angles $\angle COF$ and $\angle DOG$, 180° is obtained in both cases. Thus

$$\angle DOG + \gamma(k-1) = 2 \cdot \frac{k\gamma}{n}.$$

Hence

$$\angle DOG = \gamma(2k/n - k + 1).$$

From triangle DOK_2 :

$$\frac{OK_2}{DK_2} = \frac{\varepsilon}{\gamma(2k/n - k + 1)} = \frac{k\gamma}{2k/n - k + 1},$$

furthermore

$$\frac{OK_2}{OK_2 - R} = \frac{k}{2k/n - k + 1}.$$

Hence the distance of the image:

$$OK_2 = \frac{kn}{n(2k-1) - 2k} \cdot R.$$

If $k=5$ and $n=4/3$, we get

$$OK_2 = 10R/3.$$

The magnification:

$$\frac{OK_2}{OT_2} = \frac{n}{n(2k-1) - 2k}.$$

If $k=5$ and $n=4/3$, the magnification is $2/3$.

Summing up the results: if the fish advances with velocity v upwards, its virtual image travels with velocity $2v$ upward, its real image with velocity $2v/3$ downwards. The relative velocity of the images is $2v + 2v/3$, $8/3$ -times the original velocity.

We have still to solve the most important problem: we know how the images move in theory, but what does the observer see if he carries out the experiment?

On a scale in the water the readings for the velocities of the images of the fish agree with the real values of the velocities. Velocities of opposite direction are observed, one velocity is three times the other and the length of one image is also three times the length of the other. We have to look from a great distance, because we want to see an image far behind the sphere and another in front of the sphere clearly at the same time. The distance of the images is $8.33 R$. It is possible to see the real image visually if we look at it from a distance greater than the least distance of distinct vision. The problem speaks from a "far off observer" who observes the changes in the angles of rays coming from images in different distances. If the observer is far enough the ratio of the velocities seen increases approximately by $8/3$ despite the difference of distances. He must possess also some information about the real velocity (v) of the fish.

The general formula for the ratio of increases in the velocity:

$$\frac{2n}{2-n} \cdot \frac{(k-1)(n-1)}{2k(n-1) - n}.$$

The experiment can be easily performed with a cylindrical glass filled with water, a mirror and a stick. The stick, moved along the wall of the glass, represents the fish.

Experimental problem. Measure the useful power P of a given source as function of the current I . Determine the internal resistance R_b and the emf U_0 of the source. Plot the graphs of the useful and the total power and the efficiency η as functions of the external resistance R .

Solution. The terminal voltage is

$$U = U_0 R / (R + R_b).$$

The current

$$I = U_0 / (R + R_b) = U / R.$$

The total power

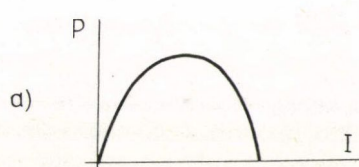
$$P_t = U_0 I.$$

The useful power

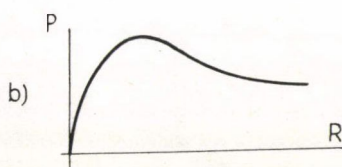
$$P = U \cdot I.$$

The efficiency

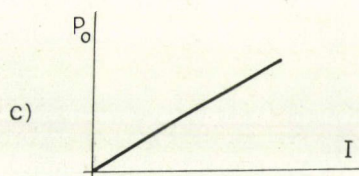
$$\eta = P / P_0.$$



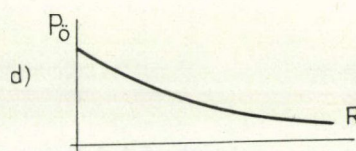
$$P = U_0 I - R_b I^2,$$



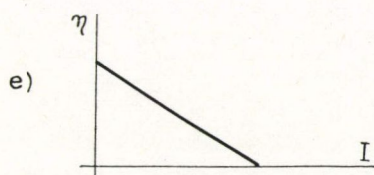
$$P = \frac{U_0^2 R}{(R_b + R)^2},$$



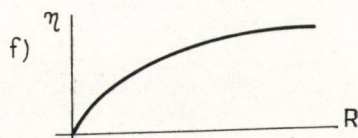
$$P_0 = U_0 I,$$



$$P_0 = \frac{U_0^2}{R_b + R}$$



$$\eta = 1 - \frac{R_b}{U_0} \cdot I$$



$$\eta = \frac{R}{R_b + R}$$

Figure 24

By using the above formulae we get the required six functions (Fig. 24/a—f).

$$P = U_0 I - R_b I^2, \quad P = \frac{U_0^2 R}{(R_b + R)^2},$$

$$P = U_0 I, \quad P_t = \frac{U_0^2}{R_b + R}$$

$$\eta = 1 - \frac{R_b}{U_0} \cdot I \quad \eta = \frac{R}{R_b + R}.$$

Measuring two suitably chosen values we obtain R_b and U_0 from the above formulae. It is not sure that the data are independent from the external load especially for great loads.

VI.

1972. Bucarest. Roumania

Problem 1. Given three cylinders of same length, outer radius and mass. The first cylinder (I.) is solid, the second (II.), a tube, hollow with walls of finite thickness, the third (III.) a tube with walls of same thickness, filled with a liquid of same density (both ends are closed by thin plates.) Find and compare the linear and angular accelerations of the cylinders if they are placed on an inclined plane of angle α . Investigate the cases of smooth rolling and roll-gliding. The coefficient of friction between the cylinders and the inclined plane is μ . Friction between the liquid and the wall of the cylinders is negligible.

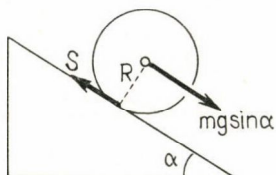


Figure 25

Solution. The forces acting on a cylinder are the component $mg \sin \alpha$ in its centre and the frictional force S in the point of contact (Fig. 25). The force causing the linear acceleration a : $ma = mg \sin \alpha - S$. If the rolling is smooth the angular acceleration

$$\beta = a/R.$$

The equation of motion for rotation:

$$RS = \frac{a}{R} \cdot \Theta.$$

The solution of the system of equations:

$$a = g \sin \alpha \cdot \frac{1}{1 + \Theta/mR^2},$$

$$S = mg \sin \alpha \cdot \frac{\Theta/mR^2}{1 + \Theta/mR^2}. \quad (1)$$

The limiting case of smooth rolling is reached when S attains the maximum possible value of $\mu mg \cos \alpha$:

$$\mu mg \cos \alpha_h = mg \sin \alpha_h \cdot \frac{\Theta/mR^2}{1 + \Theta/mR^2},$$

hence the condition for the limiting case:

$$\operatorname{tg} \alpha_h = \mu(1 + mR^2/\Theta). \quad (2)$$

Let us now investigate the case of smooth rolling for the three cylinders.

I. The moment of inertia of the solid cylinder $\Theta = mR^2/2$. From (1) and (2) respectively:

$$a = \frac{2}{3} \cdot g \sin \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha_h = 3\mu.$$

The angular acceleration: $\beta = a/R$.

II. Let us suppose that the density of the wall is n -times the density of cylinder I. We know that the masses of the cylinders are equal thus we have an equation from which the radius of the cavity can be computed:

$$\varrho \pi R^2 L = n \varrho \pi L (R^2 - r^2),$$

hence

$$r^2 = R^2 \cdot \frac{n-1}{n};$$

the moment of inertia:

$$\Theta = 0.5n\varrho\pi LR^2 \cdot R^2 - 0.5n\varrho\pi LR^2 = 0.5mR^2 \cdot \frac{2n-1}{n}.$$

From (1) and (2) respectively:

$$a = \frac{2n}{4n-1} \cdot g \sin \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha_h = \frac{4n-1}{2n-1} \cdot \mu.$$

The angular acceleration: $\beta = a/R$.

III. In case of the cylinder filled with a liquid the liquid does not rotate, there being no frictional force between liquid and cylinder. m is the total mass but the moment of inertia should be computed only for the wall of the cylinder:

$$\Theta = 0.5\varrho\pi LR^2 \cdot R^2 - 0.5\varrho\pi LR^2 = 0.5mR^2 \cdot \frac{2n-1}{n^2}.$$

From (1) and (2) respectively:

$$a = \frac{2n^2}{2n^2+2n-1} \cdot g \sin \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha_h = \frac{2n^2+2n-1}{2n-1} \cdot \mu.$$

The angular acceleration: $\beta = a/R$.

Let us compare the characteristics of the motion of the cylinders:

The ratio of the linear and angular accelerations:

$$1: \frac{3n}{4n-1} : \frac{3n^2}{2n^2+2n-1}.$$

The ratio of the tangents for the limiting cases:

$$1 : \frac{4n-1}{3(2n-2)} : \frac{2n^2+2n-1}{3(2n-1)}.$$

If the limiting angles are exceeded the cylinders glide rolling. The frictional force is in all cases $\mu mg \cdot \cos \alpha$, therefore the linear acceleration is the same:

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

The angular acceleration is given by $\beta = R \cdot \mu mg \cos \alpha / \Theta$, but Θ , the moment of inertia is different in each case. Therefore if the cylinders glide rolling for the angular accelerations we get:

$$\beta_I = \frac{2\mu \cos \alpha}{R},$$

$$\beta_{II} = \frac{2\mu \cos \alpha}{R} \cdot \frac{n}{2n-1},$$

$$\beta_{III} = \frac{2\mu \cos \alpha}{R} \cdot \frac{n^2}{2n-1}.$$

Problem 2. We have two cylinders (Fig. 26) of base 1 dm^2 . The left hand cylinder contains a gas of mass 4 gram, volume 22.4 liter , pressure 1 atm and 0°C temperature, the righthand one contains the same gas of mass 7.44 gram , volume 22.4 liter and 0°C temperature. The walls of the left hand cylinder are heat insulated, the right hand cylinder is kept on 0°C temperature by a great heat reservoir. The whole system is in vacuum. The pistons released come to rest in equilibrium after moving a distance of 5 dm . How much heat did the gas in the right hand cylinder take up? The specific heat of the gas at constant volume is 0.75 cal/gK .



Figure 26

Solution. Before releasing the rod the pressure of the gas on the right hand side is $7.44:4 = 1.86 \text{ atm}$. When equilibrium is reached the volume of the gas on the left hand side is $22.4 - 5 = 17.4 \text{ dm}^3$, on the right hand side $22.4 + 5 = 27.4 \text{ dm}^3$. The temperature of the left hand gas increases by an adiabatic process to T , its pressure to p . The pressure equals to the pressure of the right hand gas reached by an isothermal expansion characterized by the equation:

$$1.86 \cdot 22.4 = p \cdot 27.4,$$

hence

$$p = 1.521 \text{ atm}.$$

Using the law of adiabatic processes for the left hand gas:

$$1 \cdot 22.4^\gamma = 1.521 \cdot 17.4^\gamma.$$

Hence the quotient of the specific heats:

$$\left(\frac{22.4}{17.4}\right)^{\kappa} = 1,521,$$

$$1.2874^{\kappa} = 1.521, \quad \kappa = 1.66.$$

(It seems to be a one-atomic gas: helium.)

The temperature of the gas on the left hand side can be computed from the equation of state:

$$\frac{1 \cdot 22.4}{273} = \frac{1.521 \cdot 17.4}{T},$$

hence

$$T = 322.5 \text{ K} = 49.5^{\circ}\text{C}.$$

During the process the temperature of the gas on the right hand side does not change, it takes up $0.75 \cdot 4 \cdot 49.5 = 148.5$ cal heat, which appears as internal energy of the gas.

Problem 3. A lens of local distance f is cut into two parts perpendicular to its plane. The half lenses are moved apart by a small distance δ . How many interference fringes appear on a screen at distance H from the lens if we place a monochromatic point light source on the other side at $t > f$ distance?

Solution. The images produced by the two parts of the lens are coherent light sources thus interference can be accomplished. Let the distance of two point sources be d . The first reinforcement on the screen at h distance takes place if the path difference is equal to the wave length λ (Fig. 27):

$$d \sin \alpha = \lambda.$$

Since α is small with a good approximation $\sin \alpha = s/h$.
The distance between the reinforcements:

$$\frac{ds}{h} = \lambda, \quad s = \frac{\lambda h}{d}.$$

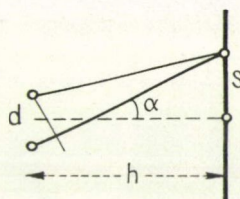


Figure 27

Let us compute the positions of the two image points.

We obtain a real image from a point source, at distance t in front of a lens of focal distance f (Fig. 28), at $k = tf/(t-f)$. If the width of the slit is δ the distance between the real images is obtained from the proportion:

$$d/\delta = (t+k)/t,$$

hence

$$d = \delta \cdot \frac{t+k}{t} = \frac{\delta t}{t-f}.$$

The images K_1 and K_2 are coherent sources. The interference of the light beams emitted by them can be observed on the screen. The distance of the fringes is $s = \lambda h/d$. We know d .

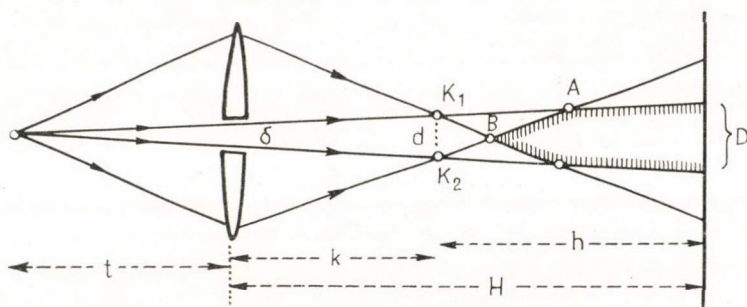


Figure 28

The distance of the screen :

$$h = H - k = [H(t-f) - tf] : (t-f).$$

In our experiment the distance of the interference fringes :

$$s = \frac{\lambda}{\delta t} \cdot [H(t-f) - tf].$$

Interference fringes appear where the light beams from K_1 and K_2 overlap. From similar angles the diameter of the overlapping part of the light beams :

$$D = \delta \cdot \frac{H+t}{t}.$$

We get the number of the fringes by dividing D by s :

$$N = \frac{D}{s} = \frac{\delta^2}{\lambda} \cdot \frac{H+t}{H(t-f) - tf}.$$

If $f=10$ cm, $t=20$ cm, $\delta=0.1$ cm, $\lambda=0.5$ μ m and $H=50$ cm, we get $N=46.6$.

A different calculation must be made for D in the case when the screen is nearer than point A. There is no interference inside point B.

Experimental problem. Given are two cylinders of equal size, form and material. One is solid, the other has a cylindrical hole inside, parallel to the axis of the cylinder. The ends of the latter are closed by thin plates. Determine the density of the material, the distance of the axes of cavity and cylinder.

Solution. The density of the solid cylinder can be determined from its mass and volume. We measure next the mass of the cylinder with the cavity, then from the difference of the masses we calculate the volume of the cavity and its diameter. There are several ways to find the distance of the axes. E.g. we place the cylinder on a horizontal plane and determine the position where the torque, bringing it back into equilibrium, is greatest. The axes are then in a horizontal plane and, knowing the dimensions of the cavity, we can calculate the distance of the axes. Another method consists of measuring the momentum of inertia for the generator nearest to or farthest from the cavity.

VII.
1974. Warsaw. Poland

Problem 1. A hydrogen atom in ground state collides with another hydrogen atom in ground state at rest. What is the least possible velocity for which the collision is inelastic? If the velocity is greater, emission of light takes place and light can be observed in the direction of the initial velocity and in the opposite direction. How much do the frequencies of these differ relative to the normal frequency? The mass of the hydrogen atom is $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, its ionisation energy $E = 13.6$ eV $= 2.18 \cdot 10^{-18}$ joule.

Solution. The energy of the hydrogen atom in ground state $E_1 = -E \cdot \frac{1}{1^2}$, in the first excited state $E_2 = -E \cdot \frac{1}{2^2}$. The smallest energy quantum absorbed by the hydrogen atom:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = E \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} \cdot E = 1.163 \cdot 10^{-18} \text{ joule.}$$

We have to find the smallest velocity for which the loss of energy in the collision is the above value. As the loss of energy in the collision is greatest if the collision is perfectly inelastic the velocity after the collision will be $v/2$. The difference of the initial and the final kinetic energies:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{2m(v/2)^2}{2} = \frac{mv^2}{4}.$$

This should be equal to the smallest energy quantum:

$$\Delta E = \frac{mv^2}{4},$$

hence

$$v = \sqrt{4 \cdot \Delta E / m} = 6.26 \cdot 10^4 \text{ m/s.}$$

The velocity of both atoms after inelastic collision:

$$\frac{v}{2} = 3.13 \cdot 10^4 \text{ m/s.}$$

The answer to the second question is in connection with the Doppler effect. For small velocities, relative to the velocity of light, the ratio of the relative velocities gives the relative change of frequencies with good approximation:

$$6.26 \cdot 10^4 : 3 \cdot 10^8 = 2.09 \cdot 10^{-4} = 2.09 \cdot 10^{-2} \text{‰}.$$

The frequency is smaller or greater in this ratio for one of the light rays.

Problem 2. Given a parallel plate of thickness d , its index of refraction varies as

$$n = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{r}}.$$

A light beam enters from air, perpendicular to the plate, at point 0 and emerges at point A at an angle α . (Fig. 29). Find the index of refraction n_A at point A. Determine the position of point A and the thickness of the plate. ($n_0 = 1.2$, $r = 13$ cm and $\alpha = 30^\circ$.)

Solution. Let us consider first the path of the light (Fig. 30). For the transmission of light through parallel plates of different indices of refraction we can use Snell's law

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_3} = \frac{n_3}{n_2}, \quad \dots,$$

in simpler form

$$n_1 \sin \beta_1 = n_2 \sin \beta_2, \quad n_2 \sin \beta_2 = n_3 \sin \beta_3, \quad \dots$$

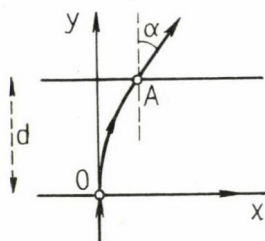


Figure 29

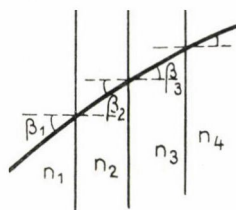


Figure 30

This formula is valid for arbitrarily thin layers therefore in our case, when the refractive index changes along the x axis only: $n_x \sin \beta_x = \text{const}$. In our case a perpendicular beam enters at a point where the refractive index is n_0 , this $n_x = n_0$, $\beta_x = 90^\circ$, n_0 is constant and at any point in the plate:

$$n_x \sin \beta_x = n_0.$$

We know the connexion between n_x and x , therefore along the light beam in the plate:

$$\sin \beta_x = \frac{n_0}{n_x} = 1 - \frac{x}{r} = \frac{r-x}{r}.$$

Figure 31 shows that the path of the light beam is a circle of radius $XC = r$ and we have $(OC - x)/XC = \sin \beta_x$ as requested.

Now we know the path of the light, and thus we are able to find the answer to the questions. In point A, according to the law of refraction, when the light emerges

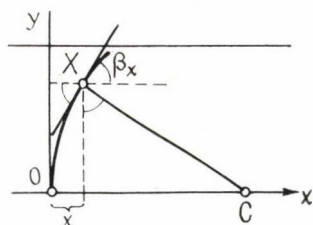


Figure 31

$$n_A = \frac{\sin \alpha}{\sin (90^\circ - \beta_A)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta_A}.$$

From $n_A \sin \beta_A = n_0$ we have $\sin \beta_A = n_0/n_A$,

$$\cos \beta_A = \sqrt{1 - (n_0/n_A)^2},$$

thus

$$n_A = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - (n_0/n_A)^2}}.$$

Hence

$$n_A = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha};$$

in our case

$$n_A = 1.3.$$

For the x coordinate of point A from $1.3 = 1.2/(1 - x/13)$ we get $x = 1$ cm.

The equation of the path of the light is

$$y^2 + (r - x)^2 = r^2.$$

Substituting $x = 1$ we get the thickness of the plate $y = d = 5$ cm.

Problem 3. A scientific expedition is shipwrecked on an uninhabited island. They possess no source of energy but find a source of chemically indifferent gas. The gas is heavier than air its pressure and temperature are the same as those of the surrounding atmosphere. The expedition has two membranes, one of them is permeable for the gas the other for air only. Make plans for the construction of an engine performing work.

Solution. Two important laws should be applied. If a mixture of gases is present in a vessel, the partial pressure of each is the pressure which it would exert if it occupied the same volume at the same temperature alone. In case of a mixture of gases the manometer reads the sum of the partial pressures. If a membrane is permeable for a certain gas, the partial pressure of the gas is equal on both sides of the membrane. In our engine (see Fig. 32) the membrane, permeable for the gas, is in the tube connecting the source with the cylinder under the piston. The membrane, permeable for air, is at the bottom of the cylinder. The same pressure of 1 atm prevails always under the piston thus the air does not matter as regards the work done. First we open valve 1 in the tube leading to the membrane permeable for the gas. The partial pressure of the gas will be equal on both sides thus under the piston too. As a consequence the total pressure in the cylinder will be 2 atm and the piston rises doing work. By closing valve 1 we can stop the upwards motion of the piston and by opening valve 2 the piston comes back into the initial position without doing work.

If the cylinder is a good heat conductor and the process is slow enough, the process is isothermal, the work done equals

$$RT \ln V_2/V_1.$$

We need not care about the efficiency, the process being not cyclic.

Having two membranes the same process has been realized as with a source of gas surrounded by vacuum.

Experimental problem. Two diodes (semiconductors) of the same kind and an ohmic resistor, connected in some unknown way, are closed in a box. Measure the ohmic resistance of the resistor without opening the box.

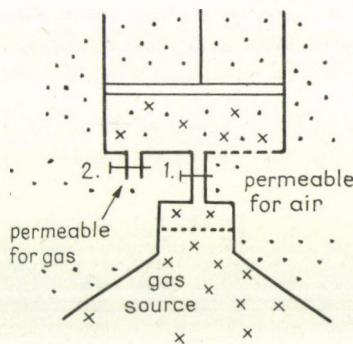


Figure 32

Solution. Measuring the current with two different voltages in both directions we get the following results: currents can be observed in both direction but they are not the same and are not linear functions of the voltage. The network is easily constructed from these results as shown in Fig. 33.

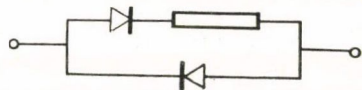


Figure 33

Next the voltage-current diagrams are plotted in both directions. Finding the voltages when the current is the same in both directions the difference of the voltages gives the voltage across the resistor. Divided by the current it gives the ohmic resistance.

VIII.

1975. Güstrow. German Democratic Republic

Problem 1. A rod revolves with a constant angular velocity ω about a vertical axis. The rod includes an angle $(90^\circ - \alpha)$ with the axis. A particle of mass m can glide along the rod, the coefficient of friction is μ . Find condition for the particle to remain at the same height during rotation. (See Fig. 34.)

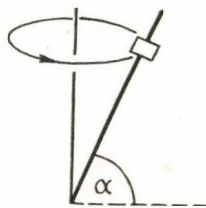


Figure 34

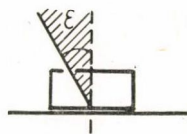


Figure 35

Solution. We shall find it useful to use a concept called "angle of sliding friction". We call ε the "angle of sliding friction" if its tangent is equal to the coefficient of sliding friction (Fig. 35):

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \mu.$$

We have to find the resultant of the forces pressing a body to a plane. If this is inside the angle of sliding friction, included with the normal of the plane, the frictional force is strong enough to prevent motion. The limiting case is when the resultant force coincides with the arm of the angle of friction.

In our case, when we are looking for the limiting case of upward gliding of the particle on the revolving rod, the resultant must lie inside the arms of angle $(\alpha + \varepsilon)$ (Fig. 36). The resultant of the weight mg and the force $m\omega^2 r = m\omega^2 L \cos \alpha$ presses the particle to the rod. The tangent of angle $\alpha + \varepsilon$ in the limiting case of gliding upwards:

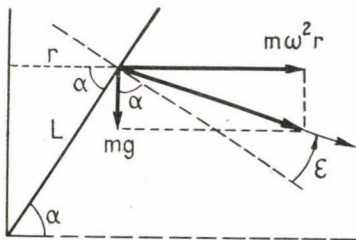


Figure 36

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) = \frac{m\omega^2 L \cos \alpha}{mg} = \frac{\omega^2 L \cos \alpha}{g}.$$

The limiting case for downward sliding is gained

using the tangent of $\alpha - \varepsilon$ in a similar way. Thus the particle is in equilibrium on the revolving rod if:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon) \cong \frac{\omega^2 L \cos \alpha}{g} \cong \operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon).$$

It follows from the boundary conditions that there exists a higher (L_f) and a lower (L_a) position. The particle is in stable equilibrium in any position between these two. Outside the boundaries the equilibrium is instable: the particle slides up or down. For the indifferent position $L_f - L_a$ it follows from the boundary conditions:

$$L_f - L_a = \frac{2g \operatorname{tg} \varepsilon}{\omega^2 \cos^3 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varepsilon)}.$$

Fig. 37 shows for different angles α those parts of the rod where the particle is in stable equilibrium ($\omega = 10 \text{ s}^{-1}$, $\mu = 0.268$, $\varepsilon = 15^\circ$). The dotted curve illustrates the case without friction when the position is unstable.

Problem 2. Find condition for a thick lens such that the focal length should be the same for two different wave lengths. Discuss the practicable cases taking in account lenses of various types.

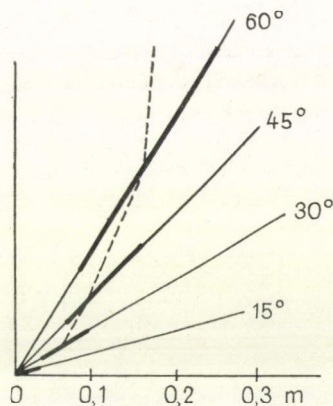


Figure 37

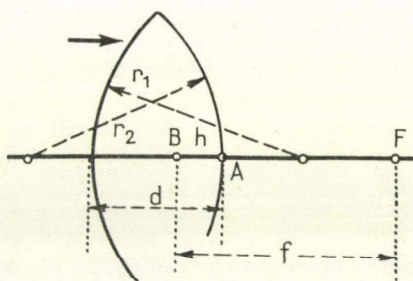


Figure 38

Solution. We have to know the properties of thick lenses. A thick lens is characterized by the following data: the radii of the spherical surfaces r_1 and r_2 , its thickness D and refractive index n (Fig. 38). For the focal length $f = BF$ we have

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - d \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{r_1 r_2} \right].$$

The focal length is measured from the principal point B. The distance of B from the surface:

$$BA = h = \frac{dr_2}{n(r_1 + r_2) - d(n-1)}.$$

The above formulae hold for thick lenses whatever is their thickness but give good results only for paraxial rays as they were gained by certain approximations.

Light is dispersed by the lens, the refracting index for wave length λ_a is n_a , for λ_b it is n_b .

Arranging the formula of the focal length according to powers of n :

$$f(r_1 + r_2 - d)n^2 + [2fd - f(r_1 + r_2) - r_1 r_2]n - fd = 0.$$

This is an equation of second degree. For a given f there ought to be two values of n and thus our problem can be solved.

Substituting first n_a then n_b and equating

$$(n_a - 1) \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - d \cdot \frac{n_a - 1}{n_a r_1 r_2} \right] = (n_b - 1) \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - d \cdot \frac{n_b - 1}{n_b r_1 r_2} \right].$$

As a result of the equation we get:

$$r_1 + r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_a n_b} \right).$$

If the values of the radii r_1 , r_2 and the thickness satisfy this condition the focal length will be the same for two wavelengths i.e. for two indices of refraction. It is interesting to see that the dispersion $n_b - n_a$ does not play any role, only the product of the refractive indices. The indices are greater than 1, thus the bracket is less than 1 and the sum of the radii is less than the thickness. This means that the lens will be rather thick.

The first result of the discussion: the lens can not be plano-convex or plano-concave because these have infinite radii. A diverging lens is permitted if either r_1 or r_2 is negative, but double-convex not.

Practical realization would be possible if not f but $f - h$ were the same for two indices which means a much more complicated problem.

Problem 3. Ions of same mass m and same velocity v spread from point P in different directions (Fig. 39). A uniform magnetic field B , perpendicular to the plane of the paper should focus them in point R at distance $PR = 2a$. Their trajectories have to be symmetrical to the axis. Determine the boundaries of the magnetic field.

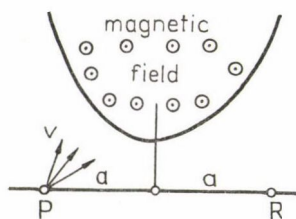


Figure 39

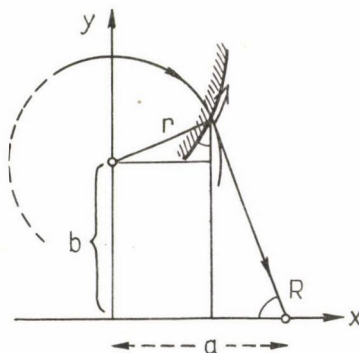


Figure 40

Solution. The Lorentz force acting on a particle of charge Q , velocity v in a magnetic field B is QvB . As a consequence the particle moves in a circular path of radius r , thus

$$QvB = \frac{mv^2}{r}.$$

All particles of mass m travel on the same circular path of radius $r = vm/QB$. Leaving the magnetic field they fly in a straight line along the last tangent. A boundary line should be found such that all ions strike the same point R . The mathematical problem to be solved consists of finding where all circles of radius r should be left in such a way that their tangents meet in point R . The centres of the circles of radius r lie on the axis y (see Fig. 40).

The ions moving in a circular path of radius r , leave the magnetic field at point A of coordinates x and y and travel along the tangents to R . From similar triangles:

$$\frac{y-b}{x} = \frac{a-x}{y}.$$

The equation of the circle:

$$x^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Eliminating y and $y-b$ respectively we obtain the focus of points A satisfying the condition, therefore the function representing the boundaries of the magnetic field:

$$y = \frac{x(a-x)}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

This is a function of the fourth degree. It is enough to draw the curve only in the first quadrant and reflect it through the y axis.

The form of the function representing the boundaries of the magnetic field depends on the relative magnitude of the distance a and the radius r in the case given. (See Fig. 41 a, b, c.)

If radius r is less than a (small velocity strong field) the boundaries of the field extend to infinite. Ions starting in any direction can be focused.

If radius r is equal to a all ions can be used too. The boundaries are in the finite starting perpendicularly from P and R .

If radius r is greater than a the boundaries are even more flat. The ions, starting at an angle steeper than the tangent at P , do not arrive in R .

Experimental problem. The characteristic curve of a semiconductor with two contacts should be determined. Maximum load permitted is 0.25 watt. Two instruments of known internal resistances for all ranges, a 9 volt battery adjustable and fixed resistors are at disposal. Taking in account the voltage measured across the ammeter and the current across the voltmeter the characteristic curve shows that the semiconductor is a Zener diode.

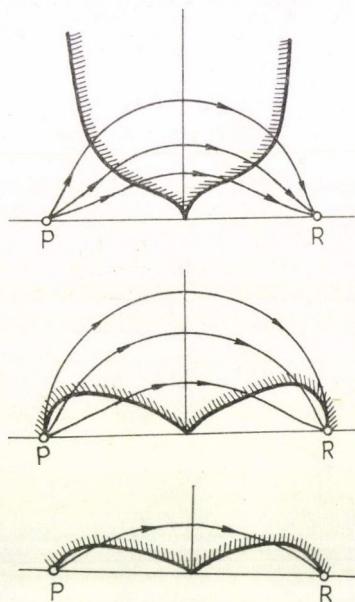


Figure 41

IX.

1976. Budapest. Hungary

Problem 1. A hollow sphere of radius $R=0.5$ m revolves about its vertical diameter with an angular velocity $\omega=5$ s⁻¹. Inside the sphere at the height $R/2$ a small block revolves together with the sphere. ($g=10$ m/s².)

- At least what should be the coefficient of friction to realize this condition?
- Find condition also for the case when $\omega=8$ s⁻¹.
- Investigate the problem of stability in both cases,
 - for a small variation of the position of the block,
 - for a small variation of the angular velocity of the sphere.

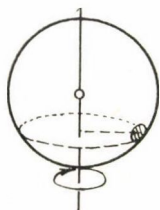


Figure 42

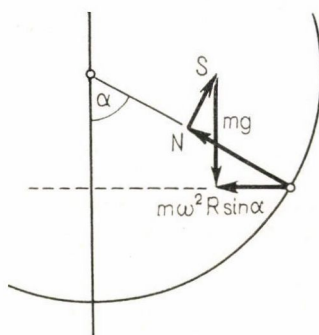


Figure 43

Solution. The block moves in a horizontal circle of radius $R \sin \alpha$. In a stable state no tangential force is necessary for this motion (Fig. 43). In a vertical section the vector sum of the normal force exerted by the wall N , the frictional force S and the weight mg equals the resultant S and the weight mg equals the resultant

$$m\omega^2 R \sin \alpha.$$

Its components are

$$m\omega^2 R \sin \alpha = N \sin \alpha - S \cos \alpha,$$

$$mg = N \cos \alpha + S \sin \alpha.$$

The solution of the system of equations:

$$S = mg \sin \alpha (1 - \omega^2 R \cos \alpha / g),$$

$$N = mg (\cos \alpha + \omega^2 R \sin^2 \alpha / g).$$

The block does not slip down if

$$\mu_a \geq S/N.$$

$$\text{a) } \mu_a \geq \sin \alpha \cdot \frac{1 - \omega^2 R \cos \alpha / g}{\cos \alpha + \omega^2 R \sin^2 \alpha / g} = \frac{3\sqrt{3}}{23} = 0.2259.$$

In this case there must be sufficient friction to prevent slipping, i.e. sliding down.

b) If on the other hand $\omega^2 R \cos \alpha / g > 1$ sufficient friction is necessary to prevent the block to slip upwards. $m\omega^2 R \sin \alpha$ must be equal to the resultant of forces S , N and mg . Condition for the coefficient of friction is again (Fig. 44):

$$\mu_b = S/N,$$

$$\mu_b \equiv \sin \alpha \cdot \frac{\omega^2 R \cos \alpha / g - 1}{\cos \alpha + \omega^2 R \sin^2 \alpha / g} = \frac{3\sqrt{3}}{29} = 1.1792.$$

c) We have to investigate μ_a and μ_b as functions of α and ω in the cases a) and b) (see Fig. 45/a and 45/b):

In case a): if the block slips upwards, it comes back; if it slips down it does not return. If ω increases, the block remains in equilibrium, if ω decreases it slips downwards.

In case b): if the block slips upwards it stays

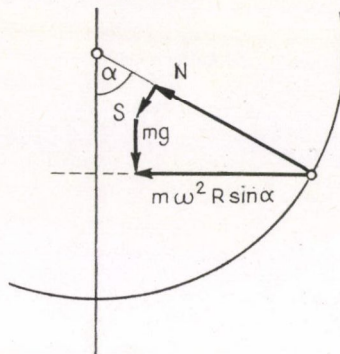


Figure 44

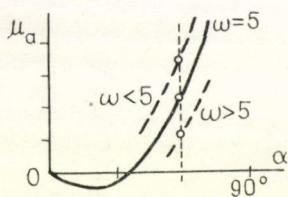


Figure 45/a

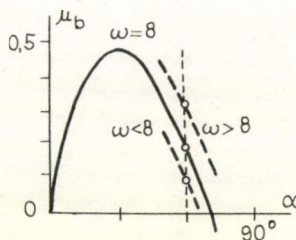


Figure 45/b

there; if the block slips downwards it returns. If ω increases the block climbs upwards; if ω decreases the block remains in equilibrium.

Problem 2. The walls of a cylinder of base 1 dm^2 , (Fig. 46), the piston and the inner dividing wall are perfect heat insulators. The valve in the dividing wall opens if the pressure on the right hand side is greater than on the left hand side. Initially there is 12 gram helium in the left side and 2 gram helium in the right side. The length of both sides is 11.2 dm and the temperature 0°C . Outside we have a pressure of 10 newton/cm 2 = 100 kPa = 1 atm. The specific heat at constant volume $C_v = 0.75 \text{ cal/gK} = 3.15 \text{ joule/gK}$, at constant pressure $C_p = 1.25 \text{ cal/gK} = 5.25 \text{ joule/gK}$. We push the piston slowly towards the dividing wall. When the valve opens we stop then continue pushing slowly until the wall is reached. Find the total work done.

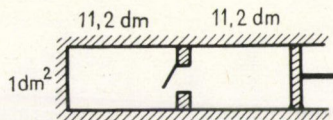


Figure 46

Solution. The volume of 4 g helium at 0° temperature and a pressure of 1 atm is 22.4 liter (mo-

lar volume). It follows that initially the pressure on the left hand side is 60 newton/cm², on the right hand side 10 newton/cm². Therefore the valve is closed.

The law for adiabatic processes tells us when the pressure in the right hand side reaches 6 atm. $\kappa=5/3$.

$$10 \cdot 11.2^{5/3} = 60V^{5/3},$$

hence the volume on the right hand side when the valve opens:

$$V = 3.38 \text{ dm}^3.$$

It follows from the equation of state that at this time the temperature on the right hand side

$$T_1 = 559.0 \text{ K}.$$

During this phase the whole work performed increases the internal energy of the gas:

$$W = 3.15 \cdot 2 \cdot (559.0 - 273) = 1802 \text{ joule} = 429 \text{ cal}.$$

Next the valve opens, the piston is arrested. The temperature after the mixing has been completed:

$$T_2 = \frac{12 \cdot 273 + 2 \cdot 559}{14} = 313.9 \text{ K}.$$

During this phase there is no change in the energy, no work done.

An adiabatic compression follows from $11.2 + 3.82 = 15.02 \text{ dm}^3$ to $11.2 \text{ dm}^3/k = TV^{\kappa-1}$:

$$313.9 \cdot 15.02^{2/3} = T_3 \cdot 11.2^{2/3},$$

hence

$$T_3 = 381.7 \text{ K}.$$

The whole work done increases the energy of the gas:

$$W = 3.15 \cdot 14 \cdot (381.7 - 313.9) = 2990 \text{ joule} = 713 \text{ cal}.$$

The total work done:

$$1802 + 2990 = 4792 \text{ joule} = 1142 \text{ cal}.$$

The work done by the outside atmospheric pressure should be subtracted:

$$100 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ newton/cm}^2 \cdot 1.12 \text{ m} = 1120 \text{ joule} = 270 \text{ cal}.$$

The final result:

$$4792 - 1120 = 3672 \text{ joule},$$

or

$$1142 - 270 = 872 \text{ cal}.$$

Problem 3. Somewhere in a glass sphere there is an airbubble. Describe methods to determine the diameter of the bubble without damaging the sphere.

Solution. We can not rely on any value about the density of the glass. It is quite uncertain. The index of refraction can be determined using a light beam which does

not touch the bubble. Another method consists of immersing the sphere into a liquid of same refraction index: its surface becomes invisible.

A great number of methods can be found.

We can start by determining the axis, the line which joins the centres of the sphere and the bubble. The easiest way is to use the "tumbler effect". If the sphere is placed on a horizontal plane the axis takes up a vertical position. The image of the bubble, seen from both directions along the axis, is a circle.

If the sphere is immersed in a liquid of same index of refraction the spherical bubble is practically inside a parallel plate (Fig. 47). Its boundaries can be determined either by a micrometer or using parallel light beams.

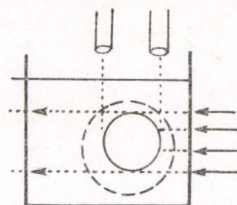


Figure 47

Along the axis we have a lens system consisting of two thick negative lenses. By several measurements and complicated calculations the diameter of the bubble can be determined.

If the index of refraction of the glass is known we can fit a plano-concave lens of same index of refraction to the sphere at the end of the axis (Fig. 48). ABCD being a parallel plate the diameter of the bubble can be measured using parallel light beams.

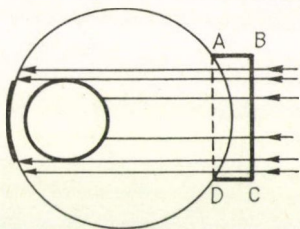


Figure 48

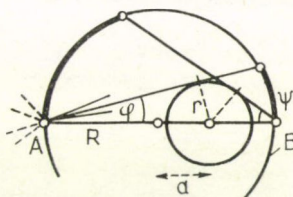


Figure 49

other side and illuminate a cap. Measuring the spherical cap we get angle φ . Angle ψ can be obtained in a similar way at point B. From

$$\sin \varphi = \frac{r}{R+a} \quad \text{and} \quad \sin \psi = \frac{r}{R-a}$$

we have

$$r = 2R \cdot \frac{\sin \psi \sin \varphi}{\sin \psi + \sin \varphi}, \quad a = R \cdot \frac{\sin \psi - \sin \varphi}{\sin \psi + \sin \varphi}.$$

The diameter of the bubble can be determined also by the help of X rays. X rays are not refracted by glass. They will cast shadows indicating the structure of the body, in our case the position and diameter of the bubble.

We can also determine the moment of inertia with respect to the axis and thus the diameter of the bubble.

Experimental problem. Given a liquid of known specific heat and a (non soluble) crystalline substance in it. A thermometer and a test tube with electrical heating are at disposal. The thermal properties of the crystalline substance are to be determined.

Solution. Heating first the liquid then the liquid and the crystalline substance together we plot two time-temperature graphs from which specific heat, melting point and heat of fusion can be easily obtained.

X.

1977. Hradec Králové. Czechoslovakia

Problem 1. The compression ratio of a four-stroke internal combustion engine $\epsilon = 9.5$. The engine draws in air and gaseous fuel of 27°C temperature, V_0 volume at

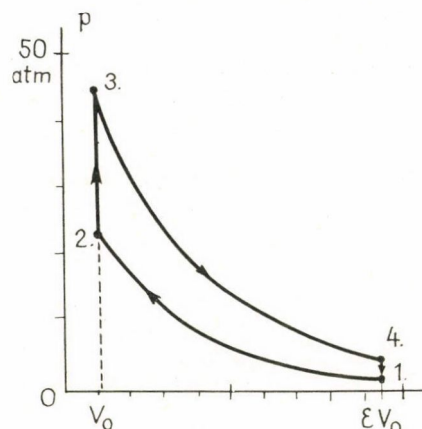


Figure 50

1 atm = 100 kPa pressure. Compression follows, an adiabatic process from point 1 to point 2, seen in Fig. 50. The mixture is exploded (2—3), the pressure is doubled. The piston is pushed outwards (3—4), the gas expands adiabatically to a volume of $9.5 V_0$. The exhausting valve opens and the pressure gets back to the initial pressure of 1 atm.

(The compression ratio is the ratio of the greatest and smallest volume of the cylinder. κ is the quotient of the specific heats.)

a) Determine the pressure and the temperature in states 1, 2, 3, and 4.

b) Find the thermal efficiency of the cycle.

Solution. For the adiabatic process

$$pV^\kappa = \text{const.}$$

To obtain a relation for the temperature we write the equation of state as:

$$pV = RT,$$

therefore

$$TV^{\kappa-1} = \text{const.}$$

a) In state 1 $p_1 = 1 \text{ atm}$, $T_1 = 300 \text{ K}$.

For state 2 using the law of adiabatic processes

$$T_2 \left(\frac{V_0}{\epsilon} \right)^{\kappa-1} = T_1 V_0^{\kappa-1}$$

hence

$$T_2 = 300 \cdot 2 \cdot 461 = 738.3 \text{ K.}$$

The pressure

$$p_2 = 9.5 \cdot 738.3 : 300 = 23.38 \text{ atm.}$$

In state 3:

$$p_3 = 2p_2 = 46.76 \text{ atm} \quad \text{and} \quad T_3 = 2T_2 = 1476.6 \text{ K.}$$

For state 4 we have to calculate with an adiabatic process. From

$$T_4(\varepsilon V_0)^{\kappa-1} = T_3 V_0^{\kappa-1},$$

$$T_4 = 1476.6 \cdot 0.4064 = 600 \text{ K}$$

and the pressure:

$$p_4 = 2 \text{ atm.}$$

b) The denominator of the quotient in the formula of thermal efficiency is the heat taken up during steps 2—3, the heat obtained by burning fuel during this step. The heat taken up is equal to the increase of the internal energy of the gas (the volume being constant and no work done):

$$C_V m (T_3 - T_2).$$

The useful energy converted to work is the difference of heat taken up in steps 2—3 and given back in steps 4—1;

$$C_V m (T_3 - T_2) - C_V m (T_4 - T_1) = C_V m (T_1 + T_3 - T_2 - T_4).$$

The efficiency

$$\eta = \frac{C_V m (T_1 + T_3 - T_2 - T_4)}{C_V m (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{T_4/T_1 - 1}{T_3/T_2 - 1}.$$

The relations for the adiabatic processes:

$$T_4 V_1^{\kappa-1} = T_3 V_3^{\kappa-1} \quad \text{and} \quad T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}.$$

Dividing the first equation by the second we obtain

$$\frac{T_4}{T_1} \left(\frac{V_4}{V_1} \right)^{\kappa-1} = \frac{T_3}{T_2} \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^{\kappa-1}.$$

We have $V_4 = V_1$ and $V_3 = V_2$, thus

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}.$$

The thermal efficiency:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

From former relations

$$T_1/T_2 = (V_2/V_1)^{\kappa-1} = (1/\varepsilon)^{\kappa-1} = \varepsilon^{1-\kappa}.$$

Hence the efficiency of the four-stroke engine:

$$\eta = 1 - \varepsilon^{1-\kappa}.$$

The efficiency depends only upon the compression ratio. We can get the answer to question (b) without doing the calculations for question (a). Using the given data $\eta = 0.5934 = 59.34\%$.

The actual efficiency is a little more than half of the above. Much heat is lost without taking part in the cycle.

Problem 2. White light falls on a soap film at an angle $\alpha = 30^\circ$. The reflected light displays a predominantly bright green colour of wavelength $\lambda_0 = 0.5 \mu\text{m}$.

a) What is the minimum thickness of the film?

b) What colour has the film seen from perpendicular direction.

The index of refraction of the liquid $n = 1.33$. (See Fig. 51.)

Solution.

a) The beam of light incident at point A is partly reflected, another part is refracted and reaches point B. Here some part of it is reflected again and emerges at point C after having been refracted. A part of ray DC is also reflected at C and both rays are observed simultaneously by the far off observer.

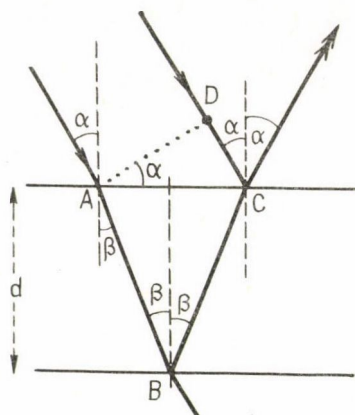


Figure 51

At plane AD the whole beam arrives in the same phase. We have to calculate the phase difference between the ray coming directly from the first surface and the ray coming from the second surface. It depends on the difference of path, i.e. the thickness of the film, whether reinforcement or destructive interference takes place and rays of what wavelength, contained in the white light, will be present in the light observed.

The path A to C of the ray reflected from the second surface:

$$AB + BC = \frac{2d}{\cos \beta}.$$

The wavelength in the medium is λ_0/n , thus the number of waves on distance $AB + BC$ is given by

$$\frac{2d}{\cos \beta} : \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2dn}{\lambda_0 \cos \beta}.$$

The path D to C of the ray reflected by the first surface:

$$DC = AC \sin \alpha = 2d \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \alpha = 2d \sin \alpha / \cos \beta.$$

The number of waves of wave length λ_0 on this distance is:

$$2d \operatorname{tg} \beta \sin \alpha / \lambda_0.$$

As known, when reflected from a medium of greater index of refraction, light undergoes a phase change of 180° , thus the number of waves on distance DC is:

$$\frac{2d \sin \beta \sin \alpha}{\lambda_0 \cos \beta} + \frac{1}{2}.$$

Reinforcement takes place if the difference of the number of waves is an integer k :

$$\begin{aligned} k &= \frac{2dn}{\lambda_0 \cos \beta} - \frac{2d \sin \beta \sin \alpha}{\lambda_0 \cos \beta} - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{2dn}{\lambda_0 \cos \beta} \cdot [1 - \sin^2 \beta] - \frac{1}{2} = \frac{2dn \cos \beta}{\lambda_0} - \frac{1}{2} = \frac{2d}{\lambda_0} \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

After some transformations the condition of reinforcement is obtained in the following form:

$$\frac{4d}{\lambda_0} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = 2k + 1.$$

It depends on the geometry and the index of refraction for which wave length maximum reinforcement ensues. We do not obtain pure monochromatic light. The adjacent wave lengths appear too, though weaker. For greater k the colour will be less saturated. If the plate or film is too thick no colours are seen, it appears greyish. The problem mentions a bright green colour and asks for the thinnest film. It follows that we have to substitute $k=0$ and thus the thickness of the layer:

$$d = \frac{\lambda_0}{\sqrt{4n^2 - \sin^2 \alpha}} = 0.10 \mu\text{m}.$$

b) For perpendicular incidence, if $k=0$, the wavelength showing maximum reinforcement:

$$\lambda_b = 4d \sqrt{n^2 - \sin^2 0} = 4dn.$$

Using the former value of d :

$$\lambda_b = \lambda_0 \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\lambda_0}{\cos \beta}.$$

λ_b can be computed from λ_0 in the same way for any film thickness. In our case

$$\lambda_b = 1.079\lambda_0 = 0.540 \mu\text{m},$$

which corresponds to a green of somewhat yellowish hue.

Problem 3. An electron gun emits electrons, accelerated by a potential difference of $U=1000$ volt in the direction of the line a , as shown in Fig. 52. We want to hit the target M , in direction α , at 5 cm distance from the gun. Find induction B of the uniform magnetic field to be applied if

- the field is perpendicular to the plane defined by line a and point M ,
- the field is parallel to TM ?

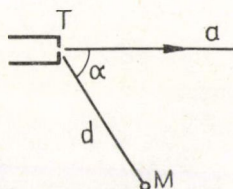


Figure 52

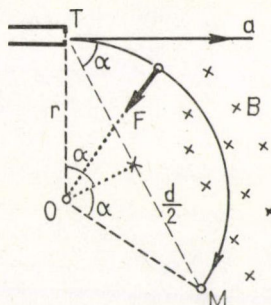


Figure 53

Solution.

a) From geometrical considerations follows that the radius of the path of the electrons is a circle (Fig. 53):

$$r = \frac{d}{2 \sin \alpha}.$$

The law of conservation of energy for a charge Q travelling through a potential difference U with velocity v :

$$\frac{mv^2}{2} = UQ, \quad \text{hence} \quad v = \sqrt{\frac{2UQ}{m}}.$$

The Lorentz force acting on charge Q :

$$F = QBv$$

is equal to the centripetal force mv^2/r :

$$\frac{mv^2}{r} = QBv.$$

Hence the magnetic induction required:

$$B = \frac{mv}{rQ}.$$

Using the above values for the radius and the velocity:

$$B = \frac{2 \sin \alpha}{d} \cdot \sqrt{\frac{2Um}{Q}}.$$

In our case ($m = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, $Q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C),

$$B = 0.0037 \text{ tesla} = 0.0037 \text{ Vs/m}^2 = 37 \text{ oersted}.$$

b) The force exerted by the magnetic field is perpendicular to the velocity. Thus a uniform, constant magnetic field changes only the direction of the velocity of the electron and does not change its magnitude.

We resolve the velocity of the electrons, emitted by the electron gun, into two rectilinear components: $v \cos \alpha$ in the direction of field B and $v \sin \alpha$ perpendicular to the field. $v \cos \alpha$ lies in the direction of the field thus the magnetic field does not act on it (Fig. 54).

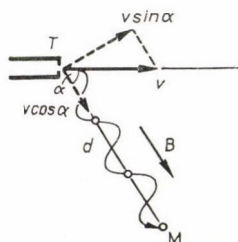


Figure 54

The electron reaches the target M after a time of $d/v \cos \alpha$. Because of the magnetic field B and the perpendicular velocity component $v \sin \alpha$ the electron moves on a circular path. From

$$\frac{mv^2 \sin^2 \alpha}{r} = BQv \sin \alpha$$

the radius of the circle

$$r = \frac{mv \sin \alpha}{QB}.$$

The electron has also a velocity $v \cos \alpha$ in the direction of the target M. The result is a motion in a helix about the direction of B . The electron hits the target M after it has described k circles during the time $d/v \cos \alpha$ where k is an integral number. The perimeter of a circle

$$2\pi r = 2\pi mv \sin \alpha / QB,$$

since the velocity of the motion round the circle is $v \sin \alpha$, the time of one turn is

$$\frac{2\pi mv \sin \alpha}{QBv \sin \alpha} = \frac{2\pi m}{QB}.$$

A multiple of this by integer k equals $d/v \cos \alpha$:

$$\frac{d}{v \cos \alpha} = \frac{2\pi m}{QB} \cdot k.$$

Hence the magnetic induction required:

$$B = k \cdot \frac{2m \cos \alpha}{dQ} \cdot v = k \cdot \frac{2\pi \cos \alpha}{d} \cdot \sqrt{\frac{2Um}{Q}}.$$

For $k=1$ the target is reached by one turn, for $k=2$ by two turns etc. It is of no importance whether the induction shows in one direction or the opposite as long as the angle α is the same.

Using the given data we get:

$$B = k \cdot 0.0067 \text{ tesla} = k \cdot 0.0067 \text{ Vs/m}^2 = k \cdot 67 \text{ oersted}.$$

Experimental problem. Given a "black box" with three terminals A, B, C of the same form. There are inside two capacitors C_1 , C_2 and a resistor R in star connection. Find the values of the resistance and the capacitances. (See Fig. 55.) You have at your disposal: an AC source of frequencies between 0,1 kHz and 10 kHz, an AC voltmeter and an AC ammeter. With their help the AC voltage of the source and the AC current across the box can be measured, the impedance determined and the dependence of the impedance on the frequency between the terminals investigated.

Solution. First we have to find out which one of the terminals is connected to the resistor. Across the other two we have pure (resultant) capacitance for which the impedance is inversely proportional to the frequency. Therefore we measure the impedances pairwise between the terminals for 0.1 kHz and 10 kHz and the pair, where we observe an inverse proportion, corresponds to terminals 1 and 2 in the Fig. Several methods are feasible for further investigation.

a) Across 1 and 2 we measure the impedance of the capacitances C_1 and C_2 , connected in series, at a given frequency:

$$Z = \frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2}. \quad (1)$$

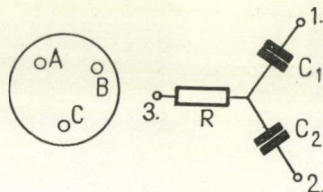


Figure 55

Then we measure the resultant impedances of the resistance and the capacitances C_1 at C_2 across 1, 3 and 2—3, respectively, at the same frequency:

$$Z_1^2 = R^2 + \left(\frac{1}{\omega C_1} \right)^2, \quad (2)$$

$$Z_2^2 = R^2 + \left(\frac{1}{\omega C_2} \right)^2. \quad (3)$$

Solving the system of equations we get:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{\omega}{2Z} (Z^2 + Z_1^2 - Z_2^2),$$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{\omega}{2Z} (Z^2 - Z_1^2 + Z_2^2).$$

From C_1 and C_2 we can easily obtain R by the formulae (2) or (3).

β) Joining the terminals 1 and 2 the equivalent capacitance is the sum of C_1 and C_2 . We measure the impedances, at two different frequencies, across terminal 3 and the joined terminals 1—2:

$$Z_A^2 = R^2 + \frac{1}{\omega_A^2 (C_1 + C_2)^2},$$

$$Z_B^2 = R^2 + \frac{1}{\omega_B^2 (C_1 + C_2)^2}.$$

Eliminating $C_1 + C_2$ we get:

$$R^2 = \frac{\omega_A^2 Z_A^2 - \omega_B^2 Z_B^2}{\omega_A^2 - \omega_B^2}.$$

The capacitances can be calculated from formulae (2) and (3).

If the frequency is small R is negligible compared with $1/\omega C_1$ and $1/\omega C_2$ thus we can compute the capacitances directly from the impedances. On the other hand, making the measurements at great frequency the resistances of the capacitors can be neglected and we obtain resistance R .

XI.

1979. Moscow. Soviet Union

Problem 1. A space ship of mass $m=12$ t is revolving on a circular orbit about the Moon in height $h=100$ m. In order to reach the surface of the Moon its jet engine is switched on at point X for a short time. The velocity of the hot gases issuing from the nozzles $u=10\,000$ m/s relative to the space ship. The radius of the Moon $R=1700$ km, the acceleration of free fall on its surface $g=1.7$ m/s². The space ship can reach the Moon by two different methods (see Fig. 56): *a*) arriving on the Moon in point A , opposite to point X ; *b*) touching the Moon surface tangentially at point B after having given a momentum directed toward the centre of the Moon at point X . Calculate the quantity of fuel necessary in each case.

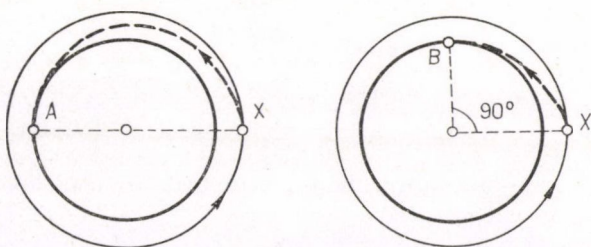


Figure 56

Solution. The acceleration of free fall on the surface of the Moon $g = fM/R^2$ (f denotes the universal gravitational constant, M the mass of the Moon).

Denoting the original velocity of the space ship by v_0 we have

$$\frac{v_0^2}{R+h} = \frac{fM}{(R+h)^2} = \frac{gR^2}{(R+h)^2},$$

hence

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} = 1652 \text{ m/s.}$$

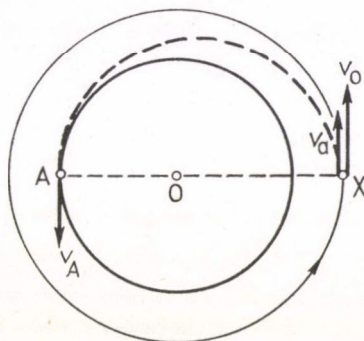


Figure 57

a) By operating the jet engine in opposite direction the velocity of the space ship decreases from v_0 to v_a . As a result the ship continues its journey on an elliptical orbit. The end-points of the major axis of the ellipse are A and X (Fig. 57). The velocities in points A and B will be v_A and v_B , respectively. According to Kepler's second law the areal velocity is constant, therefore

$$v_A R = v_a(R+h), \text{ hence } v_A = \frac{R+M}{R} \cdot v_a.$$

The velocity increases from v_a to v_A . The increase in kinetic energy is gained by a corresponding decrease in gravitational energy

$$\frac{mv_A^2}{2} - \frac{mv_a^2}{2} = \frac{fmM}{R} - \frac{fmM}{R+h},$$

thus

$$v_A^2 - v_a^2 = 2fM \cdot \frac{h}{R(R+h)} = \frac{2ghR}{R+h} = 0.321 \cdot 10^6 \text{ (m/s)}^2.$$

Using the value of v_A gained from the law of conservation of momentum we have

$$v_a^2 \left[\left(\frac{R+h}{R} \right)^2 - 1 \right] = v_a^2 \frac{h(2R+h)}{R^2} = \frac{2ghR}{R+h},$$

hence

$$v_a^2 = \frac{2gR^3}{(R+h)(2R+h)} = 2.65 \cdot 10^6 \text{ (m/s)}^2,$$

$$v_a = 1628 \text{ m/s}, \quad v_A = 1724 \text{ m/s}.$$

By operating the jet in opposite direction we have to decrease the velocity by

$$\Delta v = v_0 - v_a = 24 \text{ m/s}.$$

In order to determine the quantity of fuel we write the law of momentum in the reference system of the space ship (Fig. 59). The mass of the ejected material

$$\mu = \frac{m\Delta v}{u + \Delta v} = 28.7 \text{ kg}.$$

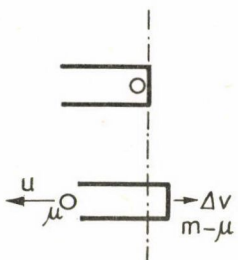


Figure 59

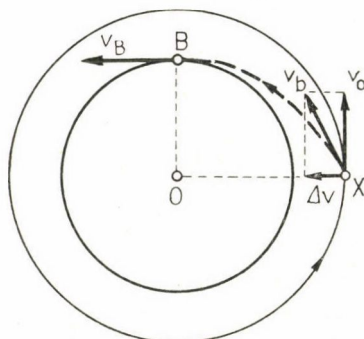


Figure 58

b) The jet should be operated radially outward and thus velocity Δv in the direction of the centre added to the original velocity v_0 (Fig. 58). The velocity of the space ship will be

$$v_b = \sqrt{v_0^2 + \Delta v^2}.$$

The space ship continues its journey on an ellipse (parabola, hyperbola). The vertex of the conic section is B , its focus O and v_b is tangent in X to the orbit. OX is the parameter of the conic section. The velocity v_B in B is greater than v_b .

Using in X the velocity component v_0 perpendicular to the radius we write the equation for the areal velocities as

$$v_B R = v_0(R+h), \quad v_B = \frac{R+h}{R} \cdot v_0 = 1749 \text{ m/s}.$$

The velocity increases from v_b to v_B . A decrease of the gravitational energy corresponds to the increase in kinetic energy.

Thus

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_b^2}{2} = \frac{fmM}{R} - \frac{fmM}{R+h} = fmM \cdot \frac{h}{R(R+h)},$$

hence

$$v_B^2 - (v_0^2 + \Delta v^2) = \frac{2ghR}{R+h}.$$

We get

$$\Delta v = \frac{h}{R} \cdot v_0 = 97 \text{ m/s}.$$

Applying the law of momentum again for the space ship

$$\Delta v(m - \mu) = \mu u, \quad \text{we get} \quad \mu = \frac{m\Delta v}{u + \Delta v} = 115 \text{ kg}.$$

The space ship sets off on the new orbit with velocity $v_b = 1655 \text{ m/s}$. At point X its velocity includes the angle $\arctg(\Delta v/v) = 3^\circ 21'$ with the tangent of the circle. To revolve in a circular orbit its velocity should be $\sqrt{gR} = 1700 \text{ m/s}$ at point B . If v_B is less than $\sqrt{2} \cdot 1700 = 2404 \text{ m/s}$ it moves on an elliptical orbit. Our actual velocity — 1749 m/s — is far from this value, therefore the orbit is an ellipse.

Problem 2. The mass of a piece of aluminium is measured first in dry air, then in moist air of 15.2 partial water-vapour pressure. Brass weights are used. The atmospheric pressure (760 Hgm) and the temperature are the same in both cases. At least what should be the mass of the piece of aluminium to show a difference in the above cases if the sensitivity of our balance is such that it reacts to a difference of 0.1 mg ? The density of aluminium is 2.7 g/cm^3 , the density of brass 8.5 g/cm^3 .

Solution. The partial pressure of the water-vapour is one fiftieth part of the total pressure, which means that one fiftieth part of the air volume was substituted by water-vapour. The density of air at 20°C is 0.0012 g/cm^3 , the density of water-vapour is 0.00075 g/cm^3 , thus the density of moist air in our case can be given as

$$\frac{49 \cdot 0.0012 + 1 \cdot 0.00075}{50} \text{ g/cm}^3 = 0.00119 \text{ g/cm}^3.$$

For the difference of the density of dry and moist air we get 0.00001 g/cm^3 .

The volume of one gram aluminium is 0.370 cm^3 , the volume of one gram brass is 0.117 cm^3 . The difference is 0.253 cm^3 . Substituting moist air for the dry air, when one gram masses are in equilibrium on the balance, the difference in upward force equals the weight of a $0.253 \text{ cm}^3 \cdot 0.00001 \text{ g/cm}^3 = 0.0000025 \text{ gram}$ mass.

Our balance registers differences of more than 0.0001 gram only, therefore the piece of aluminium must be at least $0.0001 \text{ g} : 0.0000025 \text{ g} = 40$ times greater than 1 g to make the effect of moist air discernible.

Problem 3. Using a concave paraboloid mirror telescope, diameter $D = 2.6 \text{ m}$, the rays of a laser $\lambda = 0.69 \mu\text{m}$ wave length are sent to the surface of the Moon. The rays are reflected by a plane mirror of $d = 20 \text{ cm}$ diameter placed on the Moon. The mirror reflects the rays back exactly to the telescope on the Earth. A photoelectric cell intercepts the light in the focus of the telescope. Earth—Moon distance $L = 380\,000 \text{ km}$.

a) Calculate the accuracy of the angle, the telescope should be adjusted in the required direction;

- b) What part of the original energy does the cell intercept? (neglect losses.)
 c) If the energy of the emitted light impulse is 1 joule, how many photons reach an unaided eye? (Diameter of the pupil 5 mm.)
 d) How much energy would reach the photocell if there were no mirror on the Moon? (The surface of the Moon reflects 10% of the incident light uniformly in all directions.)

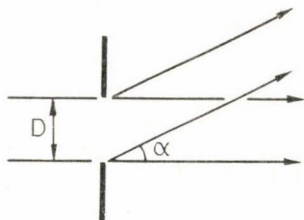


Figure 60

Solution. a) In our case the laser functions as a strong point light source only, it has nothing to do with the accuracy of direction. The area $\pi(D/2)^2 = 5.31 \text{ m}^2$ represents a slit emitting light and the light beam is spread out by diffraction (Fig. 60). According to the Huygens's principle the slit constitutes a wave front, it gives maximum intensity of light in the original direction and the first destructive interference (dark fringe) in $\lambda = D \sin \alpha$ direction. In an ideal case the axis is directed exactly toward the mirror on the

Moon. If the deviation in angle is more than $\alpha = \lambda/D$ very little light reaches the mirror. For angle α we get

$$\alpha \approx \sin \alpha = \frac{\lambda}{D} = \frac{0.69 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{2.6 \text{ m}} = 2.65 \cdot 10^{-7} = 0.055''.$$

The accuracy of direction must be considerably better. The distribution of light is not even uniform within this angle. The intensity decreases approaching the edges. Therefore all our calculations should be regarded as approximations.

b) Owing to diffraction a circle of light is produced on the Moon. Its diameter is given by

$$\alpha L = \frac{\lambda}{D} L = 101 \text{ m, its area } \pi(L\lambda/2D)^2 = 7987 \text{ m}^2.$$

The total emitted energy E is distributed over this area. The average energy density

$$E: \frac{\pi\lambda^2 L^2}{4D^2} = \frac{4D^2 E}{\pi\lambda^2 L^2} = 0.125 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{m}^2} E.$$

The energy reaching our mirror of diameter d and area $\pi(d/2)^2 = 0.0314 \text{ m}^2$ can be easily calculated as

$$\frac{4D^2 E}{\pi\lambda^2 L^2} \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{Dd}{L\lambda}\right)^2 \cdot E = 3.94 \cdot 10^{-6} E.$$

The plane mirror reflects this energy but owing to diffraction in an angle domain of

$$\lambda/d = \beta = 3.45 \cdot 10^{-6} \text{ radian} = 0.71'' \text{ (Fig. 60, scale exaggerated!)}$$

On the Earth a circle of diameter $L = \frac{\beta L}{d} = 1310 \text{ m}$ and $1.72 \cdot 10^6 \text{ m}^2$ will receive the light. The energy reflected from the Moon $(Dd/L\lambda)^2 E$ will be distributed on this

area and thus the energy density on the Earth can be obtained as

$$\left(\frac{Dd}{L\lambda}\right)^2 E : \pi \left(\frac{L\lambda}{2d}\right)^2 = \frac{4D^2 d^4}{\pi L^4 \lambda^4} \cdot E = 2.3 \cdot 10^{-12} \frac{1}{\text{m}^2} E.$$

Now the energy reaching the area $\pi(D/2)^2$ of the telescope

$$\frac{4D^2 d^4 E}{\pi L^4 \lambda^4} \cdot \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \left(\frac{Dd}{L\lambda}\right)^4 E = 15.8 \cdot 10^{-12} E.$$

We get back the 16 billionth part of the original energy.

c) The area of the pupil is $\pi \cdot 2.5^2 \text{ mm}^2 = 20 \text{ mm}^2 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$. Multiplied by $2.3 \cdot 10^{-12} \frac{1}{\text{m}^2} E$, the energy density on the Earth ($E=1$ joule), we get for the energy $46 \cdot 10^{-18}$ joule.

The frequency of red light $f = (3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) : (0.69 \cdot 10^{-6} \text{ m}) = 4.35 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$. For the energy of one red photon $hf = 2.89 \cdot 10^{-19}$ joule. The number of photons reaching the eye $46 \cdot 10^{-18} : 2.89 \cdot 10^{-19} = 155$ photon.

We can ask the question: is it possible to see the reflected light with the naked eye? Only the very sensitive rods of the retina are able to observe extremely weak light. The sensitivity of the rods is best for green light of wave length $0.51 \mu\text{m}$, when under specially suited circumstances they can perceive even a few photons. The sensitivity of rods for $0.6 \mu\text{m}$ is 1/100 of the above value. For light of longer wave lengths they are absolutely insensible. We can conclude that it is quite impossible to observe the light with naked eye. Not to speak from the much stronger light of the Moon itself, which makes the observation illusory.

d) Let us investigate the case when we have no mirror on the Moon. In this case the Moon reflects $0.1 E$, one tenth of the total energy. The whole circle of diameter 101 m finds easily place on the Moon. This energy is distributed now on a much larger circle of radius L on the Earth (Fig. 61), hence the energy density on the Earth is given by

$$\frac{0.1 E}{2\pi L^2} = 1.1 \cdot 10^{-18} \frac{1}{\text{m}^2} E,$$

the energy reaching the telescope

$$\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \frac{0.1 E}{2\pi L^2} = 5.9 \cdot 10^{-18} E$$

which is

$$\left(\frac{Dd}{L\lambda}\right)^4 \cdot E : \pi \left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \frac{0.1 E}{2L^2}\right] = 80 \cdot \frac{D^2 d^4}{L^2 \lambda^4} = 27 \cdot 10^6 \text{ times}$$

(27 million times) less than in the former case when a mirror was used on the Moon.

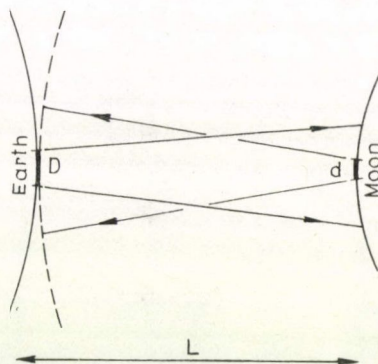


Figure 61

Experimental problem. The inside of a “black box” with 4 points of connection should be investigated naturally without opening it. Given are DC and AC sources, instruments and a rheostat (adjustable resistance).

It is easy to find out that:

there is no source in the box (nothing comes out),

there is no amplifier in it (changing the poles we get the same results as before),

for direct current the box contains two non-connected separate parts.

Fig. 62 shows the inside of the box.

It is possible to measure the resistances, the inductances and the mutual inductance.

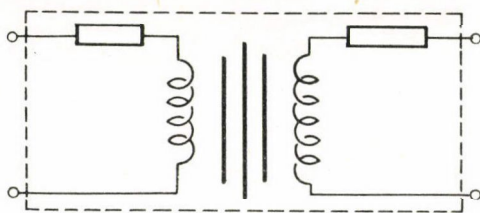


Figure 62

LÉZERES NEMLINEÁRIS PLAZMADIAGNOSZTIKA *

BAKOS JÓZSEF ÉS IGNÁCZ PÉTER

Központi Fizikai Kutató Intézet, Budapest

A dolgozat a plazmadiagnosztika szempontjából ígéretes nemlineáris fény—plazma kölcsönhatással foglalkozik, leírja azt a mechanizmust, amelyben két egymást keresztező fénynyaláb a plazmában az egyensúlyi sűrűségfluktuációk háttéréből kiemelkedő longitudinális, sűrűségi hullámokat kelt.

Véges vonalszélességű, Gauss-intenzitáseloszlású gerjesztő hullámok mellett kiszámított indukált hullámamplitúdóra megadjuk a „klasszikus” Thomson-szóráshoz képesti szórt fény intenzitás-növekedést.

A nemlineáris szórási effektust kihasználó plazmadiagnosztikai mérési összeállításokra teszünk javaslatot, amelyek várható intenzitásnövekedését a kapott összefüggések alapján megadjuk.

1. Bevezetés

A szabad elektronok fény szórásán alapuló plazmadiagnosztika vagy röviden Thomson szórásos plazmadiagnosztika ma már az alapvető diagnosztikai eljárások közé tartozik [1—5]. Különösen magas hőmérsékletű plazmák esetén, amikor lényeges szempont az, hogy a plazma semmilyen idegen anyaggal (szonda) ne kerüljön kontaktusba, a fény szórásán alapuló mérési eljárás az egyedüli mérési módszer, mely a plazmajellemzők lokális értékét szolgáltatja.

A plazma tulajdonságai közül a Thomson szórásos eljárás legegyszerűbb változata esetén a plazma sűrűségét és hőmérsékletét lehet meghatározni. A mérés elve igen egyszerű. A plazmában nagy energiájú fényimpulzust fókuszálunk. A fény a plazma elektronjain szóródik. Ezt a szórt fényt az eredeti fény terjedési irányához viszonyított szög alatt figyeljük meg egy spektrális bontóelemet, alkalmasint monokromátort, illetve polikromátort tartalmazó optikai elrendezéssel. A detektáló optika a fókuszpontból kiszóródó fényt méri s ezáltal a fókuszpont helyén levő plazma tulajdonságait tudjuk meghatározni. A lézerimpulzus spektrum δ -függvény alakúnak vehető. A szórt fény spektruma viszont a plazma elektronjain való szóródás után a gyorsan mozgó elektronokon fellépő Doppler effektus miatt kiszélesedik. A spektrum formája az elektronok sebességeloszlási függvényét mutatja. Maxwell-féle sebességeloszlás esetén a spektrum szélessége alapján az elektronok hőmérsékletét, míg a Gauss-spektrum amplitúdóján az elektronsűrűséget lehet meghatározni.

* Érkezett 1980. szept. 1.

2. Fény és plazma nemlineáris kölcsönhatása

Fontos kikötés a lézersugárzással szemben, hogy a plazmával ne lépjen kölcsönhatásba, a plazma paramétereit ne változtassa meg, azaz a plazmát ne „fűtse”. A szórési hatáskeresztmetszet tudvalevőleg nagyon kicsi, a klasszikus elektron rádiusz (r_0) négyzete nagyságrendű. A szórás tehát nem okoz számottevő kölcsönhatást.

Nagy intenzitású fénynyaláb alkalmazása esetén azonban a fény hullámterében a plazma ionjain szóródó elektronok képesek fénykvantumot abszorbeálni és ennek ellenében nagyobb sebességre szert tenni (inverz fékezési sugárzás). Ez a folyamat a plazmát fűti. Ha azt akarjuk, hogy a „fűtés” a mérést ne hamisítsa meg, egy bizonyos energiánál nagyobb energiájú fényimpulzust nem használhatunk.

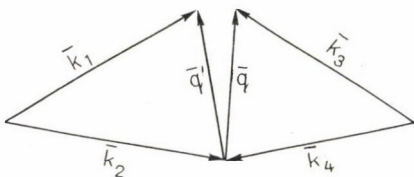
Híg, nagy hőmérsékletű plazma esetén a Thomson szórás kis hatáskeresztmetszete miatt a szóródó kvantumok száma olyan kevés lehet, ami a mérést már hátrányosan befolyásolja. Természetes tehát, hogy más fényszórásos plazmadiagnosztikai módszert keressünk, ahol több fénykvantum szóródik, mint a Thomson szórás esetén. Ekkor azonban már fel kell adnunk azt a követelményünket, hogy a mérési módszer ne zavarja meg a plazma eredeti állapotát. Sőt, a cél a nagy amplitúdójú plazmahullámok keltése [6], amelyeknek azután a szondázó fénysugár nagy effektivitással szóródik. Magukat a plazmahullámokat is célszerű fényhullámmal vagy fényhullámokkal kelteni (ezeket a fényhullámokat a továbbiakban pumpáló fényhullámoknak nevezzük), hiszen a fénynél nincs az a probléma, mint a plazmába merülő, plazmahullámot gerjesztő elektródoknál, hogy a forró plazma hatására elpárolognak és szennyeznek magát a plazmát.

Röviden: arról van szó, hogy az inverz fékezési sugárzáson túl további mechanizmusok is vannak, melyek a plazma állapotát megváltoztatják. A fényhullám nemcsak az egyes elektronokkal lép kölcsönhatásba, hanem a plazmával, mint egész-szel és plazmában kollektív rezgéseket, módusokat gerjeszt. A kölcsönhatás alapmechanizmusát a következőképpen lehet leírni. A fényhullám elektromos tere az elektronokat rezgőmozgásra kényszeríti. Az így nyert sebességgel (quiver velocity) az elektron ugyanazon vagy más, a közegben még terjedő hullám mágneses terével lép kölcsönhatásba (Lorentz erő). Amennyiben az így előálló erőhatás frekvenciája (Ω) és hullámvektora (\vec{q}) eleget tesz valamelyik plazmamódus diszperziós $\Omega = f(\vec{q})$ összefüggésének [6] akkor ez a módus jó hatásokkal gerjesztődni fog.

Amint a fentiekből látszik, a kölcsönhatás nemlineáris, a kölcsönhatás erőssége a fény intenzitásával arányos.

A továbbiakban csak azokkal a kölcsönhatásokkal foglalkozunk, melyeket a plazmában egymást keresztező különböző terjedési vektorú (\vec{k}_1, \vec{k}_2) és különböző

frekvenciájú (ω_1, ω_2) fénynyaláb hoz létre. A két fénynyaláb a plazmában Ω frekvenciájú és \vec{q} terjedési vektorú plazmamódust gerjeszt. A plazmamóduson egy \vec{k}_3 terjedési vektorú ω_3 frekvenciájú fényhullámot szórunk. Az eredmény a \vec{k}_4 terjedési vektorú ω_4 frekvenciájú szórt nyaláb (1. ábra). Ezt a folyamatot négyfotonos szórásnak* nevezzük.



1. ábra

* A terminológia magyarázatát a 3. fejezetben adjuk meg.

Megmutatjuk, hogy a szórt nyaláb teljesítménye P_4 általában lényegesen nagyobb annál, mintha a \bar{k}_3, ω_3 fénynyaláb a Thomson szórás esetéhez hasonlóan csupán termikusan gerjesztett módusokon szóródott volna. A szórt fénynek a Thomson szóráshoz viszonyított teljesítménynövekedését kiszámítjuk néhány, a laboratóriumban előforduló plazma esetére, néhány számba jöhető lézerfajtaát véve figyelembe.

3. A négyfotonos szórás elmélete

A négyfotonos szórást, mint plazmadiagnosztikai módszert, először *Kroll, Ron és Rostoker* [7] javasolta még 1964-ben. Azóta számos elméleti munka foglalkozott a témával [8–16] egyre tökéletesítve a tárgyalást és a gyakorlati megvalósítás lehetőségeit, a reális kísérleti viszonyokat egyre inkább figyelembe véve számításaikban. A következő rövid összefoglalásban elsősorban *Meyer* munkájának eredményeit [9, 10] használjuk fel.

Ha a (k_3, ω_3) próbahullám a plazma termikusan gerjesztett hullámain szóródik (Thomson szórás), a szórt hullám teljesítménye [1]

$$P_4(\bar{q}, \Omega) = r_0^2 \cdot N(\bar{r}) \cdot V \cdot I_3 \cdot S_{th}(\bar{q}, \Omega) \cdot d\Omega \cdot d0 \quad (1)$$

ahol

$$S_{th}(\bar{q}, \Omega) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \frac{I}{V \cdot T} \left\langle \frac{N_{th}^2(\bar{q}, \Omega)}{N} \right\rangle \quad (2)$$

Itt a zárójel a statisztikai átlagot, V a megfigyelési térfogatot, T a megfigyelési időt, N a plazma sűrűségét, $N_{th}(\bar{q}, \Omega)$ az Ω frekvenciájú és \bar{q} terjedési vektorú termikusan gerjesztett plazmahullám amplitúdóját, I_3 a (\bar{k}_3, Ω_3) hullám teljesítménysűrűsége, $d0$ a megfigyelés térszöge. Továbbá

$$\Omega = \omega_4 - \omega_3 \quad (3)$$

$$\bar{q} = \bar{k}_4 - \bar{k}_3. \quad (4)$$

Ha a (\bar{k}_3, ω_3) próba hullám (\bar{k}_1, ω_1) (\bar{k}_2, ω_2) pumpáló hullámok által keltett indukált (\bar{q}, Ω) plazmahullámon szóródik az (1), (2) kifejezések változatlanok maradnak, csupán $N_{th}(\bar{q}, \Omega)$ helyébe $N_{ind}(\bar{q}, \Omega)$ kerül. Az $N_{ind}(\bar{q}, \Omega)$ értéke a Vlaszov egyenletből [6] számolható figyelembe véve a pumpáló hullámok hatását. A következőkben számolhatjuk ki a pumpáló hullámok által keltett plazmarezgések amplitúdóját, az $N_{ind}(\bar{q}, \Omega)$ értékét.

Két egymást keresztező síkhullám

$$\bar{E}(t) = \sum_{i=1}^2 \bar{E}_i \sin(\omega_i t - \bar{k}_i \bar{r} + \psi_i) \quad (5a)$$

$$\bar{B}(t) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\omega_i} \bar{k}_i \times \bar{E}_i \sin(\omega_i t - \bar{k}_i \bar{r} + \psi_i) \quad (5b)$$

terében az elektron mozgásegyenlete

$$\dot{\bar{v}} = \frac{e}{m} \sum_{i=1}^2 (\bar{E}(t) + \bar{v} \times \bar{B}_i), \quad (6)$$

amelynek megoldása első lineáris közelítésben

$$\bar{v}^{(1)} = \bar{v}_0 - \frac{e}{m} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\omega_i} \bar{E}_i \cos(\omega_i t - \bar{k}_i \bar{r} + \psi_i) \quad (7)$$

az elektron kényszerített rezgőmozgása. \bar{E} , \bar{B} , m , e , a szokásos értelemben a fény elektromos és mágneses térereje az elektron tömege és töltése. ψ_i a kezdeti fázisok és \bar{r} a helyzetvektor. \bar{v}_0 az elektron kezdeti sebessége, míg (7) kifejezésben a második tag az elektron kényszerített rezgési sebessége. A (7) kifejezést a (6) kifejezés jobb oldalára behelyettesítve kapjuk az elektron sebességére a második nemlineáris közelítést. A (6) kifejezés második tagjából azonban csak azt a tagot tartjuk meg, mely a $\bar{k}_1 - \bar{k}_2$ hullámvektor különbséggel és az $\omega_1 - \omega_2$ frekvenciakülönbséggel arányos. Ugyanis feltételezzük, hogy a fényhullámok frekvenciái lényegesen nagyobbak, mint a plazmafrekvencia ($\omega_i \gg \omega_p$), ahol

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N_e^2}{\epsilon_0 m} \quad (8)$$

és N_e a plazma elektronsűrűsége. Ekkor ugyanis csak a frekvenciakülönbséggel arányos tag tud plazma módust gerjeszteni. Tehát az elektronra ható erő második közelítésben

$$m\dot{\bar{v}} = \text{const} + \frac{\bar{k}_2 - \bar{k}_1}{2\omega_1\omega_2} \frac{(\bar{E}_1 \bar{E}_2) e^2}{m^2} \sin\{(\omega_2 - \omega_1)t - (\bar{k}_2 - \bar{k}_1)\bar{r} + \psi_2 - \psi_1\}. \quad (9)$$

A második tag az a nemlineáris erő, mely a plazmarezgéseket gerjeszti. Ezt az erőt kell behelyettesíteni a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \pm \bar{F} \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (10)$$

Vlaszov egyenlet, (\bar{F}) erőt leíró tagjába, azaz

$$\bar{F} = \frac{e}{m} (\bar{E}'' + A \bar{q}' e^{i(\Omega t - \bar{q}' \bar{r})} + \bar{v} \times \bar{B}_0). \quad (11)$$

A fenti egyenletekben

$$\bar{E}'' = \bar{E}' + \bar{E} \quad (12a)$$

$$A = \frac{e^2 \bar{E}_1 \bar{E}_2}{2m^2 \omega_1 \omega_2} \quad (12b)$$

$$\bar{q}' = \bar{k}_2 - \bar{k}_1 \quad (12c)$$

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1 \quad (12d)$$

és \bar{E}' , \bar{B}_0 a plazmában ébredő fluktuáló elektromos tér, valamint a külső mágneses tér.

Természetesen sokkal realisabb a kép, ha két síkhullám helyett két reális Gauss hullámot veszünk, amely különböző frekvenciájú és terjedési vektorú, időben γ csil-

lapítási együtthatójú csillapított, t_v időben véletlenszerűen induló φ_{jv} véletlen fázisú összetevők összege

$$\bar{E}_j = \int d^3\bar{k}_j \sum_{\mathbf{v}} \bar{E}_{jv}(\bar{r}) \exp[-\gamma(t-t_v) + i(\omega_{jv}t - \bar{k}_j\bar{r} + \varphi_{jv})], \quad (13)$$

ahol

$$\bar{E}_{jv}(\bar{r}) = \bar{E}_{jv}^{(0)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_j}{b}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{y_j}{b}\right)^2 - ik_{j0}z_j\right] \quad (14)$$

és b a Gauss hullám nyalábrádiusza. A nemlineáris erőtagból ugyancsak a $\bar{k}_1 - \bar{k}_2$ különbséggel arányos tagot tartva meg a Vlaszov egyenletben a megoldás

$$\begin{aligned} \langle |N_{\text{ind}}(\bar{q}', \Omega)|^2 \rangle &= \left[\frac{T}{32\pi} \frac{k_0^4}{m^2 c^2} \frac{I_1 I_2}{\omega_{10}^2 \omega_{20}^2} \cos^2 \beta \right] \cdot \left[\frac{F_e(1 + \alpha^2 F_i)}{1 + \alpha^2(F_e + F_i)} \right]^2 \times \\ &\times \left[\frac{w}{2\pi} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}w\right)^2 + (\omega - \omega_{10} + \omega_{20})^2} \right] \times \left[\frac{b^2}{\pi} \exp\left[-b^2\left(\frac{q_x^2}{\sin^2 \vartheta/2} + q_y^2\right)\right] \right] \end{aligned} \quad (15)$$

alakban írható. Itt feltételezzük, hogy a pumpáló, egymást ϑ szög alatt keresztező, interferáló hullámok Lorentz spektrumúak W_1 , illetve W_2 sávszélességgel, a különböző időpillanatban véletlenszerűen induló csillapított pumpáló hullámösszetevőket egy stacionárius statisztika írja le és a megfigyelési idő $T \gg \frac{1}{\gamma}$. Továbbá

$$W = W_1 + W_2 + 2\gamma$$

I_1, I_2 a két pumpáló hullám teljesítménysűrűsége. A plazma diszperziós függvények [17]

$$F_e(x_e) = 1 - 2x_e e^{-x_e^2} \int_0^{x_e} e^{t^2} dt - i\pi^{1/2} x_e \exp(-x_e^2) \quad (16a)$$

$$F_i(x_i) = 1 - 2\mu x_i e^{-\mu^2 x_i^2} \int_0^{\mu x_i} e^{t^2} dt - i\pi^{1/2} \mu x_i \exp(-\mu^2 x_i^2) \quad (16b)$$

a szokásos alakúak, ahol

$$x_e = \frac{\Omega}{qv_{te}}, \quad x_i = \frac{\Omega}{qv_{ti}},$$

és

$$v_{te} = (2\kappa T_e/m_e)^{1/2} = 5,9 \times 10^5 T_e^{1/2}.$$

Az elektronok termikus sebessége,

$$v_{ti} = (2\kappa T_i/\mu m_p)^{1/2} = 1,4 \times 10^4 T_e^{1/2}$$

az ionok termikus sebessége. A jobb oldalon T_e, T_i elektronvoltokban mérendő. Továbbá $\mu = \frac{m_i}{m_p}$ a proton tömegben (m_p) kifejezett iontömeg. Az $\omega_{i\sigma}$ az egyes pumpáló

hullámok közép frekvenciája, β a két pumpáló hullám elektromos térerei közti szög, c a fénysebesség és

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = k_D^2 = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 \kappa T_e}, \quad \alpha = \frac{k_D}{q}.$$

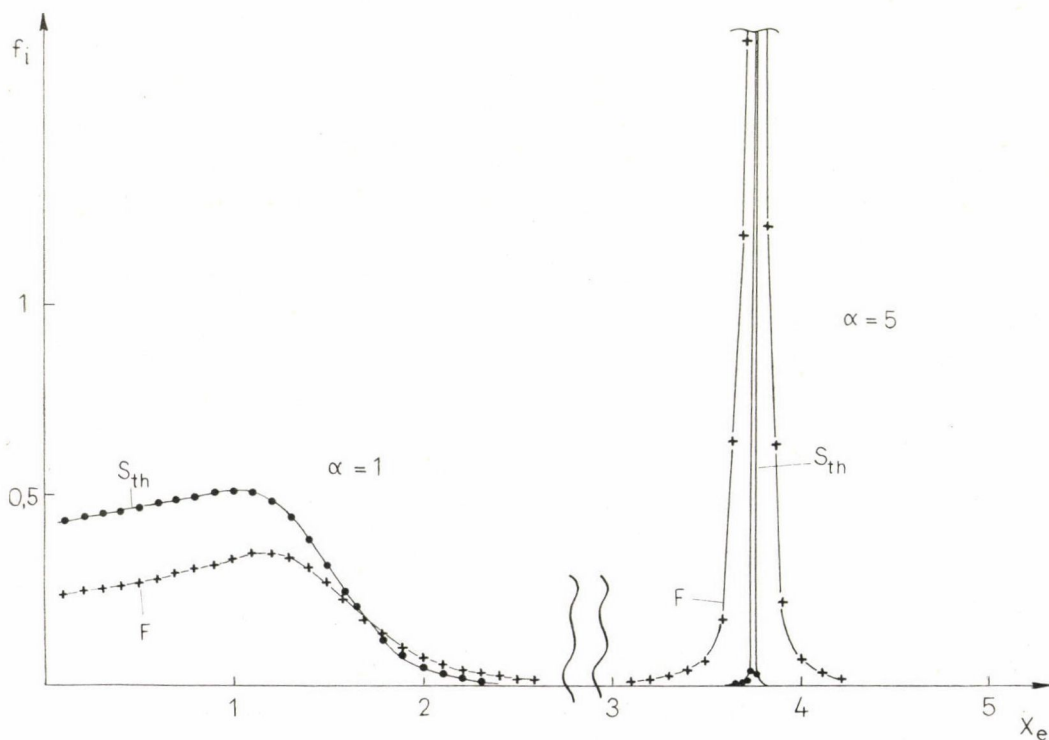
λ_D a Debye-hossz, ε_0 a vákuum dielektromos állandója, κ a Boltzmann konstans, és $\bar{q}(q_x, q_y, q_z)$.

A szórási vektorképet az 1. ábra mutatja. Mint látható az (1) kifejezés alapján a szórás szögeloszlását alapjaiban a (15) kifejezés utolsó tagja határozza meg. Ugyanis az utolsó taghoz viszonyítva a második tag, mely még tartalmaz irány szerinti függést, egy lassan változó függvény. Az utolsó tag viszont lényegében a Bragg feltételt fejezi ki és megköveteli, hogy

$$\bar{q} = \bar{q}'$$

legyen. Ez annál inkább igaz, minél nagyobb a nyalábok rádiusza (b) és minél kisebb a keresztező nyalábok közti szög.

A szórt sugárzás frekvenciaeloszlását, ha a keresztező nyalábok spektruma széles, akkor azt a (15) kifejezés második tagja határozza meg, melynek futását a 2. ábrán láthatjuk különböző α értékek esetén. Ha a pumpáló hullámok spektruma keskeny (a (15) kifejezés második tagjához viszonyítva), akkor a frekvenciafüggést alapjaiban



2. ábra

a (15) kifejezés harmadik tagja határozza meg és a feltételezés szerint Lorentz alakú lesz. Valójában ez a Lorentz spektrum „ül” a 2. ábra által mutatott frekvenciaeloszláson.

Különösen jó hatásfokkal gerjesztődik a plazmahullám, ha a gerjesztés ($\Omega = \omega_4 - \omega_3$) frekvenciája és hullámvektora eleget tesz az $\Omega_{\text{rez}} = f(q)$ diszperziós relációnak. Ezt a (15) kifejezés második tagjának nevezője mutatja, hiszen ez nem más, mint a plazma longitudinális dielektromos állandója, $\epsilon^l(\bar{q}, \Omega)$. A diszperziós relációt az $\epsilon^l(\bar{q}, \Omega) = 0$ adja, longitudinális hullámokra [6]. Így a második tag értékét csupán a (Landau és ütközési) csillapítás korlátozza, melynek értéke

$$q' < k_D$$

$$\frac{\Omega}{q'} > v_{te}, v_{ti}$$

esetén kicsi. Nagy hatásfokú gerjesztést tehát akkor remélhetünk, ha

$$\alpha \gg 1 \quad (17a)$$

$$q' < k_D \quad (17b)$$

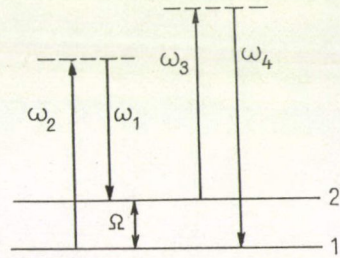
$$\Omega \sim \Omega_{\text{rez}}(\bar{q}'). \quad (17c)$$

Az utóbbi relációt nem kielégítő frekvenciák esetén is gerjesztődik hullám, amint azt a (15) kifejezés második tagja mutatja, csak lényegesen kisebb amplitúdóval (kényszerített rezgések).

A pumpáló hullámok által gerjesztett plazmahullámokon való szórást indukált szórásnak is nevezhetjük. Valójában fizikailag igen egyszerűen interpretálható az eredmény. A keresztező pumpáló nyalábok, ha frekvenciáik azonosak, egy álló interferenciateret hoznak létre, melynek hullámszáma $q = 2k_{1,2} \sin \frac{1}{2} \vartheta$, ahol $k_{1,2} \sim k_1 \sim k_2$.

Ha a frekvenciák különböznek, az interferencia rendszer „futni” kezd \bar{q} irányában, úgy hogy az álló megfigyelő $\Omega = \omega_2 - \omega_1$ frekvenciájú hullámot „érez”. Amint a fentiekből kitűnik, az elektronra ható erő iránya is a \bar{q} irányába mutat. Tehát ez a „gerjesztő” hullám longitudinális hullám, amely longitudinális, sűrűségi plazmahullámot kelt. A gerjesztett plazmahullámon a próbahullám úgy szóródik a Bragg feltételeknek eleget téve, mint a hanghullámon vagy más gerjesztési hullámon. Ennek a szórásnak rokon jelenségei már régóta jól ismertek [18]. Számos más alkalmazási területe is van, mint a koherens antistokes Raman spektroszkópia [19], az elosztott visszacsatolású lézerek [20], pikoszekundumos gerjesztési élet-tartamok mérése stb.

A fentiekben leírt négy hullámú szórást, az irodalomban négyfotonos szórásnak nevezik. Az elnevezés eredete világosan látható a 3. ábrán. ω_2 kvantum elnyelése és ω_1 kvantum kibocsátása árán Ω plazmon keletkezik. A felső nívóból ω_3 kvantum elnyelése és ω_4 kvantum (szórt sugárzás) kibocsátása után a rendszer visszatér a kiinduló 1 állapotba. A szórási folyamatban összesen négy kvantum vett részt. Innen a négyfotonos szórás elnevezés.



4. Négyfotonos szórás alkalmazása különféle plazmák vizsgálatára

A gyakorlatban általában a szórt nyaláb teljesítményének időintegrálját, a szórt energiát mérjük. Továbbá a spektrális bontóelemek véges felbontása, valamint a véges szögfelbontás miatt is ezen változók szerint is integrális adatokat kapunk. Különösen igaz ez az indukált szórás szögeloszlására, hiszen ez a Bragg feltétel miatt különösen éles. A regisztrált szórt energia tehát az (1) kifejezésnek az Ω , 0 és t szerinti integráljaként adódik. Az integrációs intervallum $\Delta\Omega$, $\Delta 0$, illetve $(0 + \infty)$, ahol $\Delta\Omega$ és $\Delta 0$ a regisztráló rendszer sávszélessége és fényereje. Ezek szerint a termikus plazma-hullámokon szórt energia

$$\varepsilon_4^{(\text{th})} = 8 \times 10^{-30} \cdot N \cdot L S_{\text{th}}(\bar{q}, \Omega) \frac{\Delta\Omega}{qv_{te}} \cdot \Delta 0 \cdot \varepsilon_3 \quad (18)$$

ε_3 a próbahullám energiája, L és megfigyelt térfogat hossza az (ω_3, \bar{k}_3) hullám terjedési irányában és

$$S_{\text{th}}(\bar{q}, \Omega) = \frac{1}{x_e} \frac{\text{Im}(-F_e) |1 + \alpha^2 F_i(x_i)|^2 + \alpha^4 Z \text{Im}(F_i) |F_e(x_e)|^2}{|1 + \alpha^2 (F_e(x_e) + Z F_i(x_i))|^2} \quad (19)$$

A továbbiakban foglalkozunk azzal az indukált szórással, mely az elektron plazma rezonancia körül történik, azaz a (17a, b, c) feltételek teljesülnek. Ekkor a rezonancia nevező egyszerűbb alakra írható [1] azaz

$$\frac{1}{|1 + \alpha^2 (F_e + F_i)|^2} \approx \frac{\alpha^2}{(x_e - x_{er})^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad (20)$$

ahol

$$\gamma = 2\pi^{1/2} \alpha^4 e^{-x_{er}^2} \quad (21)$$

és a rezonancia helye az

$$x_{er} = \alpha \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 12/\alpha^2}}{4}} \quad (22)$$

kifejezéssel van adva. A rezonancia-frekvencia ebből igen egyszerűen adódik [1] ez az

$$\Omega_{\text{rez}} = \omega_p \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 12/\alpha^2}}{2}} \quad (23)$$

Ezt felhasználva az indukált szórással mért energia, abban az esetben, ha a pumpáló hullámok spektruma lényegesen keskenyebb mint a plazma rezonanciaszélessége, azaz

$$W \ll \gamma \cdot q \cdot v_{te} = \delta \omega$$

$$\varepsilon_4^{(\text{ind})}(\bar{q}, \Omega) = D \cdot S_{\text{ind}}(\alpha, \Omega) \cdot \varepsilon_3 \quad (24)$$

Itt

$$D = 1,8 \times 10^{-30} \frac{N^2 \cdot P^2 \cdot \sin \vartheta/2}{k_0^4 \cdot T_e^2 \cdot q^2 \cdot b^2} \quad (25)$$

$$S_{\text{ind}}(\alpha, \Omega) = f_1(\alpha, \Omega) \frac{\alpha^2}{(x_e - x_{er})^2 + \gamma^2/4} \quad (26)$$

és

$$f_1(\alpha, \Omega) = |F_e(x_e)(1 + \alpha^2 F_i(x_i))|^2. \quad (27)$$

A fentiekben feltételeztük, hogy

$$\omega_{10} \sim \omega_{20} \sim \omega_0 \quad P_1 \sim P_2 = P$$

és továbbá

$$\Omega = \omega_{20} - \omega_{10} \quad \text{valamint} \quad k_0 = \frac{\omega_0}{c}$$

$f_1(\alpha, \Omega)$ az Ω szerint lassan változó függvény, tehát a szórt energia frekvenciafüggését alapjaiban a (26) kifejezés Lorentz függése határozza meg.

Ha a pumpáló hullámok spektruma lényegesen szélesebb, mint a plazmarezonancia ($\delta\omega$) azaz

$$W \gg \delta\omega$$

akkor a szórt hullám energiája

$$\varepsilon_4^{(\text{ind})} = B \frac{W^2/4}{(W/2)^2 + (\omega_0 - \Omega)^2} f_1(\alpha, \Omega) \cdot \varepsilon_3, \quad (28)$$

ahol

$$B = 4D \frac{q \cdot v_{te}}{W} \cdot \frac{1}{\gamma}, \quad (29)$$

és

$$\gamma' = 2\pi^{1/2} \alpha^2 e^{-x_e^2} \quad (30)$$

A kifejezésekben az egyes mennyiségeket *SI* egységekben kell behelyettesíteni.

A továbbiakban nézzünk néhány, a laboratóriumban előforduló plazmát és lézert. A cél: a plazmák diagnosztikája (sűrűség és hőmérséklet meghatározása). Kérdés: mennyivel jobb a négyfotonos diagnosztika a hagyományos Thomson szóráshoz viszonyítva? Vizsgáljuk meg, mennyivel nagyobb energiát kapunk indukált szórás esetén? A Thomson szórásra tételezzük fel, hogy

$$\alpha \leq 1$$

$$\Delta\Omega \sim 10^{-2}$$

$$\frac{\Delta\Omega}{qv_{te}} \sim 10^{-1}$$

és

$$S_{th} \sim 0,3$$

ami általában jó közelítéssel teljesül.

A. Tokamak plazma

Vegyük az MT—1 (a Központi Fizikai Kutató Intézetben) tokamak várható adatait:

$$N = 2 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$$

$$T_e = 4,6 \times 10^6 \text{ K}$$

aminek megfelelően

$$k_D = 9,5 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$$

$$\omega_p = 7,9 \times 10^{10} \text{ radsec}^{-1} \quad (\bar{v}_p = 0,42 \text{ cm}^{-1})$$

valamint a hangolható hibrid impulzus széndioxid lézer keresztezett hangolt nyaláb-jait vehetjük pumpáló hullámoknak a következő adatokkal

$$k_0 = 5,9 \times 10^5 \text{ radm}^{-1}$$

$$P = 10^7 \text{ watt}$$

$$b = 10^{-3} \text{ m}$$

$$W = 10^6 \text{ sec}^{-1}$$

Ekkor $W \ll \delta\omega$ és a szórás szöge $\vartheta/2 = 1,6 + 10^{-3} \text{ rad}$. A termikus hullámokon szórt energia

$$\varepsilon_4^{(\text{th})} = 3 \times 10^{-16} \varepsilon_3 \quad (31)$$

és az indukáltan szórt energia

$$\varepsilon_4^{(\text{ind})} = 3,5 \times 10^{-12} \varepsilon_3 \quad (32)$$

Amint a (31) kifejezésből látható a Thomson szórásban, ha próbahullámnak rubin lézer fényét használjuk ($\lambda = 7,10^{-7} \text{ m}$), joulnyi impulzus energiából körülbelül ezer foton szóródik, amelyet a modern, nagy érzékenyséű fotoelektron-sokszorozókkal (detektálási határfok körülbelül 25%) jól lehet regisztrálni. Ha a próbahullám hullámhossza $\sim 10^{-5} \text{ m}$, mint a CO_2 lézer esetében, a szórt fotonok száma ugyan egy nagyságrenddel nagyobb, de a rendelkezésre álló detektorok érzékenysége rosszabb ezen a hullámhosszon.

Az indukált szórásban szórt energia azonban négy nagyságrenddel több, mint a Thomson szórás esetén. A detektorok zajjal ekvivalens teljesítménye bár elmarad a fotoelektron-sokszorozó mögött, de a minimális regisztrálható energia körülbelül 10^{-15} joule , amely három nagyságrenddel kisebb, mint az indukáltan szórt energia egy joule bemenő energia esetén. A szórt energia tehát elvileg jól regisztrálható.

A mérést úgy kell végezni, hogy a lézerek differencia frekvenciáját $\Omega = \omega_{20} - \omega_{10}$ -t rá kell hangolni a plazmarezonanciára, hiszen $w \ll \delta\omega$. A rezonancia frekvenciából (23) képlet alapján a sűrűség, ill. a (24) spektrális eloszlásban szereplő paramétereknek (α , V_{te}) a mért spektrumhoz való illesztéséből a sűrűség és a hőmérséklet is meghatározható.

Problémát az impulzus kisülés rövid idejét figyelembe véve, az jelent, hogy a frekvenciát igen rövid idő alatt folyamatosan kellene változtatni. A CO_2 lézer nekünk jelenleg rendelkezésre álló változata azonban csak vonalról vonalra $62\text{--}150 \text{ m}^{-1}$ frekvencia lépcsővel hangolható.

További probléma az interferáló sugarak által bezárt szög kicsisége, s ezért a szórt sugárzás is kis szögben előre fog szóródni. Ezért a szórt hullám a próbahullámtól nem elválasztható s ezért a detektálásnál nagy háttér fog jelentkezni. Nem lehet azt mondani, hogy ez a diagnosztikai módszer tokamak plazma diagnosztikájára teljesen reménytelen. De a fent elmondottak alapján sok problémát kell még kísérletileg megvizsgálni, hogy el lehessen dönteni, hogy ez a módszer jobb-e, mint a Thomson szórás. A kérdéssel azonban feltétlenül érdemes foglalkozni, hiszen a Thomson szóráshoz viszonyítva az energianyereség négy nagyságrend.

Ha a tokamak plazma vizsgálatához a CO_2 lézer helyett CH_3F impulzus lézert választunk, a következő adatokkal

$$\lambda = 496 \mu\text{m}$$

$$k_0 = 1,3 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$$

$$P = 10^6 \text{ W}$$

$$W = 10^6 \text{ sec}^{-1}$$

$$b = 10^{-3} \text{ m}$$

az indukáltan szórt energia már

$$\varepsilon_4^{(\text{ind})} = 2,4 \cdot 10^{-7} \varepsilon_3$$

ami további öt nagyságrend javulást jelent. Ez az energia már piroelektromos detektorral is regisztrálható.

Mind a CO_2 lézernél, mind a CH_3F lézernél problematikus, hogy megfelelnek-e a lézer paraméterek a mérési követelményeknek. A legfontosabb probléma a hangolás kérdése, mely nagy nyomású CO_2 lézer esetén valószínűleg megoldható, míg CH_3F lézer esetén nem lehet tudni, hogy van-e megoldás.

A CH_3F lézer alkalmazása esetén a szórési szög már lényegesen nagyobb $\vartheta = 1,5 \times 10^{-1} \text{ rad}$, ami a detektálást megkönnyíti.

Az előzőekhez hozzá kell még tenni, hogy az MT—1 tokamak sűrűségét pesszimistikusan becsültük $2 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ -re, aminél egy nagyságrenddel jobbat ad az optimista becslés. Ennek megfelelően az indukáltan szórt energia CO_2 lézer esetén kb. $10^{-9} \varepsilon_3$, illetve CH_3F lézer esetén $7 \times 10^{-5} \varepsilon_3$, amelyek már meglehetősen nagy értékek. Nagyobb, illetve sűrűbb plazmájú tokamakok esetén további növekedésre lehet számítani.

B. Impulzus ív

Laboratóriumunkban Thomson szórásos modell mérések céljára létrehoztunk egy impulzus ív plazma forrást [5] a következő adatokkal

$$N = 2 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$$

$$T_e = 3,5 \times 10^4 \text{ K}$$

aminek megfelelően

$$k_0 = 1,1 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$\omega_p = 8 \times 10^{12} \text{ radsec}^{-1} \quad (v_p = 42,5 \text{ cm}^{-1}).$$

Ha a pumpáló hullámoknak a hangolható neodimiumüveg lézersugarait választjuk a következő adatokkal

$$k_0 = 5,9 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$$

$$P = 10^7 \text{ watt}$$

$$b = 10^{-4} \text{ m}$$

$$W = 3 \times 10^9 \text{ radsec}^{-1}$$

akkor a szórás szöge $\vartheta = 0,37$ rad és a termikus hullámokon szórt energia

$$\varepsilon_3^{(\text{th})} = 3 \times 10^{-12} \varepsilon_3$$

míg az indukált hullámon szórt energia

$$\varepsilon_4^{(\text{ind})} = 4,7 \times 10^{-7} \varepsilon_3.$$

A termikus hullámokon való szóráshoz viszonyított energianövekedés öt nagyságrend. Az indukáltan szórt energia kiválóan mérhető, a lézer könnyen hangolható rezonanciára. A szórási szög nagy, tehát ennek a kísérletnek elvégzésére feltétlenül reményteljes.

C. Lézer plazma

Még jobb a helyzet a lézer által keltett gáz plazma esetén. A plazma várható paraméterei

$$N = 2 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

$$T_e = 5,8 \times 10^5 \text{ K}$$

aminek megfelelően

$$k_0 = 9 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$$

$$\omega_p = 3 \times 10^{14} \text{ radsec}^{-1} \quad (v_p = 1644 \text{ cm}^{-1}).$$

Pumpáló lézernek a rubin lézer és a rubin lézer hullámának a 3' metil butadién indukált Raman szórásában eltolt frekvenciájú fényét lehet felhasználni, melyeknek az adatai a következők

$$k_0 = 9 \times 10^6 \text{ radm}^{-1}$$

$$k'_0 = 9,15 \times 10^6 \text{ radm}^{-1}$$

$$P = 10^6 \text{ watt}$$

$$b = 2 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$W = 3 \times 10^{10} \text{ sec}^{-1}$$

A szórás szöge ennek megfelelően $\vartheta/2 = 1,77$ rad és $\delta\omega < W$. A szórt energiák tehát

$$\varepsilon_4^{(\text{ind})} = 2,3 \times 10^{-4} \varepsilon_3$$

és

$$\varepsilon_3^{(\text{th})} = 5 \times 10^{-10} \varepsilon_3.$$

A termikushoz viszonyított növekedés körülbelül hat nagyságrend és az indukáltan szórt energia közönséges fotodiódával detektálható.

A lézer hangolására nincs szükség, mert a Raman szórt sugárzás elég széles spektrumú, úgy hogy a frekvencia hangolás helyett a szórt fény frekvencia analízisének kell végezni.

D. Szórás ion-akusztikai hullámon

Ha a pumpáló hullámok frekvencia differenciáját az ion-akusztikai hullám frekvenciájára hangoljuk $T_i > T_e$ esetében szintén rezonancia lép fel [13]. A Thomson szóráshoz viszonyított szórási energianövekedés hangolható hibrid CO_2 lézer esetén MT-1 tokamak plazmára:

$$\eta_{\max} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\nu_e}{\nu} \right)^2 \frac{r_0 \cdot Q^2 \cdot p^2}{\kappa^2 \cdot T_e^2 \cdot \nu \cdot c} = 4,5 \cdot 10^3,$$

ahol ν_p , ν a plazmafrekvencia, a fényhullám frekvenciája és

$$Q = \sqrt{8/\pi} \cdot \sqrt{m_i/m_e}$$

az ion-akusztikus hullám jósági tényezője [6]. A rezonancia frekvencia

$$\Omega_{\text{rez}} = 2 \cdot 10^{-1} \text{ m}^{-1}$$

ami körülbelül a kétméteres rezonátor módusai közti frekvenciatávolság. A szórási szög $2,2 \times 10^{-2}$ rad, ami szintén meglehetősen kicsi. A rezonancia-értékből határozható meg az elektronok hőmérséklete az

$$\Omega_{\text{rez}} = \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_i}} \cdot q$$

képlet alapján [6]. A lézer frekvenciáját tehát hangolni kell és a rezonancia helyéből állapítható meg a plazma paraméter.

Ebben az esetben is igaz tehát, hogy impulzusplazmák esetén a gyors frekvenciahangolás problémát okoz. Lehetséges egy olyan megoldás, hogy a pumpáló hullámok egyike széles frekvenciájú, míg a másik keskeny. Ebben az esetben a rezonanciát a megfigyelési útban elhelyezett spektrális bontó elem állapítja meg. A fenti esetben nagy nyomású CO_2 lézer adhatja a széles spektrumú pumpáló hullámot, míg a hibrid lézer a keskeny sáv szélességű pumpáló hullámot.

E. Egyéb nemlineáris szórások

Meg kell említeni, hogy egy pumpáló nyaláb is indukálhat ion-akusztikus hullámot és egyidejűleg szóródik is rajta, rendszerint „hátrafelé” [21]. Ezt a szórást indukált Brillouin szórásnak nevezzük [22]. A visszaszórt nyaláb spektrumának mérésével az ionok hőmérséklete határozható meg [23]. Ez mint látható, nem négyfotonos szórás, de meg kellett említenünk, mert a plazmával való nemlineáris kölcsönhatás eredményeként lép fel és olyan fontos paramétert lehet vele meghatározni, mint az ionhőmérsékletet, míg a Thomson szórásban mindig csak az elektronhőmérsékletet, amit meg tudunk határozni.

5. Az eddig végzett kísérleti vizsgálatok

Az irodalomban csupán két cikk ismeretes, amelyben négyfotonos szórás segítségével plazmaparamétereket határoztak meg [24, 25]. A két cikk is tulajdonképpen csak egy mérésről való két publikáció, melyek megjelenési ideje között nyolc év van. A szerzők hangolható festéklézerek nyalábjait használták pumpáló nyaláboknak, míg a próba nyaláb a festéklézereket is pumpáló rubin lézer nyaláb. A szórt fény spektrumát mérték. A plazma egy folytonos levegőben égő ív volt kb. 10^{22} m^{-3} sűrűséggel és 1 elektronvolt körüli hőmérséklettel. A Thomson szóráshoz viszonyított intenzitás nyereség egy és két nagyságrend között volt. Az eredmény a szerzők állítása szerint jól egyezett az elmélet [10] eredményeivel.

6. Thomson szórást vagy négyfotonos szórást használjunk plazmadiagnosztikára? Összefoglalás

Különösen nagy hőmérsékletű plazmáknál, mint a tokamak plazma, valóban problémát jelenthet a Thomson szórásban fellépő szórt fény kis intenzitása. Különösen igaz ez akkor, ha az ionok hőmérsékletét kell meghatározni, amikor a kollektív ion „feature” csak a kis szögű előreszórásban jelentkezik [1]. Ez az egyik legfontosabb, ma még meg nem oldott feladat a lézeres plazmadiagnosztika területén [26].

Termonukleáris fúziónál ugyanis az ionhőmérséklet a legfontosabb paraméter. Az ionhőmérsékletet magas hőmérsékletű plazmák esetén csak passzív vagy aktív korpuszkuláris diagnosztikával [27] lehet meghatározni. Ez a módszer azonban nem lokális módszer, csupán integrális értéket ad, aminek interpretálása nehézségekbe ütközik. A Thomson szórásos mérés természetéből kifolyólag lokális módszer, bár a helyfelbontás ez esetben az előreszórás miatt rossz. Ekkor a szórásra feltétlenül hosszú hullámhosszú, nagy teljesítményű impulzus lézert kell használni, hogy a szórási szög minél nagyobb legyen és nagy érzékenységu távoli infravörös detektort homodin vagy heterodin üzemmódban.

A négyfotonos plazmadiagnosztika feltétlenül eszközigényes nagy berendezés ma még, de ez a viszonylagosan bonyolult volta kevésbé feltűnő a fent körvonalmazott ion hőmérsékletmérésénél.

Érdemes-e egyáltalán nemlineáris szórásokkal foglalkozni? Erre a kérdésre feltétlenül igennel kell válaszolni, hiszen a nemlineáris fény—plazma kölcsönhatás sok érdekes problémát rejt. A kutatások eredménye azután automatikusan adja a plazmadiagnosztikai berendezést.

IRODALOM

1. J. Sheffield, Plasma Scattering of Electromagnetic Radiation, Academic Press New York, San Francisco, London, 1975.
2. D. E. Ewans, J. Katzenstein, Rep. Prog. Phys., 32, 207, 1969.
3. D. E. Ewans, Physica, 82C, 27, 1976.
4. L. N. Pjatnyickij, Lazernaja diagnostika plazmü, Moszkva, 1976.
5. J. S. Bakos, P. N. Ignác, J. Szigeti, Reprint of Central Institute for Physics Budapest KFKI—1979—56.
6. A. F. Aleksandrov, L. C. Bogdankevich, A. A. Rukhadze: Osnovi elektrodinamiki plazmi Moszkva Vűszsaja skola, 1978.

7. *N. M. Kroll, A. Ron, N. Rostoker*, Phys. Rev. Lett., **13**, 83, 1964.
8. *C. Weyl*, Phys. Fluids, **13**, 1802, 1970.
9. *J. Meyer, B. Stansfield*, Can. Journ. Phys., **49**, 2187, 1971.
10. *J. Meyer*, Phys. Rev. A, **6**, 2291, 1972.
11. *E. S. Weibel*, Phys. Fluids, **19**, 1237, 1976.
12. *E. S. Weibel*, Phys. Rev. Lett., **37**, 1619, 1976.
13. *F. V. Bunkin, F. V. Kalinin, P. P. Pashinin*, Kvantovaya Elektronika, **5**, 468, 1978.
14. *K. B. Dystke, E. Mjølhus, J. Trulsen*, J. Geophys. Res. **83**, 1985, 1978.
15. *H. C. Praddeude, D. W. Scudder, R. Lax*, Appl. Phys. Lett., **35**, 766, 1979.
16. *F. V. Kalinin*, Kogerentnoe heterofotonovo raszeanyie lazernovo izlucsenyie v plazma, Kandidátusi disszertáció, Moszkva, 1979.
17. *B. D. Fried, D. S. Conte*, The Plasma Dispersion Function, Academic Press, New York, 1961.
18. *H. J. Eicher*, Opt. Act., **24**, 631, 1977.
19. *M. D. Levenson, N. Bloembergen*, Phys. Rev., **B10**, 4447, 1974.
20. *J. S. Bakos, Z. Füzesy, Zsuzsa Sörlei, J. Szigeti*, Phys. Lett., **50A**, 227, 1974.
21. *B. I. Cohen, C. E. Max*, Phys. Fluids, **22**, 1115, 1979.
22. *A. A. Offenberger, M. R. Cervenán, A. M. Yam, A. W. Pasternak*, Journ. Appl. Phys., **47**, 1451, 1976.
23. *Z. A. Pietrzyk, R. Massey*, Journ. Appl. Phys., **48**, 1867, 1977.
24. *B. L. Stansfield, R. Nodwell, J. Meyer*, Phys. Rev. Lett., **26**, 1219, 1971.
25. *L. A. Godfrey, R. A. Nodwell, F. L. Curzon*, Phys. Rev., **A20**, 567, 1979.
26. *H. C. Proddande, P. Woshobsinikov, D. Cohn*, Plasma Science Int'l Conference Troy, N. Y. 1977, May.
27. *V. V. Afrosimov*, Diagnostiki plazmi, 1973, 218. old.

KÖNYVISMERTETÉS

**H. Haken—H. C. Wolf: Atom- und Quantenphysik:
Eine Einführung in die experimentellen und theoretischen Grundlagen.
Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1980**

Szerzők, mindketten a stuttgarti egyetem professzorai, éveken át az atomfizika, ill. kvantumfizika tanításában szerzett tapasztalataikat teszik e tankönyvben közzé. Mint bevezetőjükben is mondják, mind a fizikában, mind a közeli tudományterületekben — így pl. a kémiában is — az atomok és a kvantumok úgyszólván azonnal kulshelyzetbe kerülnek, ezért különös gondot kell fordítani arra, hogy az oktatásban mihamarabb megfelelő kísérleti és elméleti tapasztalat álljon a tanulók rendelkezésére. Szerzők a könyv tanúsága szerint a tanmenetet úgy építették fel, hogy már a harmadik félévben tanítani lehessen, ehhez szabták a matematikai formalizmus igényeit. Ugyanakkor törekedtek — és azonnal tegyük hozzá, sikerrel — arra, hogy a kísérleti eredmények alapjaira építsék az elméleti kijelentéseket, ezeket a kísérleti alapokat egyszerűen, mindig a lényeges pontokat kiemelve mutassák be, az elméleti analízis lényegretörő és a lehető legegyszerűbb, ugyanakkor egzaktitását mindig gondosan megőrző s legfőképpen a szokatlan újdonságra mutató legyen. Érdemes a tankönyv jellemzésére röviden átfutni fejezeit, zárójelben megemlítve azokat a problémákat, fogalmakat, amelyek tárgyalására ott sor kerül.

Bevezetés (a klasszikus és a kvantumfizika rövid jellemzése, történeti áttekintés) — Az atomok tömege és mérete (tömeg, Loschmid-szám hatáskeresztmetszet, röntgensugár elhajlása kristályon) — Az izotópia (tömegspektroszkópia, izotópszétválasztás) — Az atomok magszerkezete (elektronok áthaladása anyagon, Rutherford-szórás, magsugár) — A foton (hőmérsékleti sugárzás, fotoeffektus, Compton-effektus) — Az elektron (... , az elektron hullámtermészete) — Az anyaghullám tulajdonságai (hullámcsoport, valószínűségi értelmezés, a Heisenberg-féle határozatlansági reláció, energia — idő — határozatlansági reláció) — A H-atom Bohr-elmélete — A kvantumelmélet matematikai eszközei (a dobozba zárt részecske, a Schrödinger-egyenlet, operátor, várható érték, hullámfüggvény, egyszerre mérhetőség, az oszcillátor kvantummechanikája) — A H-atom kvantummechanikája — Az *l*-elfajulás feloldása az alkáli atomok szinképében — Pálya- és spin-mágnesség, finomszerkezet (... Lamb-eltolódás) — Atomok mágneses térben, félklasszikus leírás és kvantummechanikai leírás (Zeeman-effektus... optikai pumpálás ... spin, spinoperátor... Pauli-egyenlet... spinpálya-csatolás a kvantummechanika szerint... a spin viselkedése egy időben állandó és egy arra mérőleges, de időben változó mágneses térben, ..., a Bloch-egyenlet) — Atomok elektromos térben (kétnívójú atomok kölcsönhatása koherens rezonáns fénnel, spin- és foton-visszhang) — Az optikai átmenetek általános törvényei (szimmetriák és kiválasztási szabályok, vonalszélesség, vonalak) — Több-elektromos atomok (Lj- és jj-csatolás, ..., többszörös gerjesztések) — Röntgenszinképek — A periódusos rendszer felépítése) ... héjszerkezet, alapállapot, gerjesztett állapotok, többtestprobléma, Hartree—Fock-módszer) — Hiperfinom szerkezet (... a magok elektromos és mágneses kvadrupól-nyomatéka ...) — A lézer — Az optikai spektroszkópia modern módszerei (a kvantum-lebegés, a Doppler-mentes telítési spektroszkópia és a kétfotonos abszorpció).

Szerzők a jelenségek diszkussziójával arra mutatnak rá, hogy az atomokról, kvantumokról tett kijelentéseinket a tapasztalat erősökoltta ki, az a tapasztalat, amely a körülöttünk levő (technikai) világot át is alakította. Erre szolgál pl. a lézerről szóló fejezet különösen gondos előkészítése.

Különösen értékesnek tartjuk — és ez emelte a hosszabb tárgyköri bemutatást —, hogy a könyv bizonyítani látszik: a kísérlet és elmélet közös erejével az oktatás korai szakaszán adható ilyen atomfizikai áttekintés, ez a szakstudiumok helyes kiválasztását segíti a speciális irányba törő hallgatókban, az általánosabb képzést pedig korszerű ismeretekkel látja el. Szerzők e feldolgozása értékes segítséget nyújtana a magyar főiskolai és egyetemi hallgatóságnak is, akár tankönyv céljaira magyarul is ki lehetne adni. Klasszikusként értékelt magyar tankönyveinkkel szemben mind-

össze két szempont tünteti ki: az 1980-as évszám és az, hogy aránylag egyszerű eszközökkel meg komplex szemléletével milyen nagy területet képes érdekesen bemutatni. A könyv pedagógiai értékét nagymértékben emeli a 228, sokszor egyszerűségében zseniális rajz, amely bizony nagy pedagógiai tapasztalatról tanúskodik.

Abonyi Iván

**M. Schlenker, M. Fink, J. P. Goodgebauer (ed.-s):
Imaging Processes and Coherence in Physics. Springer-Verlag, 1980**

A könyv egy 1979-ben a franciaországi Les Houches-ben rendezett szakmai találkozó (workshop) előadásainak anyagát tartalmazza. A szervezők célja az volt, hogy a véleménycsere katalizálására egy asztal mellé ültessék azon szakembereket, akik különböző „részecskéket” (fotonok, elektronok, neutronok, ionok és fononok) használnak fel „leképezésre”. Különösen a lézer- és a nukleáris technika fejlődése tette lehetővé, hogy egyrészt ezen részecskék köre, amelyeket a leképezésben felhasználunk kiszélesedjen, másrészt a „képek” minősége jelentősen növekedjen.

Az előadók részletesen leírják a leképezéshez használható részecskenyalábok előállításával, ill. tulajdonságaival, a sugárzás és anyag kölcsönhatásával amely a leképezésnél szerepet játszik, továbbá a képalkotással, detektálással és feldolgozással kapcsolatos legújabb eredményeket és lehetőségeket. A fotonok segítségével történő leképezés területén a Röntgen-tartománytól a látható spektrumon keresztül a rádiófrekvenciás (Mag Mágneses Rezonancia) tartományig tartó széles frekvenciakála lehetőségeit ismerhetjük meg. Az elektronok, neutronok és ionok (csatorna-jelenség) leképezésre való alkalmazása különösen nagy fejlődésen ment át az utóbbi évtizedben, amit a könyv jól tükröz. Mivel a leképezésben a nyalábok koherencia tulajdonságai fontos szerepet játszanak. ezekkel az előadók igen behatóan foglalkoznak.

A vázolt tematikát az előadók szerteágazóan és érdekesen mutatják be, ami ezt a kétségtelenül egzotikusan összehozott anyagot mind a fizikusok, mind az anyagtudományokkal vagy biológiai struktúrákkal foglalkozó szakemberek számára hasznos és érdekes olvasmánnyá teszi.

A gazdag és sokoldalú anyagot méltóan koronázza meg az utolsó előadás, ugyanakkor hűen fejezi ki a tanácskozás légkörét „A koherencia gyönyörű” címmel.

Króó Norber

**M. S. Feld and S. Lekhtov (ed.-s):
Coherent and Nonlinear Optics.
Recent Advances.
Springer-Verlag 1980**

A könyv a rohamléptekkel fejlődő nemlineáris optika néhány, valóban az érdeklődés középpontjában álló, izgalmas kérdésével, illetve lehetőségével ismerteti meg az olvasót.

Noha az optika alaptörvényeinek zöme közel egy évszázada született meg, a koherencia és nemlinearitás viszonylag új fogalma, igen fontos szerepet játszanak a lézersugárzás és anyag kölcsönhatásainak leírásában. Alapvető szerepet játszanak azokban az — egyébként nagy számban ismert — módszerekben, amelyeket atomok és molekulák tanulmányozására az utolsó két évtizedben kidolgoztak. Ezek közül ismerhetjük meg különböző, a téma kiemelkedő képviselőiként ismert szerzők tollából azt a három területet ((1) koherens nemlineáris optika és koherens rezonancia effektusok; (2) többfotonos rezonancia folyamatok; (3) koherens Raman-szórási folyamatok) amelyek a témakör talán legizgalmasabb ágait jelentik.

Alapos leírásban ismerhetjük meg az ún. szupersugárzás (szuperradiance) jelenségét, melynek lényege, hogy egy atomokból vagy molekulákból álló rendszer spontán sugárzása sokkal intenzívebb lehet, mint ugyanolyan számú izolált atomé. Az atomokat sugárzási terük csatolja egymáshoz és kooperatív módon sugároznak.

A koherens folyamatokon alapuló nagy felbontóképességű spektroszkópia legújabb lehetőségeit ismerhetjük meg a következő fejezetből, amely Doppler — kiszélesedéstől mentes, tehát igen keskeny nemlineáris rezonanciák mérésén alapul.

Intenzív lézersugárzás terében lehetőségük van az atomoknak arra, hogy két diszkrét nívójuk közötti átmenet egynél több foton szimultán abszorpciója eredményeként jöjjön létre. E témakört az utóbbi évtizedben igen kiterjedten vizsgálták. Ezen eredmények egy részét tárgyalja a könyv arra az esetre korlátozódva, amikor az n -foton átmenet során nem játszik szerepet közbenső rezonancia nívó.

A könyv következő témája a soknívós rendszerek (sokatomos molekulák) lézerfény segítségével való koherens gerjesztése. Elsősorban a jelenség elméleti vonatkozásait és a leíráshoz szükséges kvantummechanikai módszereket ismerhetjük meg a disszociációs küszöb alatti lézerintenzitások tartományában és abban az esetben, ha a molekulák közötti ütközések hatása a rotációs—vibrációs spektrumra elhanyagolható.

Ha a vizsgált molekulák kondenzált rendszerekben helyezkednek el, a szoros pakolás miatt gyors kölcsönhatás lép fel, amely a koherensen gerjesztett molekuláris rendszer fázisdeszinkronizálására vezet. E folyamatok relaxációs ideje a pikoszekundumos időtartományba esik, mérésekre módusszinkronizált lézereket alkalmazó spektroszkópiai módszereket kell felhasználni. Ezek elméleti és kísérleti alapjait ismerteti meg a következő fejezet.

Végül a koherens Raman-spektroszkópia legújabb módszereinek (Koherens anti-Stokes Raman spektroszkópia, Raman indukált Kerr-effektus spektroszkópia, indukált Raman spektroszkópia) leírását olvashatjuk gondos tálalásban.

A könyv elsősorban a nemlineáris optikai jelenségek területén dolgozó kutatók számára jelent hasznos olvasmányt, de ajánlható a modern optika iránt érdeklődő vagy azt oktató szakemberek számára is.

Króó Norbert

R. Pratesi and C. A. Sacchi (ed.-s): Lasers in Photomedicine and Photobiology
Proceedings of the European Physical Society, Quantum Electronics Division,
Conference, Florence, Italy September 3—6 1979
Springer-Verlag, 1980

A régen ismert és már rutinszerűen használt nagyintenzitású lézeralkalmazások mellett (sebészeti, endoszkópos fotokoagulációs és szemészeti alkalmazások), ezen a konferencián kis teljesítményű, a látható spektrális tartományban működő lézerek orvosi és biológiai kutatási lehetőségeit taglalták nagyobb részét. (Tumork fotodinamias kezelése, fotokemoterápia, ezen belül a bőrgyógyászati alkalmazások, újszülöttkori hiperbilirubinémia kezelése és az igen nagy vitát kiváltó alacsony teljesítményű lézerrel végezhető sebgyógyítás. Ez utóbbi kérdéskör azért különösen izgalmas, mert több országban vannak már jelentős pozitív klinikai tapasztalatok, a lézerfény biológiai stimuláló hatásával kapcsolatban, de a jelenségek biofizikai, biokémiai háttere még tisztázatlan.)

Helyet kaptak olyan biológiai objektumokkal kapcsolatos fizikai mérési alkalmazások is, amelyek speciálisan *csak* lézerrel végezhetőek el (abszorpciós és fluoreszcencia spektroszkópia, Raman és pikoszekundumos spektroszkópia).

A könyv elsősorban a lézerek lehetséges alkalmazási területeit kutató fizikusok és a lézertechnika területén járatos biológusok, biokémikusok figyelemébe ajánlható.

Fenyő Márta

Yu. I. Ostrovsky, M. M. Butusov, G. V. Ostrovskaya:
Interferometry by Holography
Springer Series in Optical Sciences, Vol. 20.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

Az ismertetésre kerülő könyv a fenti szovjet szerzőhármas „Golograficeszkaja Interferometrija” című, a „Nauka” Kiadó által, Moszkvában 1977-ben megjelentetett monográfiájának angol nyelvű fordítása.

A szerzők könyvüket a holografikus interferometriába való bevezetésnek szánták. A holográfiának a különböző területeken való alkalmazása ma már igen elterjedt. Az alkalmazások közül különösen a holografikus interferometria emelkedik ki. Gépszerkesztő mérnökök, turbinatervezők, biológusok, kristallografusok használják fel ennek az igen érzékeny vizsgálati módszernek az eredményeit.

A jól áttekinthető, rendszerezett felépítésű mű öt fejezetre tagolódik. Az első fejezet az általános alapelveket foglalja össze. A fényinterferenciának jól követhető, világos matematikai tárgyalását adják meg a szerzők. Rendszeresen sorra veszik a sík- és gömbhullámok, valamint a különböző hullámhosszúságú fénynyalábok interferenciáját, majd definiálják a koherenciát. Az elvi tárgyalás után az optikai interferometria gyakorlati megvalósításainak ismertetésére kerül sor. A különböző szempontok szerint osztályozott interferométereknek és ezek alkalmazási lehetőségeinek részletes

tárgyalása következik ezután (törésmutató, rétegvastagság eloszlás meghatározás, metrológiai és spektroszkópiai alkalmazások).

Ebben a fejezetben kerül ismertetésre a holográfia is. Rövid történeti bevezető után a hologram felvételére és rekonstrukciójára vonatkozó matematikai alapegyenletek bemutatása, majd a holográfia különböző alapelvek szerinti osztályozása után röviden tárgyalásra kerülnek a holográfia alkalmazási lehetőségei, beleértve a nem fényhullámok által létrehozott holográfiát is. A holografikus interferometria általános alapelveinek és főbb tulajdonságainak taglalása után a két fő eljárás — a valós idő (real time) és a kettős megvilágítás (double exposure) módszer — bővebb értelmezésével zárul az első fejezet.

A második fejezet a kísérleti eljárás leírását tartalmazza. A holografikus interferometriában alkalmazott koherens fényforrások (gázlézerek, szilárdtest- és festéklézerek) áttekintő leírása után a holográfiás felvételi anyagok főbb tulajdonságainak ismertetése következik. Az ezüsthalogén fotografikus anyagokon kívül az utóbbi években alkalmazásra kerülő újabb anyagok (fotovezető-ferroplaszt anyagok és a Szovjetunióban 1976-ban kifejlesztett ún. FTIROS) is említésre kerülnek. A holografikus interferometria gyakorlati megvalósításához szükséges felépítési eszközök, rezgésmentes holografikus asztalok bemutatása és az optikai építőelemek (nyalábtágító, nyalábosztó, hologram emez befogó stb.) részletes ismertetése mellett, ezek laboratóriumi elkészítésére is praktikus tanácsokkal szolgálunk a szerzők.

A transzparens tárgyak fázisinhomogenitása holografikus úton való vizsgálatának leírásával folytatódik a 3. fejezet. A fázisinhomogenitást láthatóvá tevő korábbi módszerek („schlieren”- és árnyék-módszer) mellett kifejti a holografikus interferometria alapelvét. A különböző felvételi módokat, mint pl. a két- és háromdimenziós eljárásokat nemcsak elméletileg tárgyalják, hanem az optikai elrendezések részletes bemutatásával gyakorlatilag is illusztrálják. Megadják a törésmutató térbeli eloszlásának e módszer alapján való számítását. A plazma holografikus diagnosztikájára is részletesen kitérnek a szerzők, hiszen ezzel kapcsolatban mintegy tíz év óta számos publikációjuk jelent meg. Ismertetésre kerül a lézersugár által keltett szikra vizsgálata, és az erre a célra általunk kifejlesztett ún. cineholográfia. A szilárd testek felületén, impulzus lézer által indukált, és villanólámpákban létrejövő plazma, valamint a „pinch”-effektus, továbbá gázdinamikai hatások (gázáramlás, lökéshullám, repülő tárgy körüli, szélcsatornában létrejövő gázáramlás stb.) interferometrikus tanulmányozásával zárul ez a rész.

A 4. fejezetben a különböző felületek elmozdulásainak és deformációinak vizsgálatával találkozunk. Az interferencia-kép létrejöttének folyamatát tárgyalják elméletileg. A Kirchhof-integrállal és korrelációs függvények segítségével értelmezik a holografikus interferogramokat. Ezt követően kísérleti eljárásokat adnak meg az elmozdulások (transzláció és rotáció), a kiemelkedések (relief) és deformációk kiértékelésére. Ez utóbbinál részletes elemzésre kerül a két hullámhosszúságú megvilágítású és az immerziós módszer. Az egyes anyagokban keletkező hibák (szakadás, repedés) interferenciás vizsgálatának leírása is szerepel.

Az utolsó fejezetet a rezgések holografikus tanulmányozásának szentelték a szerzők. A konstans és lépcsőzetes sebességgel mozgó, valamint harmonikus rezgőmozgást végző tárgyak interferometrikus vizsgálatait, továbbá a Powel—Stetson módszert és a stroboszkopikus holográfiát tárgyalják.

Az egyes fejezetekben az elméleti vonatkozások ismertetése jó egyensúlyban van a kísérleti, gyakorlati részek tárgyalásával. A könyv megértéséhez elegendő az egyetemeinken oktatásra kerülő elméleti és kísérleti optika ismerete.

A könyv felépítése jól áttekinthető, stílusa világos. A formai kivitelezés tetszetős. Kiemelendő a megértést jelentősen elősegítő, az optikai alapelveket magyarázó és a kísérleti elrendezések sémáját felvázoló rajzok, valamint az optikai egységeket, ill. az interferogramokat bemutató fényképek tökéletes, szép technikai kivitelezése. A kötet végén, az egyes fejezetekhez külön számozással felsorakoztatott, közel négyszáz irodalmi idézet lehetővé teszi a témában elmélyedni óhajtó olvasó ismereteinek bővítését.

Összefoglalva, a jó felépítésű, viszonylag korszerű tárgyú könyv ajánlható a holográfia elméletének és gyakorlatának alapjait ismerő mindazon szakemberek (fizikusok, mérnökök) számára, akik a holografikus interferometria felsorolt, igen érzékeny vizsgálati módszereit alkalmazni óhajtják. Emellett az optikai és holográfiai ismereteiket bővíteni kívánó egyetemi oktatók és hallgatók is igen hasznosan forgathatják ezt a monográfiát.

Gáti László

C. Edwards (ed.): Gravitational Radiation, Collapse Objects and Exact Solutions
Proceeding., Perth 1979
Lecture Notes in Physics vol. 124. Berlin, Heidelberg, New York 1980
Springer-Verlag

Ez a kötet azon előadások egy részének anyagát tartalmazza, amelyeket a Perth-ben rendezett Einstein Centenárium Nyári Iskolán tartottak 1979 januárjában. Az iskolát azzal a céllal rendezték, hogy tapasztalatcserére adjanak lehetőséget azoknak a matematikusoknak és elméleti fizikusoknak, akik az Einstein-féle általános relativitás elmélet segítségével vizsgálják a kollabált és kollapszust végző csillagszerű objektumok sajátosságait; azoknak a csillagászoknak és asztrofizikusoknak, akik nemcsak az imént említett objektumokról való információk szerzésével, hanem azoknak a fizikai modellekkel való összevetésével is foglalkoznak; és végül azoknak a kísérleti fizikusoknak, akik gravitációs hullám-detektor elkészítésén fáradoznak. A nyugat-ausztráliai egyetem és a római egyetem által közösen szervezett nyári iskola sikerének alapvető összetevője volt e három különböző érdeklődési csoport tapasztalatainak összehasonlítása.

A kötet egyedül R. Ruffini előadásainak anyagát nem tartalmazza. Az előadásokon elhangzott gondolatok egy része, továbbfejlesztve, a Physics Letters-ben, illetve a Nuovo Cimento-ban fog megjelenni. Az előbbiben Fereirinho és Stella, az utóbbiban Stella és Wilson tollából.

A pulzárok felfedezése 1967-ben, gravitációs kollapszus maradványokkal való azonosításuk, a kettős röntgen források felfedezése 1971-ben, mind világosan mutatják, hogy ezek a rendszerek, amelyek viselkedésében az általános relativisztikus effektusoknak igen nagy szerepük van, valóban a mi saját galaxisunkon belül léteznek. A gravitáció Einstein-féle elmélete, amely roppant nagy matematikai nehézségek árán nőtt ki egy igen elegáns elméleti rendszerből — de minimális észlelhetőségi lehetőséggel rendelkezik —, a relativisztikus asztrofizika alapja. Már az általános relativitás elmélet fejlődésének kezdeti szakaszán Einstein annak bizonyítását adta, hogy — amint az az elmélet téregyenleteiből következik — létezniük kell a természetben gravitációs hullámoknak. Ő maga mutatott rá a sugárzás generálásának és detektálásának nehézségeire is, amelyek a csatolási állandó kicsinyiségéből következnek. Az azonban mindenki előtt világos, hogy a gravitációs hullámok detektálását a gravitációs kollapszust végző objektumok megfigyelésétől várhatjuk, valamint, hogy a gravitációs sugárzás jelentős mechanizmus lehet bizonyos kettős rendszerekben.

A rádió-csillagászat nagyarányú fejlődésének köszönhetően a múlt évben sikerült az első bizonyítékát adni annak, hogy a természetben valóban léteznek gravitációs hullámok. Ezt a páratlan felfedezést annak köszönhetjük, hogy a rádiócsillagások felfedeztek egy valószínűleg két neutron csillagból álló kettős rendszert a PSR 1913 + 16-ot. A kettős rendszer periódusának változása — az einsteini formulával megegyezően — első bizonyítékát adja annak, hogy egy rendszer gravitációs sugárzás kibocsátásával veszíti energiát. Bár a felfedezés nem adja meg a sugárzás konkrét nagyságát, de elméleti jelentősége igen nagy. Ezt a felfedezést tárgyalja a kötet első, McCulloch által írt cikke.

A legjelentősebb tudósok vizsgálták a felvetett problémákat a nyári iskolán, ezzel ünnepeelve Albert Einstein születésének 100-adik évfordulóját.

A fordulópont a relativisztikus asztrofizikában 1967-ben következett be, a galaxisunkon belüli pulzárok, valamint egy 33 mill. sec.-ű periódusú pulzár felfedezésével. Ez utóbbi, az 1054-ben kínai, koreai és japán csillagászok által észlelt szupernova robbanás maradványában, a Rák ködben található. Ma több száz pulzárt ismernek, amelyek egy része szupernova maradványban van. A következő három cikk ezzel a témával foglalkozik. A fejezet végén L. Scarsi ismerteti a legújabb eredményeket, amelyeket az európai, gamma sugárzásra érzékeny COS B műhold észlelései alapján nyertek.

Az észlelések alapján világos, hogy legalábbis néhány pulzár esetén a gyorsan forgó neutron csillag hatalmas forgási energiája nagyon jó hatásokkal alakul át gammaemisszióvá. Ez a felfedezés a neutron csillagok emissziós mechanizmusának modellezésében jelentős.

A következő öt cikk relativisztikus asztrofizikai témájú. A Cavaliere az aktív galaxismagok, kvazárok Lacertidi és Seyfert galaxisok általános elméleti értelmezéseit, valamint a nem termikus eredetű emissziós folyamatok speciális szerepét vizsgálja. Ian Lerche cikkét teljesen a szupernova robbanások elméletének szentelte. A masszív csillagok pulzációját vizsgálja, különös tekintettel azokra a folyamatokra, amelyek a szupernova felvillanás emissziójára vezethetnek.

A pulzárok felfedezése óta nagy erőfeszítéseket fordítottak a forgó neutron csillagok magnetoszféra szerkezetének tanulmányozására. Az erre a témára vonatkozó önmagukban konzisztens legújabb modellekről adott ismertetést Leon Mertel. Végezetül Haynes és munkatársai a Circinus X—1 röntgenforrás észlelési anyagának kimerítő elméleti értelmezését adják, kimutatva egy éppen csillagtársulásban fejlődő, kb. 20 naptómegű masszív kettős csillagrendszer.

A következő hét cikk az általános relativitás elmélet kísérleti vonatkozásainak van szentelve, különös tekintettel a gravitációs hullám-detektorok fejlesztésére. Az első cikkek a római és tokiói

egyetemen készített gravitációs sugárzás-antennáknak legújabb kísérleti eredményeit ismertetik. Különösen érdekesek a Rák-kód megfigyelésére vonatkozó eredmények. A gravitációs hullám-észlelési kísérletek fő nehézsége abban áll, hogy különösen kis jelet kell detektálni, viszonylagosan nagy, mechanikus és elektromos eredetű, zaj jelenlétében. Az antennákkal felfogott jelek elemzési algoritmusának optimalizálását ismerteti C. V. Pallottino. A következő cikk a rendszer kvantumosságot tulajdonságaival és jelátalakítóival foglalkozik. Különösen érdekesek a Stanfordban végzett kísérletek, amelyeket John Lipa ismertet. Beszámol a súlyos és tehetetlen tömeg ekvivalenciájának műholdak segítségével történő vizsgálatáról, valamint a relativisztikus effektusok Föld körüli pályára állított giroszkóppal történő vizsgálatáról. Az utolsó rész 5 cikket tartalmaz, amelyek az általános relativitás elmélettel kapcsolatos legújabb elméleti és matematikai munkákat tekintik át.

Az összefüggésben bő és változatos témái az általános relativitás elméletnek az univerzum megismerésében betöltött jelentős szerepét és hathatóságát bizonyítják. A kötet nagyon jó keresztmetszetet adja az ezen a téren történt újabb fejlődésnek és igen hasznos az ezzel a témával foglalkozó matematikusok, fizikusok és csillagászok számára.

Molnár Sándor

**G. F. Bertsch and D. Kurath (ed.-s): Nuclear Spectroscopy.
Lecture Notes of Workshop
Springer-Verlag, Berlin, 1980**

A könyv, amely a "Lectures Notes in Physics" sorozatban jelent meg, egy "workshop" keretében tartott előadásokat ad közre, összesen hetet. A hét előadás a magstruktúrára vonatkozó jelenlegi ismereteinket foglalja össze, főleg a magstruktúrára vonatkozó elméletet.

Az első előadás a magelmélet alapvető kérdéseit tárgyalja: a nukleon-nukleon kölcsönhatások és a sok-test problémát a magban (G. E. Brown).

A következő három fejezet a héj modell alapjaival (D. Kurath), illetve a mag vibrációkkal (G. Bertsch) és a megállapított kollektív leírásával (A. Faessler) foglalkozik. A csoportelmélet, illetve a statisztikai módszerek megspektroszkópiái alkalmazásainak van szentelve a két további fejezet (F. Iachello és J. B. French). A könyvet — függelékként — néhány, a magszerkezettel kapcsolatos „rejtély” bemutatása zárja (G. Bertsch, L. Zamick, A. Mekjian), mint a spin—pálya kölcsönhatás vagy a magnívó sűrűségének problémája.

A könyv áttanulmányozása képet ad a magszerkezetre vonatkozó elmélet, illetve a magszerkezetre vonatkozó ismereteink jelenlegi állásáról.

Berényi Dénes

**Reiner Bass: Nuclear Reactions with Heavy Ions
Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1980**

Az elmúlt évtized a nehézion kutatások robbanásszerű fejlődésének időszaka. Ezért minden olyan mű, amely ennek az óriásivá terbélyesedett területnek akár egy részéről is összefoglaló áttekintést ad, rendkívüli jelentőségű mindazok számára, akik valamilyen formában ismerni, követni akarják ezt a fejlődést, az ezen a területen elért igen érdekes eredmények láncolatát.

Miután reálisan még egy összefoglaló mű is csak adott, kiválasztott témakörökre összpontosíthatja figyelmét, a szerző a ma már alacsony energiájúknak számító — 5-10 MeV/nukleon-bombázó nehézionok által kiválasztott magreakciókkal foglalkozik. Bár a könyv „kísérleti fizikus” szemszögéből íródott, nem tartalmazza a vonatkozó kísérletek részleteinek elemzését, csupán néha, ahol a „konvencionális” magfizikai kutatásoktól való eltérések illusztrálása ezt megkívánja, találunk ilyen jellegű utalásokat.

Történeti és technikai okokból a szerző a gyakran a „legkönnyebb nehézion”-nak tekintett ^4He részecskéknél nehezebb magokkal foglalkozik és az alfa-részekkel kiváltott reakciók csak helyenként mint illusztratív példák szerepelnek.

A nehézion kísérletek általában tipikus, a nagyobb tömegekkel, töltéssel és méretekkel összefüggő kinematikai vonásokat viselnek. A taszító Coulomb potenciál leküzdésére tipikusan 5-10 MeV/nukleon bombázó energiára van szükség, de ez a potenciál erősen befolyásolja az ionok pályáját és néhány MeV-es Coulomb-gerjesztést idézhet elő. A legnehezebb nehézionok esetén a Coulomb-taszítás olyan erős lehet, hogy megakadályozza a már nukleáris kontaktusban levő nehézionok fúzióját.

A nehézion ütközések másik fontos jellemzője az igen nagy impulzusok és impulzusmomentumok szerepe. Inelasztikus szórásokban a $100\hbar$ nagyságrendű relatív impulzusmomentum részben az ionok impulzusmomentumává alakulhat és így a nagyspinű magállapotok tanulmányozásának egyedülálló eszköze áll rendelkezésre. A nagy impulzus átadás lehetőségét a visszalökéses implantációt, vagy a kibocsátott gamma-sugárzás Doppler-eltolódását felhasználó kísérletek használják ki.

A kellően nagy tömegű nehézion reakciókban keletkező közbenső rendszerek tanulmányozása teljesen új magtartományokat tesz hozzáférhetővé. Az ily módon kiszélesedett atom- és magspektroszkópia keretében már a szuper nehéz elemek stabilitására, szerkezetére vonatkozó jósálatok kísérleti ellenőrzése is elérhetővé válik.

A könyv alapcélja a kísérleti eredmények viszonylag egyszerű, fenomenologikus modellek keretében történő tárgyalása és értelmezése. Így elméleti munkákkal is csak olyan mértékig találkozhatunk, amennyire azok a jelenlegi kísérletileg megfigyelt jelenségek egyszerűbb megértéséhez elengedhetetlenül szükségesek és amennyire azok a kísérleti kutatásokat közvetlenül befolyásolták. Természetesen nem kerülhetett sor a legalapvetőbb elméleti munkák nagy mennyiségének akár felvázolására sem. De még az így korlátozott témakörben sem lehetséges a fejlemények tökéletes áttekintése, ezért a szerző az alapvető elképzelések és fogalmak ismertetésére egy kritikai válogatás és egy összefoglaló mű közötti ideális egyensúly elérésére törekedett.

A szerző csupán az alapvető magfizikai és kvantummechanikai fogalmak ismeretét tételezi fel, így könyvét akár a csupán érdeklődők, akár a speciálisan nehézion fizikával foglalkozó kutatók igen eredményesen használhatják.

A könyv nyolc fejezetre tagozódik, az egyre összetettebb jelenségekkel foglalkozó témaköröknek megfelelően. Az egyes fejezetek a lehetőségekhez képest önálló, zárt egységeket alkotnak, külön irodalomjegyzékkel.

A bevezetésen kívül, amelyik az általános fogalmakat, a nehézion ütközések kinematikáját, a szórási és reakció hatáskeresztmetszetek általános formalizmusát eleveníti fel, az egyes fejezetek az alábbi témaköröket tárgyalják:

- könnyű magokból álló szóródó rendszerek
- kvázi-elasztikus szórás nehéz magokon
- nukleon átadás általános vonása
- kvázielasztikus transzfer reakciók
- mélyen inelasztikus nehézion szórás és transzfer
- nehézion fúzió
- közbenső mag bomlás.

A függelék néhány általános érvényű jelölést és gyakran használt összefüggést tartalmaz.

A Springer kiadó által a *Texts and Monographs in Physics* című sorozatban megjelent igen jól szerkesztett, világos felépítésű könyv alapvetően hasznos és fontos mű lehet mindazok számára, akiket az alacsonyenergiájú nehézion fizika szépsége, gazdag eredménytára ilyen vagy olyan formában érdekel.

Lovas István

**W. v. Oertzen (ed.): Deep-Inelastic and Fusion Reactions with Heavy Ions.
Proceedings of the Symposium Held at the Hahn-Meitner-Institute für Kernforschung,
Berlin, 1979**

Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1980. 394 oldal

A berlini Hahn—Meitner Intézet VICKSI nehézion gyorsítója üzembe helyezésének első éve, valamint az intézet névadói születésének 100. évfordulója alkalmából rendezett szimpozium a nehézionokkal végzett magreakciók tanulmányozásának legjelesebb képviselőit gyűjtötte össze. A könyv a szimpoziumon elhangzott előadásokat tartalmazza. Az egyes szekciók munkájának megfelelően a könyv fejezetei a témakör átfogó problémáit építik, mint a legújabb eredményeket együttesen vázolják.

A nehézion gyorsítók gyors fejlődése lehetővé tette, hogy akár a legnehezebb magok ütközéseinél is a kölcsönös Coulomb taszítást legyőzve igen komplex nukleáris folyamatokat tanulmányozhassunk. Teljesen új kutatási területek és teljesen új jelenségek tárultak fel. Így a közepes bombázó energiákon (≤ 10 MeV/nukleon) a mélyen rugalmatlan szórások vizsgálata igen pezsgő elméleti és kísérleti kutatások célpontjává vált az elmúlt években. Ez a fenti szimpozium központi témaköre is.

A komplex magok közötti igen erős disszipációs folyamatok, a mélyen rugalmatlan vagy a magok teljes fúziójával járó reakciók vizsgálata szükségszerűen igényelték a nem-egyensúlyi kvantum statisztikai módszerek kifejlesztését néhány száz nukleonból álló rendszerek esetére is.

A nehézion reakciókban kibocsátott könnyű részek tulajdonságainak megértése is olyan témakört jelent, amely a jelenlegi új modellek próbálkozásai ellenére továbbra is nyitott, érdekes feladat. Ugyanígy a nehézion reakciókban a közbenső magfúzióval járó folyamatokkal, vagy a közepesen nagyobb energiájú nehézion ütközésekkel foglalkozó előadások is az eddigi kutatási eredmények ismertetése mellett számos megválaszolatlan kérdést vetnek fel.

A könyv elengedhetetlenül fontos mindazok számára, akik valamilyen vonatkozásban az említett témakörökkel kapcsolatban állnak, de igen hasznos, elsősorban az összefoglaló jellegű előadásokra gondolva, mindenki számára, aki ezen a jelenlegi magfizikai kutatások egyik legdinamikusabbban fejlődő területéről kíván friss, általános helyzetképet kapni.

Kluge György

J. L. Alonso, R. Tarrach (editors): Quantum Chromodynamics. Springer-Verlag 1980

Spanyolországban működik egy Összegyetemi Elméleti Fizikai Csoport (GIFT), amelynek célja a kutatások ösztönzése és koordinálása, valamint az új kutató és oktató nemzedék fejlődésének támogatása. Főként ez utóbbi érdekében rendezik már hagyományosan a GIFT-szemináriumokat, amelyekre neves külföldi előadókat hívnak meg. A könyv az 1979-es X. GIFT-szemináriumon tartott előadásokat gyűjti egybe, témája a részecskefizika gyorsan fejlődő, alapvetőnek ígérkező elmélete, a kvantumszindinamika.

A fotonok és anyag kölcsönhatását leíró kvantumelektrodinamika a 40-es évek végére jutott tankönyvkész állapotba. Az elméleti részecskefizikusok azóta néznek szembe a kihívással, hogy megtalálják a természet többi kölcsönhatását leíró dinamikai elméletet. Az elmúlt tíz év alatt nagy előrehaladás történt e területen. Nobel-díjjal jutalmazták az elektromágneses és gyenge kölcsönhatások egyesített elméletét, amely jelenleg az anyag építőköveinek tekintett részecskének, a leptonoknak és kvarkoknak ún. mértékelmélete. Erős jelzések vannak arra, hogy az erős kölcsönhatásokat is egy mértékelmélet szabályozza, ebben a kvarkok színnek nevezett szabadsági foka vesz részt, innen az elnevezés.

A bevezető előadás részletesen tárgyalja az elméleti alapokat, s emlékeztet az egyes fogalmak megjelenésének időbeli sorrendjére is. A kvantumszindinamikával foglalkozó fizikus számára ma már majdnem elengedhetetlen feltétel, hogy kéznél legyen valamilyen összefoglaló. Erre az említett előadás kiválóan alkalmas, nem utolsósorban részletes hivatkozásjegyzéke következtében. A második előadás megismerteti a kvantumszindinamika alkalmazásaival különböző folyamatokban. Ezek tárgyalása a legújabb eredményeket is tartalmazza (az előadás 1979 nyarán hangzott el), s nyíltan a hallgató (olvasó) elé tárja a megválaszolatlan problémákat.

A kvantumszindinamikával ismerkedő olvasó számára lényeges, hogy tisztán lássa a kísérleti helyzetet. Az elmélet kísérleti következményei legvilágosabban ez elektron-pozitron szétsugárzásban mutatkoznak meg. Ezzel foglalkozik a harmadik előadás, amely egyúttal jó áttekintést ad a közelmúltban felfedezett új részecskékről, a ψ -családról (ezek felfedezését szintén Nobel-díjjal honorálták), a v -családról, és a nehéz leptonról. A további előadások a kvantumszindinamika speciálisabb kérdéseit tárgyalják. A könyv a Springer-Verlag Lecture Notes in Physics sorozatában jelent meg.

Gálfi László

**Jendrzej Sniatycki: Geometric Quantization and Quantum Mechanics
Applied Mathematical Sciences 30
Springer-Verlag, Berlin**

A geometriai kvantálás alig több mint tízéves irányvonala a matematikai fizikának. Kezdeményezői Kostant és Souriau voltak.

Kostant 1970-ben felismerte, hogy a klasszikus rendszerek kanonikus kvantálása és a Lie csoportok unitér irreducibilis ábrázolásának megkonstruálására használt pályamódszer között feltűnő hasonlóság van.

Tőle függetlenül tanulmányozta a kanonikus kvantálás geometriai megfogalmazását Souriau. Eredményeit 1970-ben foglalta össze könyvében. Kostant és Souriau munkái a geometriai kvantálás elméletének alapvető forrásai, ezért ezt az elméletet „Kostant—Souriau elméletnek” is nevezik.

Ez az elmélet tehát csak tízéves, és fejlődésének kezdeti fokán van. Jelenleg a klasszikus rendszerek kvantálásának egységes keretét adja, és a legtöbb klasszikus rendszerre alkalmazva a várt kvantumelméletet eredményezi. Megszűntet bizonyos tetszőlegességeket, amelyek más kvantálások esetén jelen voltak. Sok kérdés azonban megoldatlan maradt.

Szniaticky könyvének célja az, hogy bemutassa, hogyan lehet alkalmazni a geometriai kvantálás elméletét a kvantummechanikára és hogyan lehet a különböző kvantumfizikai rendszereket levezetni a geometriai kvantálást alkalmazva ezen rendszerek klasszikus dinamikájára.

A könyv összefoglalja az elmélet alapfogalmait.

Fő fejezetei:

Hamilton dinamika, definiálja az alapvető fogalmakat: fázistér, Hamilton vektortér, Poisson algebra, bemutatja ezeket a fogalmakat a töltött részecske relativisztikus dinamikája segítségével. *Prekvantálás; Reprezentációs tér. Blattner—Konstant—Sternberg magok. Kvantálás. Schrödinger reprezentáció*, tárgyalja egyetlen részecske, részecskerendszer kvantálását, kapcsolatot teremt a Feynman pályaintegrállal. *Más reprezentációk*, bemutatja a Bergman—Fock reprezentációt, kiter a harmonikus oszcillátorra. *Időfüggő Schrödinger egyenletet. Relativisztikus dinamika elektromágneses térben*, külső elektromágneses térben mozgó relativisztikus részecske kvantummechanikáját vizsgálja. *Pauli reprezentáció a spinre*, leír egy klasszikus spinmodellt, majd megkvantálja.

A Springer kiadó ezen sorozatának célja, hogy bevezető jellegű könyveket biztosítson a matematika alkalmazásainak legmodernebb irányjaiban. Ezen könyv, úgy tűnik, nem fedi ezt a célkitűzést, bevallottan kiegészítője kíván lenni az eddig a témáról megjelent könyveknek. Másrészt olyan nagy mennyiségű absztrakt matematikai fogalmat vonultat fel, hogy eltekintve az elméletet már előzetesen ismerő szakemberektől kiegészítő olvasmányok nélkül nem olvasható.

A könyv csak nagy matematikai ismeretekkel rendelkező, és a speciális téma és módszer iránt érdeklődő matematikai fizikával foglalkozó szakemberek számára ajánlható.

Horváth Zalán

H. A. Hill and W. A. Dziembowski (ed.): Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation

Lecture Notes in Physics Vol. 125.

Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

A könyv az 1979. március 12. és 16. között az Arizonai Egyetemen (Tucson, USA) tartott, azonos című munkaértekezlet (workshop) előadásainak szövegét tartalmazza. A konferencián 47 előadás hangzott el 5 nagy témakörben.

A fényüket szabályos periódussal változtató csillagok elmélete kapcsán századunk elején merült fel először a gondolat, hogy a fényváltozást a csillag pulzációja okozhatja. Emden, Eddington, majd Rosseland dolgozta ki a csillagok pulzációjának radiális, lineáris és infinteimális elméletét. Ezzel a klasszikus elmélettel a változó csillagok több osztályának sajátosságait kielégítő módon meg lehetett magyarázni. Az utóbbi évtizedekben sokasodtak a jelek, hogy a csillagok egy részének pulzációja nem írható le a klasszikus elmélet keretein belül. Ezért Christy és mások kidolgozták a pulzáció általános elméletét, amely azonban nehezen volt összehasonlítható a megfigyelésekkel. A könyv tárgyát képező cikkek jó része a megfigyelések oldaláról igyekszik a csillagok némely megfigyelt tulajdonságát összhangba hozni a nem radiális és nem lineáris pulzáció elméletével.

A könyv 1. fejezete a δ Scuti csillagokkal foglalkozik. Az első (áttekintő jellegű) cikkben W. Fich összefoglalja (több csillag esetében külön-külön is) azokat az effektusokat, amelyek nem lineáris és nem radiális effektusokra utalnak és arra a meggyőződésre jut, hogy a δ Scuti csillagok esetén ilyen effektussal csak a csillag alakjának deformációja esetén kell számolni. R. F. Stellingwerf szerint akkor kell nem lineáris és nem radiális effektussal számolni, ha a csillag rezgésének amplitúdója túl nagyvá válik.

A 3. fejezet a β Cephei és más korai típusú csillagok esetével foglalkozik. A legtöbb előadás a β Cephei csillagok stabilitásának és gerjesztésének — még nem megoldott kérdését — taglalja.

A könyv legerjedelmesebb fejezete a 3., amely a Nap rezgéseivel foglalkozik. A Nap 2^h40^m -es oszcillációjának 1975-ben történt felfedezése óta a Nap pulzációja a csillagászat egyik központi kérdésévé vált. A cikkek túlnyomó többsége a különböző obszervatóriumokban történt észleléseket ismerteti. A megfigyelések egyértelműen bizonyítják a 2^h40^m -es rezgés létezését és egy 5^m -es oszcillációt is. A jelenség magyarázatára vonatkozó fejtegetések azonban eléggé „szórnak” még, de bizonyosnak látszik, hogy a nem lineáris és nem radiális effektusoknak döntő jelentőségük van.

Igen érdekes J. Christensen-Dalsgaard, W. Dziembowski és D. Gough előadása, amely szerint a Nap-pulzáció léte csak akkor egyeztethető össze az elméleti megfontolásokkal, ha a konvektív zóna sokkal vékonyabb az eddig feltételezetténél.

A 4. fejezet a degenerált csillagok oszcillációjával foglalkozik és mindössze négy cikket tartalmaz a fehér törpe csillagok oszcillációjára vonatkozóan.

Az 5. fejezet, amely az elméleti kérdéseket foglalja össze, szintén viszonylag rövid és csak három előadást tartalmaz.

A könyv a címben érintett témakör megfigyelési oldalának igen jó összefoglalását adja. Ajánlhatjuk azoknak a változócsillagászoknak és napfizikusoknak, akik a témakörrel széles áttekintést kívánnak szerezni. A könyv azonban csalódást jelenthet azok számára, akik a pulzáció elméletével belőle akarnának megismerkedni, mert ennek ismeretét a szerzők már eleve feltételezik.

Dr. Marik Miklós

Landolt—Börnstein (New Series I/9a.):
Scattering of Elementary Particles: NN and KN
Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York 1980

A mérési adatok mennyisége állandó jelleggel növekszik a nagyenergiás erős kölcsönhatások vizsgálatánál. A célból, hogy az információ könnyen elérhető legyen, időnként szükséges a létező anyagot áttekinteni. A Landolt—Börnstein sorozat a tudományos és technikai numerikus adatokkal és függvénykapcsolatokkal foglalkozó I/7-es kötetének 1973-as megjelenése óta az elemi részecskék rugalmas és töltéscsere szórására vonatkozóan is hatalmas mennyiségű anyag halmozódott fel. Az új elkészített adatgyűjteményt ezért két részre kellett osztani. Ez az I/9a kötet a nukleon-nukleon és a kaon-nukleon szórás adatait tartalmazza, míg az I/9b kötet a pion-nukleon szórás adataival foglalkozik majd.

Az I/9a kötet 1978-ig tekinti át a létező kísérleteket. Két lényeges területen teszi teljesebbé az I/7-et. Egyrészt közli az 1 GeV alatti fázisanalízis eredményeit, másrészt a batáviai 400 GeV-s klasszikus protonszinkrotronon, valamint a CERN-ben felépült proton tárológyűrűn (ISR) végzett kísérletek lehetővé tették az energiatartomány néhány száz GeV-s kiszélesítését.

A kitűnően szerkesztett könyv rövid, jelöléseket tartalmazó része után 700 oldalon keresztül ismerteti a $p-p$, $p-d$, $n-p$, n -mag, $K^{\pm}-p$, $K^{\pm}-d$ ütközések teljes hatáskeresztmetszeteit, integrális és differenciális rugalmas hatáskeresztmetszeteit és a polarizációs mérések eredményeit. Minden szórási folyamatra egy rövid bevezetés azonnal áttekinthetővé teszi a végrehajtott mérés kinematikai tartományát, és hogy a mérés szerepel-e Landolt—Börnstein I/7 vagy I/9-es kötetében, vagy esetleg máshol. A szerzők az erős kritikával kiválasztott anyagot a részecskefizikai adatokra más területen igényt tartó kutatóknak ajánlják, azonban a terület speciálistái számára is hasznos gyors áttekintést ad a könyv. Konkrét hosszabb számolások esetén a CERN—HERA vagy az LBL adatgyűjteményeket ajánlom inkább, amely laboratóriumok üres mágnesszalag küldése esetén a megfelelő adatgyűjteményt mágnesszalagon visszaküldik. Elméleti szempontból a legjelentősebbek a 2000 GeV-ig mért pp ISR adatok. Auberson megjósolta, hogy emelkedő teljes hatáskeresztmetszettek esetén scaling-nek kell fellépni a differenciális rugalmas szórás diffrakciós tartományában. Ilyen scaling tulajdonságot valóban találtak és ezt a geometriai scaling elképzelésével írják le. Ez elég nagy energiákon ($E > 100$ GeV) valóban jól kielégül. A második diffrakciós csúcs azonban már nem mutat jó egyezést a geometriai scaling elképzeléssel. Így további kutatások szükségesek.

Általában meg kell jegyeznem, hogy ügyelni kell a hibák figyelembevételénél, mivel a szisztematikus hibák sok esetben nincsenek feltüntetve, azaz ilyenkor a hibák erősen alá vannak becsülve. Az olvasó kedvéért a könyv erősen redundáns, amelyet azonban a terjedelem nagysága miatt jobb lett volna elkerülni. Sok oldalt felére lehetett volna csökkenteni, ha a bejövő részecske energiáját nem öt, hanem csak egy oszloppal jellemezték volna. Mindennek ellenére a könyv eléri célját, hogy a kísérletek gyorsan meg tudják állapítani, mely méréseket hajtották végre és az elméletiek tájékozódhatnak abban, hogy milyen mért adatokkal hasonlíthatják össze elképzeléseiket.

Krasznovszky Sándor

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
 Műszaki szerkesztő: Sándor István
 A kézirat nyomdába érkezett: 1981. febr. 26. — Terjedelem: 7 (A/5 ív)
 81-948 — Szegedi Nyomda, Szeged — Felelős vezető: Dobó József igazgató

MAGYAR
 TUDOMÁNYOS AKADEMIA
 KÖNYVTÁRA

TARTALOMJEGYZÉK

<i>N. Vermes: International Physics Competitions. I—XI. 1967—1979. (Preface R. Kunfalvi) ...</i>	407
<i>Bakos József és Ignácz Péter: Lézeres nemlineáris plazmadiagnosztika</i>	461

KÖNYVISMERTETÉS

<i>H. Haken—H. C. Wolf: Atom- und Quantenphysik</i>	477
<i>M. Schlenker, M. Fink, J. P. Goodgebauer (ed.-s): Imaging Processes and Coherence in Physics .</i>	478
<i>M. S. Feld and S. Lekhotov (ed.-s): Coherent and Nonlinear Optics</i>	478
<i>R. Pratesi and C. A. Sacchi (ed.-s): Lasers in Photomedicine and Photobiology</i>	479
<i>Yu. I. Ostrotsky, M. M. Butusov, G. V. Ostrovskaya: Interferometry by Holography</i>	479
<i>C. Edwards (ed.) Gravitational Radiation, Collapsead Objects and Exact Solutions</i>	481
<i>G. F. Bertsch and D. Kurath (ed.-s): Nuclear spectroscopy</i>	482
<i>Reiner Bass: Nuclear reactions with Heavy Ions</i>	482
<i>W. v. Oertzen (ed.): Deep-Inelastic and Fusion Reactions with Heavy Ions</i>	483
<i>J. L. Alonso, R. Tarrach (ed.-s): Quantum Chromodynamics</i>	484
<i>Jendrzey Sniatycki: Geometric Quantization and Quantum Mechanics</i>	484
<i>H. A. Hill and W. A. Dziembowski (ed.-s): Nonradial and nonlinear Stellar Pulsation</i>	485
<i>Landolt—Börnstein: (New Series I/9a): Scattering of Elementary Particles: NN and KN</i>	486

307.226

f

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

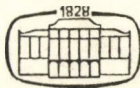
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

GÁSPÁR REZSŐ, KISS DEZSŐ, KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR
ÉS SZALAY SÁNDOR
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI
PÁL LÉNÁRD

XXIX. KÖTET

6. FÜZET



AKADÉMIAI KIADÓ
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST 1981

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klasszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10-10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóirattól évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelemben.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Turchányi György egyetemi tanár

Biofizikai Intézet

1444 Budapest VIII., Postafiók 263

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 90 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a KULTÚRA Külkereskedelmi Vállalat, 1389 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmi ismertetőt írjanak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közöljék. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írjanak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.

BÓRMEGHATÁROZÁS PROMPT NEUTRONAKTIVÁCIÓVAL*

SZABÓ S. ANDRÁS

Megyei Élelmiszerellenőrző és Vegyvizsgáló Intézet, Győr**

A dolgozat ismerteti a dubnai Egyesített Atomkutató Intézet Neutronfizikai Laboratóriumának IBR—30 elnevezésű impulzusreaktorán 1980-ig végzett bőrvizsgálatok eredményeit. A bőrmérés a termikus neutronok hatására lejátszódó $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ magreakción alapszik, s a ^{10}B izotóp extrém nagy hatáskeresztmetszete (~ 3800 barn) a bőr nagy érzékenységgel történő meghatározását teszi lehetővé. Három roncsolásmentes mérési módszer kidolgozására került sor, az első az (n, α) reakcióban keletkező prompt α -részecskék detektálása vákuumkamrában, felületi záróréteges Si-detektorral, a második az α -részecskék detektálása autoradiográfiás módon, a harmadik a magreakcióban keletkező ^7Li gerjesztett mag által kibocsátott prompt γ -sugárzás mérése Ge(Li) detektorral. A mérések során vizsgálatra került a $^{10}\text{B}^+$ és BF_3^+ ionokkal implantált, valamint diffúziós technikával előállított Si minták bőrtartalma s koncentrácioprofilja az implantálási energia s a hőkezelés függvényében, különböző amorf féművegek bőrkonzentrációja s egyes növényi anyagok bőrtartalmának s bóreloszlásának alakulása a tápoldat bőrtartalma s a kezelési idő függvényében.

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés	487
1. Bórmeghatározás a $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ magreakció alapján	489
1.1. Bórmérés felületi záróréteges Si-detektorral	489
1.2. Bórmeghatározás autoradiográfiás módon	496
1.3. Bórkonzentráció meghatározás γ -spektrometrián	498
2. Ionimplantált Si szeletek vizsgálata	499
3. Féművegek vizsgálata	505
4. Bórmeghatározás biológiai eredetű anyagokban	507
5. Egyéb vizsgálatok és számítások	513
Összegezés	518
Köszönetnyilvánítás	519
Irodalom	519

BEVEZETÉS

A bőrkonzentráció és a bóreloszlás vizsgálata fontos szerepet játszik számos műszaki, orvosi, mezőgazdasági s egyéb jellegű probléma megoldásában. Közismert pl., hogy a bőr félvezető áramkörök készítésénél széles körben alkalmazott p -típusú szennyező, s az áramkörök tervezése és gyártása során a bőr koncentrácioprofiljának ismerete döntő fontosságú. Az utóbbi években egyre kiterjedtebb szilárdtestfizikai

* A dolgozat a szerző kandidátusi értekezése egy részének lényegesebb eredményeit tartalmazza. Érkezett 1980. aug. 4.

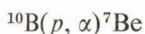
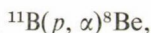
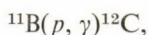
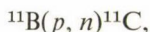
** Jelenleg: MÉM Szakoktatási és Kutatási Főosztály, Budapest

kutatások folynak a nagyon jó mechanikai tulajdonságokkal rendelkező, börtartalmú fémüvegek vizsgálatával kapcsolatban is. Börtartalom méréseket igényelnek egyes mezőgazdasági jellegű kutatások, vizsgálatok is, ugyanis a bőr a növények számára esszenciális nyomelem, s hiánya különböző növényi megbetegedéseket s termés-csökkenést okoz. Az optimális bőrellátottság biztosítása (a szükségesnél nagyobb koncentrációban a bőr a növények számára már toxikus) pedig nagyszámú levél- és talajanalízist tesz szükségessé.

A felsorolt területeken kívül szükség lehet számos ipari termék börtartalmának vizsgálatára — a bőrt, ill. vegyületeit főleg az üvegyártásban, kerámiai anyagok, üvegszálak, mosószerek, herbicidek, börtartalmú műtrágyák, atomreaktorok szabályozórúdjai stb. gyártására használják — s bőrkoncentráció mérésekre különböző fiziológiai (az emberi és állati szervezetek számára a bőr toxikus) s sugárbiológiai jellegű kutatásokban. Így pl. több, mint egy évtizede már egyes agydagatanatok gyógyítására speciális bőrvégületeket juttatva az agyba, neutronbefogásos terápiát alkalmaznak.

A bőr analitikai szempontból a nem túl könnyen meghatározható elemek közé tartozik, s jelenleg nem alakult ki olyan általánosan elfogadott bőrvizsgálati módszer, amely egyértelműen jobb lenne a többinél, s a vizsgálatok során fellépő követelményeket (érzékenység, reprodukálhatóság, gyorsaság, olcsóság stb.) maradéktalanul vagy nagy részben kielégítené. Részben ezzel magyarázható, hogy jelenleg bőrmeghatározásra rendkívül sokféle kémiai analitikai módszer használatos. Leggyakrabban spektrofotometriás és atomabszorpciós mérés technikát alkalmaznak, de használnak titrimetriás, gravimetriás, potenciometriás, spektrográfias, polarográfiás, tömegspektrometriás, kulonometriás, fluorimetriás, atomemissziós, ionszondás és egyéb eljárásokat is [1—11].

A nukleáris technika s az aktivációs analitikai módszerek térhódításával számos magfizikai elven alapuló bőrmeghatározási módszer is kidolgozásra került. Protonokkal történő besugárzás során pl. a



reakciók használhatók fel bőrmérésre [12—17], de ismertek más töltött részecskékkel (d , T , α) végbemenő reakciók is, amelyek szintén alkalmazhatók a börtartalom mérésére [18—21].

A termikus neutronok hatására lejátszódó prompt $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ reakció extrém nagy hatáskeresztmetszete — ~ 3800 barn — a bőr nagy érzékenységgel történő meghatározását teszi lehetővé [22—28]. Mivel a természetes bórban a ^{10}B izotóp előfordulása 19,6% [29], így ez az eljárás nem csupán a ^{10}B izotóp, hanem a természetes bőr nagyon kis koncentrációban történő meghatározására is lehetőséget nyújt. Jelen dolgozatban a dubnai Egyesített Atomkutató Intézet Neutronfizikai Laboratóriumának IBR—30 elnevezésű impulzusreaktorán mintegy egy évtizede folyó, a $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ magreakció felhasználásán alapuló bőrvizsgálatokról kívánunk beszámolni. Ezeket a méréseket a Központi Fizikai Kutató Intézet kezdeményezte előkísérletekként az

építés alatt álló, dubnai új, nagy teljesítményű, IBR—2 impulzusreaktor tudományos programjának nukleáris analitikai jellegű vizsgálataihoz kapcsolódóan [30—31]. A 4 MW átlagos teljesítményű IBR—2 reaktor 1977-ben lett kritikus, de a tényleges — a tervezett teljesítménynek megfelelő üzemelésre, csak várhatóan 1981-ben kerül sor [32—34].

1. Bórmeghatározás a $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ reakció alapján

A különböző félvezetőtechnikai és biológiai anyagok bórtartalmának s a bór koncentráció-profiljának, i.l. eloszlásának vizsgálatára a dubnai intézet Neutronfizikai Laboratóriumában — együttműködve a KFKI s a Gödöllői Agrártudományi Egyetem kutatóival — három roncsolásmentes mérési módszer kidolgozására került sor. Az első módszer a $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ reakcióban keletkező α -részecskék detektálása felületi záróréteges Si-detektorral, a második az α -részecskék detektálása autoradiográfias módszerrel, a harmadik pedig az (n, α) reakcióban keletkező gerjesztett állapotú ^7Li mag által kibocsátott prompt γ fotonok mérésén alapul.

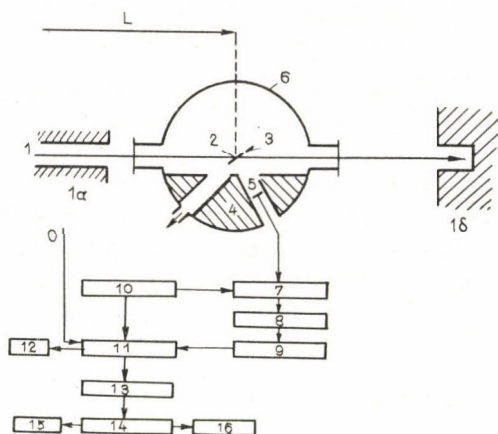
Megemlítjük, hogy — felhasználva azt a tényt, hogy a bór neutronbefogási hatáskeresztmetszete igen nagy — adott körülmények között olyan mód is van bór-mérésre, hogy mérve a minta előtt s után a neutronfluxust, a különbségből meghatározható a bór mennyisége [35—37]. Így pl. 1 mg bór olyan mennyiségű termikus neutron abszorbeál, mint 21,7 g Mg vagy 6,5 g Ca. A mérés úgy is elvégezhető, hogy a bórtartalmú anyagot tartalmazó küvetán áthaladó neutronok a küvetta mögött egy Dy_2O_3 targetet aktiválnak, s ennek aktivitása fordítottan arányos az oldat bórkoncentrációjával [38].

1.1. Bórmérés felületi záróréteges Si-detektorral

Töltött részecskék detektálására egyre elterjedtebben alkalmaznak felületi záróréteges félvezető detektorokat [39—49]. Mi a $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ és a $^6\text{Li}(n, \alpha)^3\text{H}$ reakciókban keletkező töltött részecskék regisztrálására egy $\sim 1,2\text{ cm}^2$ felületű, 1500 ohmcm fajlagos ellenállású felületi záróréteges Si(Au) detektort alkalmaztunk, amelyet a mérendő mintával párhuzamosan s tőle $\sim 5\text{ cm}$ távolságban helyeztünk el. A detektor felbontóképesége 100 V feszültségen a ^{241}Am forrás α -sugárzá.ára (5,486 MeV) vonatkozóan $\sim 19\text{ keV}$ volt.

A bórmérésre szolgáló berendezés blokk-sémáját az 1. ábra mutatja. A vákuumkamrát az IBR—30 impulzusreaktor kettes számú vízszintes csatornáján, az aktív zónától kb. 16 m távolságra helyeztük el, a termikus neutronfluxus itt $\sim 10^6\text{ n cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ volt. A mérés során a kamrában a vákuum legalább 10^{-2} torr volt. Mérésre általában néhány cm^2 felületű minták kerültek.

Fluxusmonitorozásra s energiakalibrációra a mérendő minta mellett elhelyezett, alumínium fóliára vákuumpárolással felvitt $0,06\text{ mg cm}^{-2}$ rétegvastagságú ^6LiF lemezke szolgált. A monitorozásra szolgáló $^6\text{Li}(n, \alpha)^3\text{H}$ reakcióban keletkező α -részecskék energiája 2,05 MeV, a ^3H energiája pedig 2,73 MeV. A bórtartalom mérésére a $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ reakcióban keletkező, eredetileg $E_0=1,471\text{ MeV}$ energiájú α -részecskék szolgáltak. Megemlítjük, hogy a reakció $\sim 93\%$ -ban eredményez 1,471 MeV energiájú α -részecskéket (a ^7Li mag energiája 0,839 MeV), 7%-ban pedig 1,777 MeV energiájú α -részecskék, ill. 1,014 MeV energiájú ^7Li magok keletkeznek.



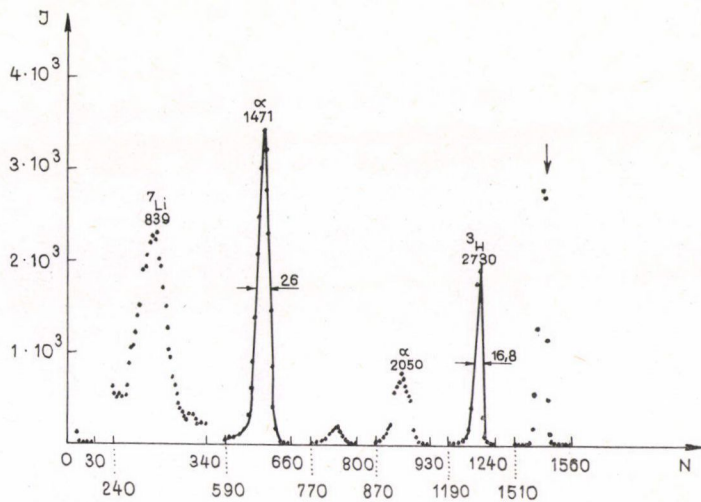
1. ábra. A mérőberendezés blokk-sémája

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1 neutronnyaláb | 9 emitterkövető |
| 1a kollimátor | 10 impulzusgenerátor spektrumstabilizálásra és energiakalibrációra |
| 1 neutroncsapda (bóros paraffin) | 11 amplitúdóanalizátor |
| 2 minta | 12 kirajzoló és kinyomtató |
| 3 ^6Li monitor | 13 mágnesszalag |
| 4 ólomvédelem | 14–16 adatfeldolgozás BESZM—4 és BESZM—6 |
| 5 detektor | típus számítógépeken |
| 6 vákuumkamra | 0 a reaktor startjele |
| 7 előerősítő | L a mérőberendezés távolsága a reaktor |
| 8 erősítő | aktív zónájától |

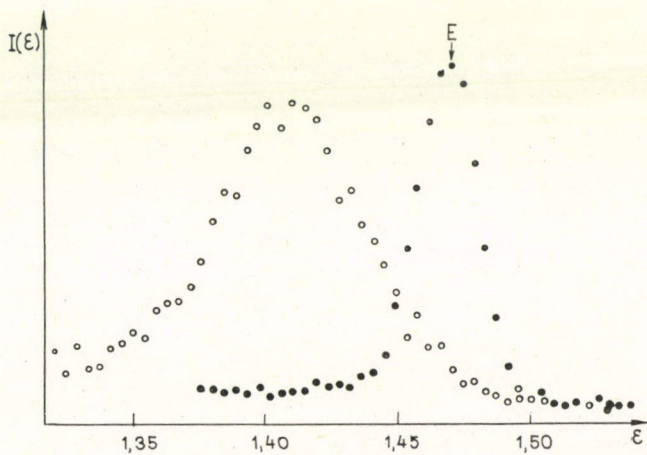
Energiakalibrációra a már említett ^6LiF monitoron kívül szilícium lapka felületére vákuumpárolással felvitt, dúsítatlan, 300–500 Å vastagságú elemi bórréteget, valamint 10 keV energiájú $^{10}\text{B}^+$ ionokkal, ill. 20 keV energiájú $^{10}\text{BF}_2^+$ ionokkal implantált Si lapkákat használtunk. A 10 keV energiájú $^{10}\text{B}^+$, ill. a 20 keV energiájú $^{10}\text{BF}_2^+$ ionok szilíciumba való behatolási mélysége olyan csekély (≈ 300 Å), hogy a $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ reakcióban keletkező $E_0 = 1,471$ MeV energiájú α -részecskék gyakorlatilag energiavesztés nélkül érik el a detektort, tehát felhasználhatók az E_0 energia mérésén alapuló energiakalibrációhoz. A 2. ábra az energiakalibrációra szolgáló vékony bórrétegtől s a ^6LiF monitortól származó spektrumot, a 3. pedig a 20 keV energiájú $^{10}\text{BF}_2^+$ ionokkal implantált, valamint a 80 keV energiájú $^{10}\text{B}^+$ ionokkal implantált Si szelet α -spektrumát mutatja.

A detektor s a spektrumstabilizálásra (és esetenként energiakalibrációra) szolgáló impulzusgenerátor jeleit megfelelő elektronikus láncon (l. 1. ábra) keresztül 2000 csatornás, időkapuzott amplitúdó-analizátorra vezettük. Az ún. repülési idő technika kihasználásával lényeges háttérsökkentés volt elérhető. Mint ismeretes, a repülési idő technika alkalmazásának az a lényege, hogy a neutronok $m/\mu\text{s}$ -ban megadott sebessége (v) s eV-ban megadott energiája (E) között a következő összefüggés áll fenn:

$$E = \frac{5223}{(t^x)^2},$$



2. ábra. Az energiakalibrációra szolgáló vékony bórretegről s a monitorról kapott spektrum. A csúcsok s a félértékszélességek energiája keV egységben. A nyíllal jelölt csúcs az impulzusgenerátortól származik I relatív intenzitás, N csatornaszám

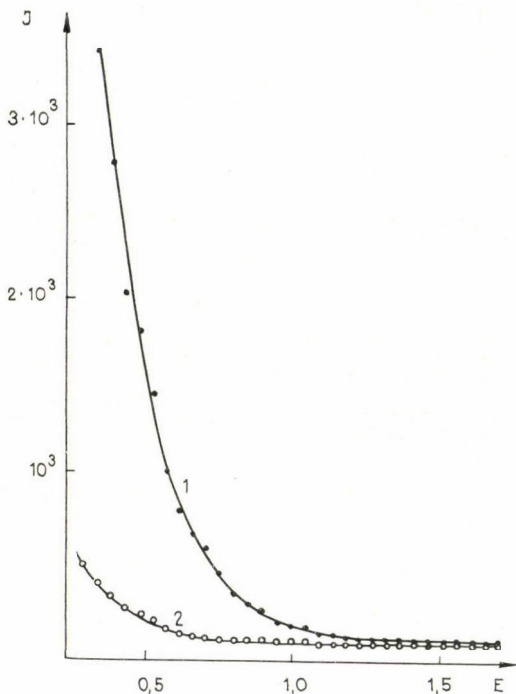


3. ábra. Egy 20 keV energiájú ${}^{10}\text{BF}_2^+$ s egy 80 keV energiájú ${}^{10}\text{B}^+$ ionokkal implantált szilícium lap α -spektruma $E=1,471$ MeV $I(\epsilon)$ relatív intenzitás, ϵ energia (MeV)

ahol:

$$t^x = \frac{1}{v} = \frac{t}{L} \left(\frac{s}{m} \right)$$

Igy a távolság (L) s a neutronenergia-intervallum ismeretében az időkapu ideje (t) számítható. Mivel a $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ reakció termikus neutronokra — ezek átlagos energiája $\sim 0,025$ eV, ami 2170 ms^{-1} sebességgel ekvivalens — játszódik le, késleltetésként 1 msec-ot, időkapuként 16 msec-ot választottunk, ami 0,005—1,3 eV neutronenergia-intervallumnak felelt meg. Az időkapu indítása a reaktorimpulzusokkal szinkron érkező vezérlőjelek („0” jel) segítségével történt. A periodikus működésű IBR—30 impulzusreaktor másodpercenként 5 impulzust bocsátott ki. Az időkapuzással és időkapuzás nélkül kapott háttérrel a 4. ábra mutatja.



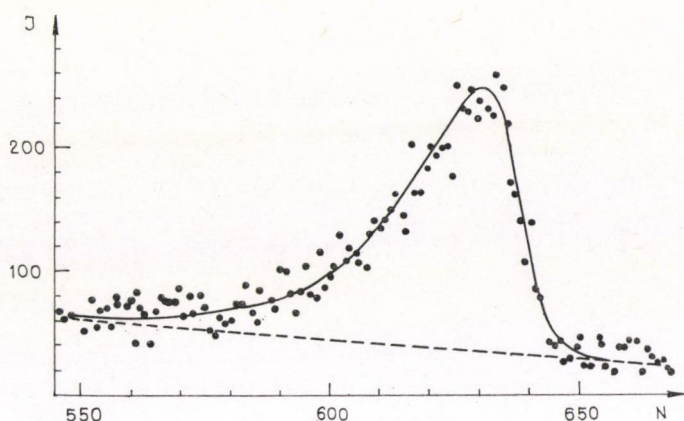
4. ábra. Időkapuzás nélkül (1) s időkapuzással (2) kapott háttérspektrum
 I relatív intenzitás, E energia (MeV)

A bőr mennyiségi meghatározására $(\text{C}_5\text{B}_9\text{H}_{11})_2\text{CoCs}$ összetételű bőrvégületből készített etalonsorozatot — bőrtartalom 0,5—50 μg — segítségével került sor. Ha a mérési idő meghaladta a 10 órát, az adott körülmények — $\sim 10^6 \text{ n cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ termikus fluxus — között a minimálisan meghatározható bőr mennyisége kb. $2 \cdot 10^{-7}$ g volt. A 6,4 μg bőrt tartalmazó etalon α -spektruma az 5. ábrán látható.

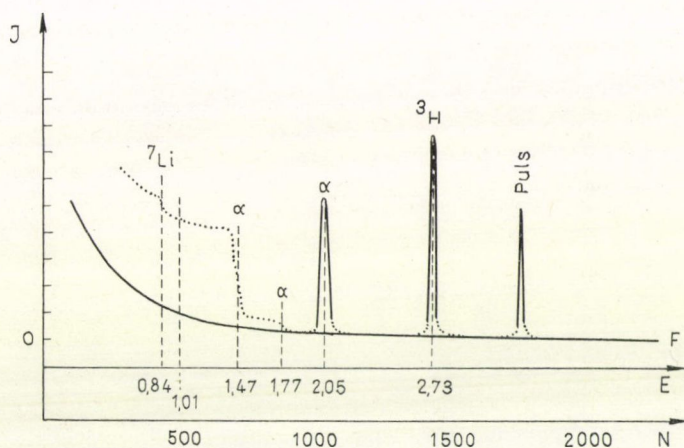
A mérési eredmények feldolgozása BESZM—4 és BESZM—6 típusú számítógépeken történt. A BESZM—4 számítógépen standard program [50] alapján a kapott spektrumok csúcshelyzetei és csúcsterületei kerültek meghatározásra. Ez a program azonban csak Gauss- vagy közel Gauss-görbék feldolgozására alkalmazható, amilyenek pl. az ionimplantált Si-szeletek α -spektrumai, vagy a monitortól kapott csúcsok. Ettől eltérő spektrumok, mint pl. a 6. ábrán látható „végtelen” vastag bőrrétegről kapott spektrum, vagy hőkezelt implantációs profilok fel-

dolgozására azonban nem alkalmas. „Végtelen” vastag bőrrétegnek azt az anyagot nevezzük, amelynek vastagsága meghaladja az adott anyagra vonatkozóan az 1,471 MeV energiájú α -részecskék maximális úthosszát. Szilíciumban pl. az 1,471 MeV energiájú α -részecskék úthossza (\bar{R}_p értéke) kb. 5 μm .

A bőrkonzentráció és a bőreloszlás meghatározása BESZM—6 számítógépen történő dekonvolúciós módszerrel. Mint ismeretes a dekonvolúció olyan matematikai művelet, amely lehetővé teszi, hogy egy összetett függvényből, amely két másik függ-



5. ábra. Bóretalon 20 órás méréssel kapott α -spektruma
 I relatív intenzitás, N csatornaszám



6. ábra. „Végtelen vastag” bórrétegről (pl. növényi levél), valamint
a monitorról s az impulzusgenerátortól kapott spektrum I relatív intenzitás,
 N csatornaszám, E energia (MeV), F háttér, Puls impulzusgenerátor

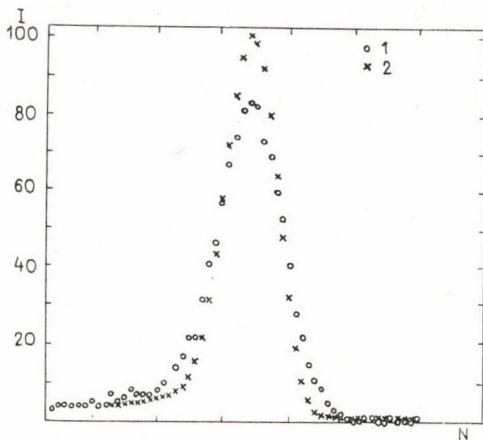
vény konvolúciójából származik, az egyik függvény ismeretében meghatározzuk a másikat. A konkrét esetben az a feladat, hogy az

$$N(V) = \int F(E)G(E, V) dE$$

függvényből, ahol $N(V)$ a mért spektrumot jelenti a mérőrendszer torzító hatása $G(E, V)$ figyelembevételével az $F(E)$ eredeti torzítástól mentes függvényt, azaz a tényleges bóreloszlást határozzuk meg [51—52]. Így tehát lehetőség nyílik a detektor felbontóképességének figyelembevételére, azaz az így fellépő bórprofiltorzulás kiküszöbölésére. A dekonvolúció alkalmazására csak a bórprofilvizsgálatnál van szükség,

pusztán átlagos bórkoncentráció mérésnél nem. A 7. ábra egy ionimplantált Si szelet apparatura spektrumát s dekonvolált α -spektrumát mutatja. Látható, hogy a dekonvolúciós módszerrel kapott spektrum csúcsa magasabb és keskenyebb, mint a mért spektrumcsúcs. Elvileg — ha jó a dekonvolúció — így olyan spektrum nyerhető, mint 0 energiefelbontású detektorral mérve.

A spektrum-dekonvolúció akkor alkalmazható sikeresen a mérőrendszer energiefelbontásának figyelembevételére, ha rendelkezésre áll egy jó statisztikával mért



7. ábra. Ionimplantált minta α -spektrumának dekonvolúciója 1 eredeti (mért) spektrum 2 dekonvolúcióval kapott spektrum I relatív intenzitás N csatornaszám

etalon (referencia) spektrum is. Etalon spektrumként egy 20 keV energiájú, $^{10}\text{BF}_2^+$ ionokkal implantált Si-mintáról kapott spektrumot választottunk. Megemlítjük, hogy etalon spektrumként egy — a mérőrendszer energiefelbontásának ismeretében — elméletileg számított eloszlás-spektrum is használható.

A spektrumdekonvolúciót Fourier transzformációval végeztük. Fourier transzformáción alapuló dekonvolúciós módszert ismertet többszerző [53–66] is.

A dekonvolúció során a mért s az etalon spektrum adott részét — 128 vagy 256 csatornát, mivel a csatornaszám $n=2^k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) — Fourier-sorba fejtettük, a mért spektrum Fourier sorának együtthatóit elosztottuk az etalon spektrum Fourier sorának együtthatóival, majd az így kapott koefficienseket transzformáltuk.

A dekonvolúcióval kapott spektrumok gyakran oszcilláltak. Ennek az az oka, hogy a Fourier koefficiensekkel való osztás során jelentős hibák adódhatnak, ezek a Fourier koefficiensek ugyanis magasabb frekvenciáknál már nagyon kicsiny, a háttérén fluktuáló értékek. Hogy elkerüljük a spektrum oszcillálását, optimálisan kell „megvágni” a Fourier-sort, de úgy, hogy a megvágás ne torzítsa a spektrumot. Az optimális levágási frekvencia megválasztása automatikusan, a Student-kritérium alapján történt [67], majd a végleges frekvenciát az oszcillációk nagysága s a simítás figyelembevételével határoztuk meg. A spektrum-simítást Lánosz-féle módszerrel [68] végeztük.

Miután a dekonvolúció alkalmazásának alapvető célja a mért α -spektrum alapján a bór tényleges eloszlásának meghatározása volt, a dekonvolúció után a vízszintes tengelyt (csatornaszám) először energiakálára (MeV) majd mélységkálára (μ) alakítottuk, az ordinátát (impulzussszám) pedig koncentrációkálára ($\text{atom} \cdot \text{cm}^{-3}$). A mélységkálára való átalakítás a különböző anyagok kémiai összetételétől függő, fajlagos dE/dx értékek figyelembevételével történt.

A háttérrel lineáris függvényekkel közelítettük, s kivontuk a mért spektrumból. Itt megemlítendő, hogy bár a háttér — mint pl. a 6. ábrán is látható — lényegében nem lineárisan, hanem exponenciálisan változik, de az adott intervallumban — 507–762 csatorna — a lineárisan s az exponenciális függvényekkel közelített háttér között oly kicsi a különbség (l. 1. táblázat), hogy a mérési eredmények értékelése

folyamán az egyszerűbb, lineáris közelítést alkalmaztuk. Felületi záróréteges detektorral végzett méréseink szerint egyébként az adott körülmények között a legjobb háttérillesztést az

$$y = k \cdot e^{-0,00159x}$$

függvény adta, ahol

y — háttérimpulzusszám az adott csatornában,

x — csatornaszám,

k — a monitor beütésszámától függő, az adott mérési körülményekre jellemző konstans.

1. TÁBLÁZAT

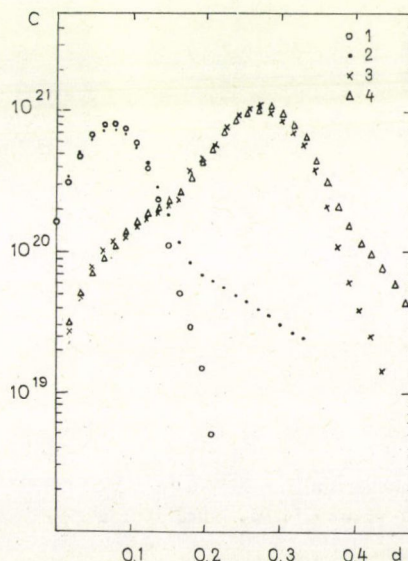
Exponenciális és lineáris összefüggéssel közelített háttér 11 órás háttérmérés adatai alapján. Az exponenciális összefüggés számítására a következő képlet szolgált:
 $y = 49,68 e^{-0,00159x}$, ahol x a csatornaszám

Csatornaszám x	Háttér impulzusszám		Eltérés	
	exponenciális	lineáris	impulzus	%
507	22,19	22,19	0,00	0,0
556	20,52	20,77	0,25	1,2
606	18,95	19,32	0,37	1,9
656	17,51	17,87	0,36	2,0
706	16,17	16,42	0,25	1,5
762	14,79	14,79	0,00	0,0

A tényleges bóreloszlás-profil meghatározására kidolgozott, a mért α -spektrum Fourier transzformációján alapuló dekonvolúciós módszer alkalmazásával kapcsolatos tapasztalataink a következőképp összegezhetők [69—70]:

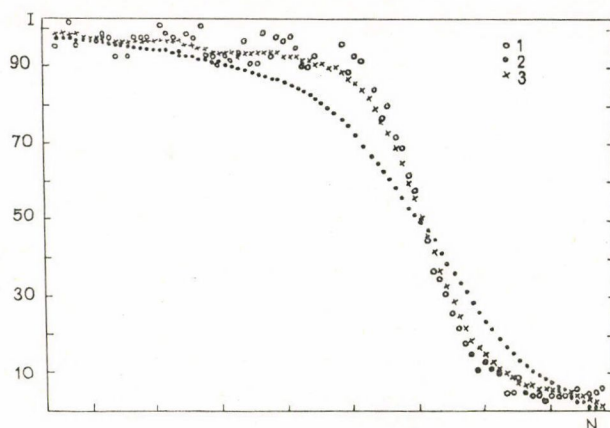
8. ábra. $^{10}\text{B}^+$ ionokkal implantált Si minták dekonvolúció után kapott bóreloszlása

- 1 implantációs energia 20 keV, a dekonvolúciót mért etalon spektrum alapján végezve,
 - 2 implantációs energia 20 keV, a dekonvolúciót a detektor felbontóképessége figyelembevételével elméletileg konstruált etalon spektrum alapján végezve,
 - 3 implantálási energia 80 keV, majd oxidnővesztés a felületen, a dekonvolúciót mért etalon spektrum alapján végezve,
 - 4 implantálási energia 80 keV, majd oxidnővesztés a felületen, a dekonvolúciót a detektor felbontóképessége figyelembevételével elméletileg konstruált etalon spektrum alapján végezve,
- c bórkonzentráció (atom $\cdot \text{cm}^{-3}$),
 d behatolási mélység (μm).



1. A dekonvolúció jól alkalmazható ionimplantált Si-szeletek bóreloszlásának vizsgálatára (itt a vizsgálandó α -spektrum közel szimmetrikus csúcs alakú), ha etalon spektrumként jó statisztikájú, mért spektrumot használunk. A detektor energiafelbontása ismeretében elméletileg konstruált etalon spektrum alkalmazása — mint a 8. ábrán látható — a mélyebb rétegekben már eltorzítja a bórprofil.

2. Végtelen vastag bórretegről felvett α -spektrum dekonvolúciója nem célszerű, mert a fellépő oszcillációk vagy pedig a túl nagy simítás miatt — l. 9. ábra — a kapott spektrum nagy mértékben torzul, s nem a tényleges bóreloszlásnak megfelelő bórprofil eredményezi.



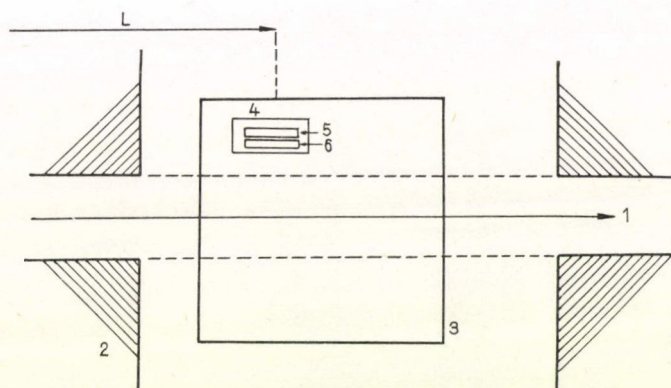
9. ábra. „Végtelen vastag” rétegről felvett α -spektrum dekonvolúciója 1 mért spektrum, 2 dekonvolúcióval kapott illesztett spektrum, 3 dekonvolúció nélkül kapott illesztett spektrum, I relatív intenzitás, N csatornaszám.

1.2. Bórmeghatározás autoradiográfias módon

A felületi bóreloszlás vizsgálatára a felületi záróréteges detektorral történő mérés technikán kívül egy neutronradiográfias módszert is kidolgoztunk. Mint ismeretes, a neutronradiográfias módszer a neutronok és a vizsgálandó anyag atomjai közötti kölcsönhatás következtében keletkező másodlagos sugárzás szilárdtest-nyomdetektorral történő regisztrációján alapul, s az (n, α) radiográfias mérés technika jól alkalmazható különböző anyagok börtartalmának vizsgálatára [71–77].

Miután a $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ reakcióban keletkező α -részek energiája 1,471 MeV, detektálásra LR 115 jelű Kodak gyártmányú detektort használtunk, amely csak a 4 MeV-nél kisebb energiájú α -részeket s a 100 keV-nél kisebb energiájú protonokat regisztrálja. Ez a detektor egy inert poliészter lemezre 13 μm vastagságban felvitt nitrátcélulóz film. A töltött részecske ebbe az érzékeny rétegbe hatol be, s itt fékeződik le, és a kémiai előhívás után jól látható nyomot képez. Az LR 115 detektor előhívása 60 °C-os 10%-os NaOH oldattal történt, a kezelési idő 90 perc volt. Az autoradiográfias felvételek kiértékelésére 750-szeres nagyítású mikroszkóp szolgált.

A méréseket az IBR—30 reaktor 2-es csatornáján végeztük kb. 10 m-re az aktív zónától. A mérendő mintát s a detektort szorosan, közvetlenül egymásra helyeztük — így érhető el a minta felületéről kilépő α -részecskék minimális szóródása — s egy alumínium fóliába csomagoltuk, amit egy paraffin tömbben kiképzett mélyedésbe helyeztünk. Hogy elkerüljük a protonok emittálásával járó, gyors neutronok hatására lejátszódó $^{14}\text{N}(n, p)$ és $^{12}\text{C}(n, p)$, valamint neutronszóródásos reakciók zavaró hatását, a detektort s a mintát nem közvetlenül a kollimált neutronnyaláb útjába helyeztük, hanem a 10. ábrán látható módon egy paraffin tömb mélyedésébe. A paraffin a gyors neutronok termalizációjára szolgált, s a mérési helyen — a paraffin tömb mélyedésében — a termikus neutronfluxus $\sim 10^7 \text{ n cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ volt. Itt a gyors és termikus neutronok aránya kisebb volt, mint 10^{-3} . A mérésekre — eltérően a vákumkamrában, felületi záróréteges detektorral történő bórmérésektől, amikor reaktoros üzemmódban mértünk — gyorsító üzemmódban került sor. Az IBR—30 impulzusreaktor kétféle üzemmódjára jellemző néhány adatot a 2. táblázatban ismertettünk [78—81].



10. ábra. Mintaelhelyezés az autoradiográfiai méréseknél
1 neutron nyaláb, 2 kollimátor, 3 paraffin tömb,
4 a paraffin tömbbe vágott mélyedés, 5 detektor, 6 minta,
L a reaktor aktív zónájától való távolság.

Az 1,471 MeV energiájú α -részecskék úthossza a különböző anyagokban néhány μm . Ilyen vastagságú rétegen áthaladva a neutronfluxus lényegében nem változik, s a felületi bórkoncentráció (c) a következő képlettel számítható:

$$c = \frac{N}{k \cdot I \cdot \sigma \cdot t},$$

ahol:

- N — nyomsűrűség az előhívott detektoron (cm^{-2}),
- I — termikus neutronfluxus ($\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$),
- σ — a $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ magreakció hatáskeresztmetszete (barn),
- t — expozíciós idő (s),
- k — kísérleti úton kapott konstans, értéke 0,147.

2. TÁBLÁZAT

Néhány összehasonlító adat reaktoros és gyorsító üzem módban az IBR—30 reaktoron

Jellemző paraméter	Reaktoros	Gyorsító
átlagos teljesítmény (kW)	20—25	7—8
impulzus időtartam (μ s)	70—90	4—5
frekvencia (s^{-1})	4—5	100
maximális impulzusteljesítmény (MW)	100	30
átlagos gyorsneutron-fluxus az aktív zónában ($n\text{ cm}^{-2}s^{-1}$)	$3 \cdot 10^{12}$	10^{12}
átlagos termikus neutronfluxus a moderátor felszínén ($n\text{ cm}^{-2}s^{-1}$)	$5 \cdot 10^{10}$	$5 \cdot 10^9$
átlagos termikus neutronfluxus a 2. csatornán, 10 m-re az aktív zónától ($n\text{ cm}^{-2}s^{-1}$)	10^7	10^6
a vízmódérátor vastagsága (cm)	9	4
%-os neutronarány $E_n < 0,4\text{ eV}$	38	11
%-os neutronarány $E_n = 0,4—400\text{ eV}$	22	14
%-os neutronarány $E_n = 400—0,56 \cdot 10^6\text{ eV}$	23	29
%-os neutronarány $E_n > 0,56 \cdot 10^6\text{ eV}$	17	46

A k konstans fellépte, amely lényegében a hatásfokra utal, a következőkkel magyarázható (71):

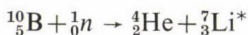
1. Csak azok az E energiájú α -részecskék detektálhatók, amelyekre fennáll, hogy $E > E_{\text{krit.}}$

2. Az előhíváskor csak akkor képződik nyom, ha a nitrátcellulóz filmbe behatoló részecske iránya és a detektor felületére merőleges irány közötti φ szögre fennáll, hogy $\varphi < \varphi_{\text{krit.}}$ Ez azzal magyarázható, hogy az előhívás után a filmen csak akkor képződik nyom, ha az oldószér behatolási sebessége a nyom irányába nagyobb, mint a felület leoldódásának sebessége.

A mennyiségi kiértékelést alumínium lapkára felvitt bóretalon segítségével végeztük. A bóretalont alkoholos bórsavoldatból készítettük, a ^{10}B atomokra vonatkozó bórkoncentráció $9,0 \cdot 10^{17}\text{ cm}^{-2}$ volt. Az autoradiográfiás módszer lényegesen jobb érzékenységgű bormérést tett lehetővé, mint a felületi záróréteges detektort alkalmazó mérés technika. Mintegy 10 órás expozíciós időnél a minimálisan mérhető borkoncentráció kb. 0,2 mg/kg volt.

1.3. Bórkoncentráció meghatározás γ -spektrometrián

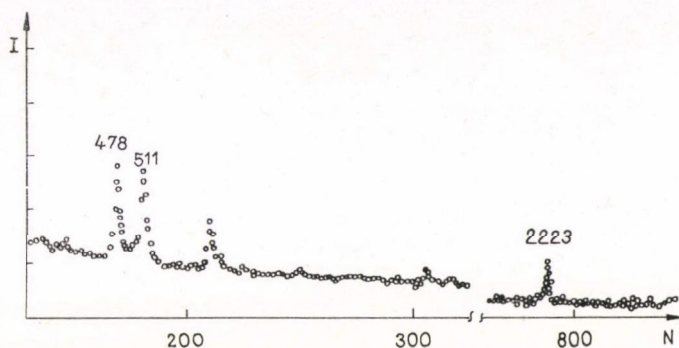
Miután a $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ reakcióban keletkező α -részecskék hatótávolsága a különböző anyagokban $< 10\text{ }\mu\text{m}$, ezért azok a bormeghatározási módszerek, amelyek a keletkező prompt α -részecskék detektálásán alapulnak, csak a vizsgálandó anyag felületi rétegének börtartalmáról adhatnak információt. A különböző anyagok átlagos börtartalma is meghatározható a $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ reakció alapján, ha nem az α részecskéket, hanem a gerjesztett ^7Li mag által kibocsátott prompt γ fotonokat detektáljuk [82—86].



A γ -spektrometriás méréseket reaktoros üzem módban végeztük, a reaktor aktív zónájától kb. 16 m távolságban. A termikus: gyors neutronarány növelésére 8 cm

vastag bizmut monokristály szűrőt alkalmaztunk, aminek eredményeképp a termikus neutronfluxus mintegy felére, a gyors neutronfluxus pedig mintegy huszadrészt csökkent.

A prompt γ fotonok regisztrálására 50 cm^3 -es $3,1 \text{ keV}$ energiafelbontású (a ^{60}Co $1,33 \text{ MeV}$ -es vonalára) $\text{Ge}(\text{Li})$ detektor szolgált, s az így kapott jeleket — kihasználva a repülési idő technika előnyeit — időkapuzott analizátorra vezettük. A háttér csökkentésére a detektor körül ólomból és betonból kialakított védelem szolgált. Egy biológiai minta prompt γ -spektruma a 11. ábrán látható.



11. ábra. Prompt γ -spektrum, a csúcsok energiája keV-ben
 I relatív intenzitás, N csatornaszám.

A mérések során a bőrt $200\text{--}300 \text{ mg}$ tömegű, alumínium fóliába csomagolt mintákból határoztuk meg. Az adott körülmények között, 10 órás mérés alatt a minimálisan meghatározható bórmenyiség $\sim 10 \mu\text{g}$ volt.

A mennyiségi kiértékelés bórsavból készített $50\text{--}200 \text{ mg}$ tömegű bóretalonokkal történő összehasonlítás alapján történt. Fluxusmonitorozásra, szerves üvegből készült proton konverterrel ellátott, felületi záróréteges Si detektor szolgált.

2. Ionimplantált Si szeletek vizsgálata

Mint ismeretes, a bórnak, mint univerzális p-típusú szennyezőanyagnak az alapanyagba való bevitelére gyakran ionimplantációs technikát alkalmaznak. Integrált áramkörök gyártásánál nagyon fontos a szilíciumba implantált bór ionok hatótávolság-energia összefüggésének, s az implantáció, utóimplantáció s hőkezelés hatására kialakuló bórkoncentráció mélységbeli eloszlásának ismerete.

Szilíciumba implantált bórionok eloszlásának vizsgálatára többféle elektromos mérési technikát dolgoztak ki, így pl. ismeretes a felületi ellenállásmérési módszer, a mikroszkóptechnika, a Hall-stripping vagy a differenciális kapacitásmérés eljárása [87—92]. Ezek a módszerek azonban — az alkalmazott rétegeltávolítási technika miatt — roncsolásos eljárások, így általában munkaigényesek s közvetettek. Ugyanakkor a $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ magreakció felhasználása lehetővé teszi a bórprofil roncsolásmentes vizsgálatát, azaz ugyanazon minta mérésének megismételhetőségét [58].

Szilíciumba implantált bór ionok hatótávolságának (\bar{R}_p) és annak szórására ($\Delta\bar{R}_p$) vonatkozóan pl. Gibbons [93] és Titov [94] végzett számításokat. Az \bar{R}_p és $\Delta\bar{R}_p$

3. TÁBLÁZAT

\bar{R}_p és $\Delta\bar{R}_p$ értékek $^{10}\text{B}^+$ ionokra szilíciumban az implantálási energia függvényében Å-ben

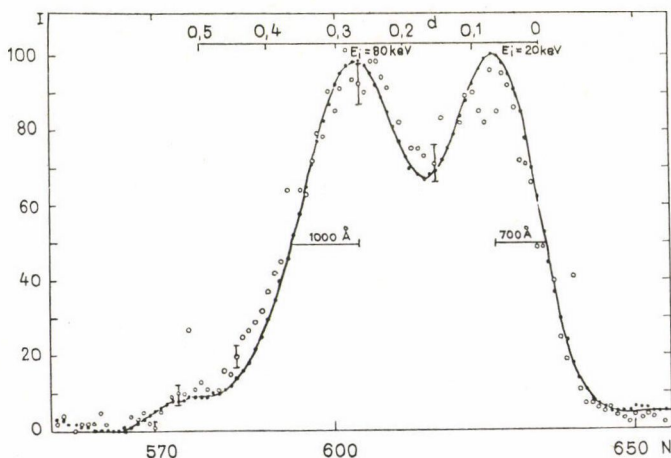
Implantálási energia (keV)	\bar{R}_p (Å)	$\Delta\bar{R}_p$ (Å)	$\Delta\bar{R}_p:\bar{R}_p$ (%)
4	120	75	63
8	260	150	58
12	410	210	51
20	780	321	41
30	1150	450	39
51	1900	620	33
75	2700	780	29
100	3400	930	27
200	6500	1200	18

értékek alakulását az implantálási energia függvényében a 3. táblázat mutatja [94].

Az általunk vizsgált 2–10 cm² felületű, 200–500 µm vastagságú Si minták implantálása a Központi Fizikai Kutató Intézetben s a moszkvai Kurcsatov Intézet Ionimplantációs Osztályán történt [94–97]. A $^{10}\text{B}^+$ és $^{10}\text{BF}_2^+$ ionokkal szobahőmérsékleten implantált minták a csatornaeffektus elkerülése céljából az $\langle 100 \rangle$ irányból dezorientáltak voltak. Az implantálási energia 10–80 keV, az implantálási dózis 1000, ill. 2000 µCb/cm² volt (1 µCb = $6,25 \cdot 10^{12}$ atom).

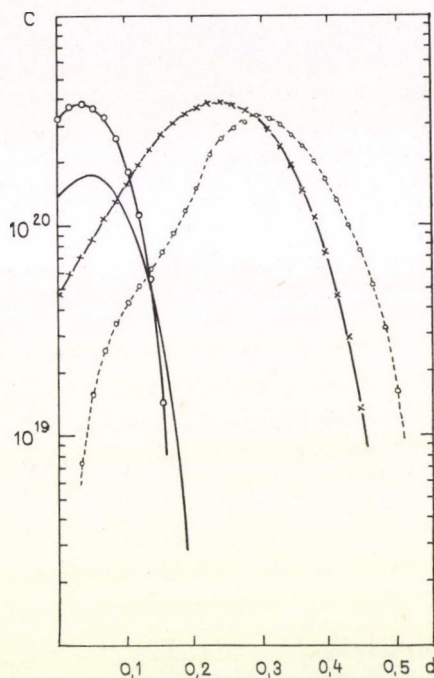
Az \bar{R}_p értékek s a koncentrácioprofil meghatározása az α -részecskék energia-vesztése ismeretében történt. A mérés elve az, hogy a ΔE_x energiavesztés azzal a mélységgel arányos, ahol a magreakcióban résztvevő bóratom helyezkedett el. A meghatározás a dE/dx értékek ismeretében történt, numerikus integrálással. Az α -részecskék szilíciumban való lefékeződésére jellemző dE/dx értékek pedig táblázatokból [98–100] vagy empirikus függvényekből [58, 101] nyerhetők. Az adott mérési körülmények között a bórionok hatótávolságának meghatározása ± 200 Å pontossággal volt lehetséges. A szilíciumba implantált bórionok eloszlásának vizsgálatáról több konferencián [102–106] s publikációban [107–111] számoltunk be.

A 12. ábra egy 20 keV-vel implantált, majd 80 keV-vel utóimplantált Si($^{10}\text{B}^+$) minta kettős α -spektruma mutatja. Látható, hogy az implantációs profil a nagyobb energiánál szélesebb, azaz a 80 keV-es csúcs alatti terület nagyobb.



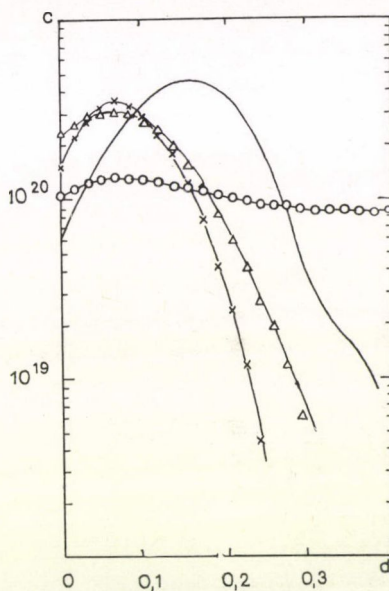
12. ábra. Egy 20 keV-vel implantált, majd 80 keV-vel utóimplantált Si($^{10}\text{B}^+$) minta kettős α -spektruma
 I relatív intenzitás, N csatornaszám, d behatolási mélység (µm).

A 13. ábrán különböző energiával implantált $^{10}\text{B}^+$ és $^{10}\text{BF}_2^+$ ionok mélységbeli eloszlása látható. Az implantálási dózis minden esetben $2000 \mu\text{Cb}/\text{cm}^2$ volt. A 80 keV energiával implantált $^{10}\text{B}^+$ ionokat tartalmazó Si minta bórprofilja felülethez közelebb eső részének profilmódosulása azzal függ össze, hogy az implantálás után a minta felületén $\sim 0,2 \mu\text{m}$ rétegvastagságú oxidnövesztés történt, s a Si—SiO₂ határfelületen a bór relatíve feldúsul.



13. ábra. Implantált $^{10}\text{B}^+$ és $^{10}\text{BF}_2^+$ ionok mélységbeli eloszlása szilíciumban

—×—×—×—×— 10 keV $^{10}\text{B}^+$
 —×—×—×—×— 60 keV $^{10}\text{B}^+$
 - - - - - o - - - - - 80 keV $^{10}\text{B}^+$
 —o—o—o—o— 80 keV $^{10}\text{BF}_2^+$
 c koncentráció (atom·cm⁻³)
 d behatolási mélység (μm).



14. ábra. Bórprofil-módosulás hőkezelés hatására

—×—×— 25 keV, hőkezelés előtt,
 —△—△— 25 keV, hőkezelés után,
 ———— 40 keV, hőkezelés előtt,
 —o—o— 40 keV, hőkezelés után,
 c koncentráció (atom·cm⁻³)
 d behatolási mélység (μm).

A bórtartalom mérési adatainak reprodukálhatóságáról a 4. táblázat tájékoztat. 8 párhuzamos mérést végeztünk — egy mérés időtartama 5—15 óra volt — egy 7,8 cm² felületű, $2000 \mu\text{Cb}/\text{cm}^2$ dózissal implantált Si mintáról. A mérési idő csökkentésével, vagy kis felületű minta mérése esetén a meghatározás pontatlansága természetesen nő, s meghaladja a 4. táblázat adataiból számítható 4,6%-os szórását. Egy-egy minta 2 párhuzamos mérése közötti eltérés azonban az esetek döntő többségében nem haladta meg a 10—15%-ot.

A 14. ábra egy 25 és egy 40 keV energiával implantált Si ($^{10}\text{B}^+$) minta hőkezelés következtében előálló bórprofil módosulását mutatja. A hőkezelésre a moszkvai Kurcsatov Intézetben került sor, ahol a 25 keV-vel implantált mintát 400°C -on, a 40 keV-vel implantáltat 900°C -on kezelték inert atmoszférában 30 percen keresztül. A profil módosulás a hőkezelés hatására végbemenő diffúzió következménye. Az implantált bórionok eloszlásának s a bór Si-ban való diffúziójának kérdéseivel a [112–120] irodalom foglalkozik. A hőfok emelésével egyébként — mint ismeretes — nő az elektromosan aktív állapotú bóratomok mennyisége.

4. TÁBLÁZAT

A mérési eredmények reprodukálhatóságának vizsgálata

Mérés száma	Impulzusszám		$x_i = \frac{10^4 a_i}{b_i}$
	bór a_i	monitor b_i	
1	1785	17 500	1020
2	2791	29 074	962
3	344	3 544	971
4	2607	24 637	1058
5	1302	11 795	1103
6	2794	28 929	966
7	2182	20 435	1068
8	2056	20 212	1017

$$\bar{x} = 1021$$

$$s_x = 47 = 4,6\%$$

$$x = 1021 \pm 47$$

zat nem az abszolút mért eredményeket, hanem a $D_N:D_E$ értékeket, azaz a nukleáris és elektromos módszerrel mért dózisok arányait mutatja. Az implantálás során a dózis meghatározása a

$$D = \int_{t_1}^{t_2} I dt$$

összefüggés alapján történik, ahol

I — áramerősség,

t — idő.

Az 5. táblázat azon kontroll mérések eredményeit is tartalmazza, amelyeket a rezi Magkutató Intézetben (Csehszlovákia) végeztek [61], [123], ill. megadjuk a KFKI-ban végzett felületi ellenállásmérések eredményeit is. A különböző időben, ill. helyen előállított, vagy eltérő mérési módszerrel vizsgált minták mérési eredményeit egymástól elválasztva tüntetjük fel. Egy-egy minta bórdózisának mérésére általában 3 párhuzamos vizsgálatot végeztünk, s a táblázatban feltüntetett szórási értékeket ezen párhuzamos mérési adatokból számoltuk.

Az 5. táblázat adatai egyértelműen azt mutatják, hogy az ionimplantálás során elektromos módszerrel mért dózis nem független az implantálási energiától. Alacsony implantálási energiáknál ($E_i < 40$ keV) a D_N tényleges dózis lényegesen kisebb, mint a D_E dózis. Az implantálási energia növelésével a D_E és D_N közötti különbség csökken, s 80 keV felett a két érték gyakorlatilag azonosnak tekinthető.

Az implantálási dózis energiafüggését véleményünk szerint egy

$$D(E_i) = 1 - e^{-kE_i}$$

5. TÁBLÁZAT

A $^{10}\text{B}^+$ ionokkal implantált Si minták vizsgálati eredményei

Mintaelőállítás helye	Implantálási dózis D_F $\mu\text{C}/\text{cm}^2$	Mérés helye	Mérési módszer	Implantálási energia keV	D_N/D_E
KFKI	1000	Dubna	$^{10}\text{B}(n, \alpha)$	20	$0,30 \pm 0,03$
				40	$0,55 \pm 0,05$
				60	$0,58 \pm 0,05$
				80	$0,91 \pm 0,05$
KFKI	1000	Rez	$^{10}\text{B}(n, \alpha)$	20	$0,26 \pm 0,03$
				40	$0,48 \pm 0,05$
				60	$0,66 \pm 0,06$
KFKI	2000	Dubna	$^{10}\text{B}(n, \alpha)$	10	$0,20 \pm 0,02$
				10	$0,20 \pm 0,02$
				20	$0,32 \pm 0,03$
				20	$0,32 \pm 0,04$
				25	$0,44 \pm 0,04$
				25	$0,48 \pm 0,05$
				25	$0,50 \pm 0,05$
				25	$0,52 \pm 0,05$
				25	$0,50 \pm 0,03$
KFKI	2000	Dubna	$^{10}\text{B}(n, \alpha)$	20	$0,51 \pm 0,03$
				20	$0,51 \pm 0,06$
				40	$0,65 \pm 0,04$
				40	$0,70 \pm 0,04$
				60	$0,68 \pm 0,03$
				80	$0,92 \pm 0,04$
				80	$0,92 \pm 0,08$
				80	$1,04 \pm 0,04$
KFKI	2000	Rez	$^{10}\text{B}(n, \alpha)$	10	$0,20 \pm 0,02$
				20	$0,32 \pm 0,03$
				40	$0,68 \pm 0,06$
				40	$0,62 \pm 0,06$
				40	$0,56 \pm 0,06$
				40	$0,60 \pm 0,06$
				60	$0,72 \pm 0,07$
				60	$0,80 \pm 0,08$
				80	$1,00 \pm 0,10$
Kursatov Intézet	2000	Dubna	$^{10}\text{B}(n, \alpha)$	20	$0,47 \pm 0,04$
				30	$0,60 \pm 0,06$
				30	$0,68 \pm 0,06$
				80	$0,92 \pm 0,06$
Kursatov Intézet	2000	Dubna	$^{10}\text{B}(n, \alpha)$	20	$0,44 \pm 0,03$
				40	$0,57 \pm 0,03$
				60	$0,68 \pm 0,03$
				80	$0,82 \pm 0,03$
Kursatov Intézet	2000	KFKI	felületi ellenállás-mérés	20	$0,50 \pm 0,04$
				40	$0,68 \pm 0,03$
				60	$0,70 \pm 0,05$
				80	$0,92 \pm 0,10$

alakú összefüggés írja le. Az 5. táblázatban közölt adatokra vonatkozóan a

$$D(E_i) = 1 - e^{-0,0245E_i}$$

függvény adja a legjobb illesztést, ahol E_i az implantálás energiája keV-ben. A 6. táblázat a $D_N:D_E$ értékeket mutatja ezen függvény alapján számolva.

Arra a kérdésre, hogy mivel magyarázható az implantálási dózis energiatfüggése, jelenleg teljesen egyértelmű magyarázatot nem tudunk adni. A ténylegesen mérhető bór dózis s az elektromos úton mért dózis közötti különbség elméletileg a következőkkel magyarázható:

1. csatorna-effektus,
2. árammérési hiba sekunder effektusok következtében,
3. ionnyaláb elhajlás,
4. visszaszóródás,
5. felületelporlódás,
6. utólagos deszorbcio a felületről.

A csatorna-effektus elvileg jó magyarázatot adna, hisz az implantálási energia csökkenésével nő a csatorna-effektus valószínűsége. A csatorna-effektus fellépésével azonban az eltérés nem indokolható, hisz a Si minták — éppen a csatorna-effektus elkerülése céljából — az $\langle 100 \rangle$ irányból dezorientálva voltak.

6. TÁBLÁZAT
A $D(E_i) = 1 - e^{-kE_i}$
függvény alapján számított
 D_N/D_E értékek az
implantálási energia
függvényében

Implantálási Energia (keV)	D_N/D_E
10	0,22
15	0,31
20	0,39
25	0,46
30	0,52
35	0,58
40	0,62
45	0,67
50	0,71
55	0,74
60	0,77
65	0,80
70	0,82
75	0,84
80	0,86
85	0,88
90	0,89
95	0,90
100	0,91
110	0,93
120	0,95
150	0,97
200	0,99
250	1,00

Feltételezhető, hogy a nukleáris és elektromos úton mért dózisok közötti különbség (vagy ennek egy hányada) másodlagos effektusok következtében fellépő árammérési hibával függ össze, ugyanis kis implantálási energiáknál ezen hiba valószínűsége nagyobb. Ugyancsak nagyobb valószínűséggel következik be ionnyalábelhajlás is kis implantálási energiánál.

Amennyiben a felületről való visszaszóródás jelensége áll fenn, úgy ennek ellenőrzésére egy olyan kontrollmérésre lenne szükség, amely során az implantálandó minta felületével párhuzamosan egy felfogó lap lenne elhelyezve (természetesen az eredeti ionnyalábon kívül). Ha ezen a Si lapon a bór kimutatható, úgy a visszaszóródás jelensége bizonyított.

A felületelporlódás az implantálandó target felületének az implantáló ionok integrális fluxusával arányos mérvű, s a bombázó részecskék s a felület kölcsönhatása következtében fellépő elporlódása, lemaródása. Azok a bórionok tehát, amelyek a felület közelében helyezkednek el, a felület elporlódása következtében eltávozhatnak a Si mintáról.

A $^{10}\text{B}^+$ ionokkal implantált mintákon kívül a KFKI-tól $^{10}\text{BF}_2^+$ ionokkal implantált mintákat is kaptunk. Ezek $2000 \mu\text{Cb}/\text{cm}^2$ implantálási dózissal s 80 keV implantálási energiával készültek. Méréseink során a $^{10}\text{BF}_2^+$ minták $D_N:D_E$ értékét $0,60 \pm 0,05$ -nek találtuk. Ha ezt az értéket összehasonlítjuk a $^{10}\text{B}^+$ ionokkal történő im-

plantálásra jellemző $D_N:D_E$ értékekkel (6. táblázat), úgy látható, hogy a 0,60-as érték kb. 35—40 keV implantálási energiának felel meg. Ez minden bizonnyal azzal függ össze, hogy az \bar{R}_p érték — azonos implantálási energia esetében — a $^{10}\text{BF}_2^+$ ionoknál lényegesen kisebb, mint a $^{10}\text{B}^+$ ionoknál. A 13. ábra alapján pl. megállapítható, hogy 80 keV implantálási energia esetében a $^{10}\text{B}^+$ ionok átlagos hatótávolsága szilíciumban mintegy 0,3 μm , míg $^{10}\text{BF}_2^+$ ionok esetén $<0,1 \mu\text{m}$.

Véleményünk szerint az a tény, hogy kis implantálási energiáknál a D_N és D_E dózis között jelentős különbség van, összefügg azzal, hogy kis implantálási energiáknál kicsi az \bar{R}_p érték is, s így $\Delta\bar{R}_p:\bar{R}_p$ arány viszonylag nagy, aminek következtében nem tud kialakulni a nagyobb implantálási energiákra jellemző, közel szimmetrikus, tipikus implantálási profil. Mindez jól látható a 12. és 13. ábrán. Miután kis implantálási energiáknál az implantált ionok egy része közvetlenül az implantált minta felületén, vagy annak közvetlen környezetében található, ezért az implantált ionok jelentős hányada deszorbeálódhat, s így az implantációs hatékonyság (α) értéke szignifikánsan kisebb lehet egynél [124]. Az α a következő hányadosként definiálható:

$$\alpha = \frac{N_{sz}}{N_i},$$

ahol:

N_{sz} — a szorbeált ionok mennyisége,

N_i — az implantált ionok mennyisége.

3. Fémüvegek vizsgálata

Az utóbbi években számos szilárdtestfizikával foglalkozó kutató érdeklődése fordult a fémüvegek előállítása s vizsgálata irányába. Fémüvegeknek a mechanikailag szilárd, de atomos szerkezetükre nézve amorf (nem kristályos) fémeket és ötvözeteket nevezzük [125—130]. A fémüvegek mechanikai, elektromos, mágneses s korróziós tulajdonságai jelentősen különböznek a kristályos fémekétől s ötvözetekétől, s az elkövetkező időszakban az üvegfémek várhatóan a műszaki élet számos területén alkalmazást nyernek [131—136]. A fémüvegekre nagy keménység s ugyanakkor nagyfokú képlékenység, nagyfokú mechanikai szilárdság és mágneses lágyság (nagy permeabilitás, gyenge hiszterézis) s jó korrózióállóság jellemző. Mivel a fémüvegekben általában a homogén szerkezet miatt nagyon gyenge a hang csillapítása, akusztikus hullámvezetők gyártására kiválóan alkalmasak. Kísérletek folynak alumíniumba, betonba, műanyagokba ágyazott fémüvegszálak erősítő hatásának kihasználására s nagy ferromágneses anyagok előállítására is.

A fémüvegek előállítása gyorsfűtéssel történik, ilyenkor a higan folyó fémolvadék a kristályosodást elkerülve amorf állapotba jut. A hűtési sebesség a fémüveg szálak és szalagok folytonos öntésére szolgáló berendezéseknél általában 10^6 — 10^8 K°/s. Hogy az adott hűtési sebesség elég-e az amorf szerkezet kialakításához, az az anyag összetételétől függ. Minden összetételhez ugyanis megadható egy R_{krit} hűtési sebesség, amelynél gyorsabb hűtéskor az anyagnak csak egy önkényesen választott hányadánál (pl. 10^{-5}) kisebb része kristályosodik ki, míg a többi üvegszerű, amorf állapotba megy át. A fémüvegek előállításával kapcsolatos kutatások részben egyre gyorsabban hűtő berendezések készítésére, részben pedig olyan ötvözetek kikísérletezésére irányulnak, amelyeknél az R_{krit} sebesség értéke minél kisebb.

Az üvegfémek összetételüket tekintve általában egy vagy több átmeneti fém (Fe, Co, Ni, Pd, Pt, Mn) esetleg ritkaföldfém s egy vagy több metalloidot (P, Si, B, C) tartalmaznak. A fém:metalloid arány atom%-ban megközelítően 80:20. Így pl. ismertek $\text{Pd}_{78}\text{Si}_{22}$, $\text{Pd}_{78}\text{Si}_{16}\text{Cu}_6$, $\text{Pd}_{76}\text{Si}_{16}\text{Ag}_8$, $\text{Pd}_{78}\text{Si}_{16}\text{Ni}_6$, $\text{Fe}_{75}\text{P}_{15}\text{C}_{10}$, $\text{Ni}_{76}\text{P}_{24}$, $\text{Ni}_{46}\text{Fe}_{20}\text{P}_{14}\text{B}_6\text{Al}_2$, $\text{Fe}_{84}\text{P}_{16}$, $\text{Co}_{75}\text{P}_{25}$, $\text{Fe}_{80}\text{P}_{20}$ stb. összetételű fémüvegek. A fémüvegek fajsúlyban is különböznek a hasonló összetételű, de kristályos szerkezetű ötvözetektől (l. 7. táblázat), a fémüvegek fajsúlya általában 1,0–1,5%-kal kisebb, mint a kristályos ötvözeteké [137–138].

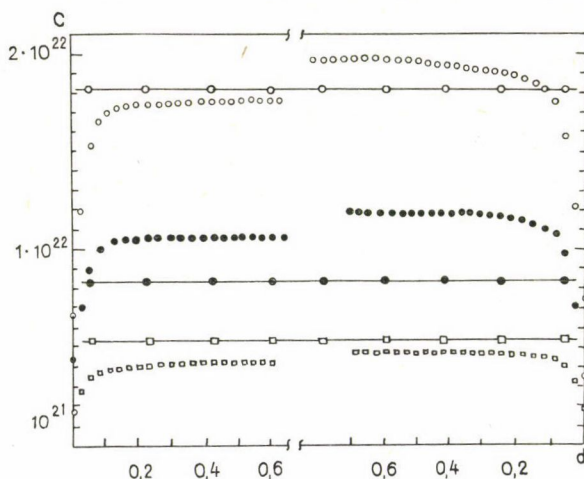
7. TÁBLÁZAT

Azonos összetételű amorf fémüveg és kristályos szerkezetű ötvözet sűrűsége

Összetétel	Sűrűség g/cm ³	
	kristályos ötvözet	amorf fémüveg
$\text{Fe}_{84}\text{P}_{16}$	7,30	7,21
$\text{Ni}_{76}\text{P}_{24}$	7,85	7,79
$\text{Co}_{75}\text{P}_{25}$	8,00	7,90
$\text{Pd}_{80}\text{Si}_{20}$	10,50	10,25
$\text{Pd}_{78}\text{Si}_{16}\text{Cu}_6$	10,69	10,52

Az általunk vizsgált fémüvegmin-ták összetétele $\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{B}_{20}$, $\text{Fe}_{80}\text{P}_{10}\text{B}_{10}$, $\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{P}_{14}\text{B}_6$, $\text{Fe}_{80}\text{B}_{20}$, $\text{Fe}_{83}\text{B}_{17}$ és $\text{Ni}_{36}\text{Fe}_{32}\text{Cr}_{14}\text{P}_{12}\text{B}_6$, felülete 1–5 cm², sűrűsége 6,8–7,2 g/cm³, vastagsága 10–50 μm volt [139–141]. A minták Morristownból (Allied Chemical Co.) s Murray Hillből (Bell Laboratories) származtak. Az

$\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{B}_{20}$, az $\text{Fe}_{80}\text{P}_{10}\text{B}_{10}$ és az $\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{P}_{14}\text{B}_6$ összetételű fémüvegmin-ták elméleti s mért bórtartalmát a 15. ábra mutatja. A mérések során külön mértük a fényes és matt oldal bórtartalmát. Mivel a fémüvegekben az 1,47 MeV energiájú α -részecskék \bar{R}_p



15. ábra. Fémüveg minták elméletileg számított s mért bórtartalma

- $\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{B}_{20}$ elméletileg számított,
 - ○ ○ ○ $\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{B}_{20}$ mért,
 - $\text{Fe}_{80}\text{P}_{10}\text{B}_{10}$ elméletileg számított,
 - ● ● ● $\text{Fe}_{80}\text{P}_{10}\text{B}_{10}$ mért,
 - $\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{P}_{14}\text{B}_6$ elméletileg számított,
 - □ □ □ $\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{P}_{14}\text{B}_6$ mért,
- c koncentráció (atom·cm⁻³) d mélység (μm)

értéke mintegy 2,0—2,5 μm , ezért az α -részecskék detektálásán alapuló mérési módszer legfeljebb 1 μm mélységig történő bórkoncentráció mérést tesz lehetővé.

A 15. ábra azt mutatja, hogy a mért börtartalom jól egyezik az elméletileg számított értékkel. A fémüveg szalagok fényes és matt oldala között mért bórkoncentráció különbség — az eltérés nem szignifikáns — pedig összefüggésben lehet azzal a ténnyel, hogy az olvadékból való gyors lehűtés során a matt oldal érintkezik a henger hideg felszínével, s a szilárd—folyadék átmeneti réteg gyors mozgásban van a hideg oldal irányából a szabad felszín felé a megszilárdulási folyamat során.

4. Biológiai minták börtartalmának s a bór felvételét befolyásoló egyes tényezők vizsgálata

Mintegy 70 éve ismeretes, hogy a bór a növények számára esszenciális mikroelem, s a bórhiány különböző megbetegedéseket, kultúrnövények esetében jelentős termés-csökkenést is eredményezhet. A bór alapvető növényfiziológiai szerepe a sejtszuktúra fenntartásában s a szénhidráttranszport, valamint a mag- és termésképződés biztosításában rejlik. Egyes növények — pl. cukorrépa, len — különösen nagy bór-igényűek, másoknak — pl. gabonafélék — kevesebb bórra van szükségük. A litoszféra s a talaj átlagos börtartalma $3 \cdot 10^{-4}\%$ [142], azonban a különböző talajok eltérő börtartalma, az egyes növények különböző bór-igénye, valamint egyéb tényezők (pl. csapadékban gazdag helyeken a bór gyorsan kimosódik a talajból) következtében a növényeken gyakran bórhiányra utaló tünetek jelentkeznek [143—145]. Így pl. magyarországi szőlőkben végzett levélanalízisek igazolták a szemmel is érzékelhető, súlyos bórhiánytüneteket badacsonyi s egyes alföldi ültetvényeken. 100 kg bórax/ha adagolás a növekedési és megtermékenyülési rendellenességeket megszüntette, s a termést hatékonyan növelte. A talaj bórral történő trágyázása esetén — a növény csak bórsav vagy ennek sói formájában képes a talajból a bört felvenni — viszont problémát okozhat az a tény, hogy a bór adott koncentráció felett már toxikus hatású a növényekre, s a fiziológiailag szükséges, valamint a toxikus koncentráció közötti intervallum nem túl széles [146]. Így miután a bört a növény nagyon könnyen felveszi, a túlzott bór-adagolás könnyen okozhat toxikus károkat.

A 8. és a 9. táblázat néhány növény minimálisan szükséges, valamint az általában mérhető, átlagos bórkoncentrációját mutatja [146—155]. A táblázatokból megállapítható, hogy az egyes növényfajok bór-igénye s börtartalma jelentősen különbözik, s az egyszikűeknek kevesebb bórra van szükségük, mint a kétszikűeknek.

Miután a bór fiziológiai szerepét, a bór növényen belüli eloszlását, a talaj s a növény börtartalmának összefüggését s a bórhiány s a toxikus koncentráció kérdéseit tárgyaló szakirodalom [156—161] nem ellentmondásmentes, s több kérdés meglehetősen nyitott, a gödöllői Agrártudományi Egyetem kutatóival együttműködve számos bórvizsgálatot végeztünk. A mérések során vizsgáltuk a kuko-

8. TÁBLÁZAT

Egyes növényi levelek minimálisan szükséges bórkoncentrációja szárazanyagra vonatkozóan ppm-ben

Egyszikűk		Kétszikűk	
búza	2	káposzta	25
árpa	2	lucerna	20
kukorica	2	zeller	20
		dohány	16
		uborka	15
		tök	15
		burgonya	6

9. TÁBLÁZAT

Néhány növény átlagos börtartalma
ppm-ben

Növényi anyag	Bórkoncentráció (ppm)
búza (termés)	16
lóhere	22
rétiszéna	12
barna alga	164
Bowen-féle kelkáposzta*	48
SRM—1571*	33

* a Bowen-féle szárított kelkáposzta s a különböző gyümölcsfák szárított leveleiből őrléssel készített SRM—1571 jelű minta az aktivációs analízisben biológiai standardként használatos

rica és a bab bórfelvételét a tápoldat börtartalma, pH-ja s a kezelési idő függvényében, a bór eloszlását levélszintenként s a levélfelületén, valamint néhány növényi eredetű élelmi anyag bórkoncentrációját.

A kukorica- és bablevélminták elkészítése Gödöllőn történt, a 2 hetes, 1/2 Knop tápoldatban nevelt növényeket kukorica esetében 24 vagy 72 órán keresztül kezelték 1, 10 vagy 100 ppm bört tartalmazó oldatban, bab esetében pedig a maximális kezelési idő 144 óra, a tápoldat maximális bórkoncentrációja pedig 1000 ppm volt. A bórral való kezelés a tápoldathoz megfelelő mennyiségű bórsav-adagolással történt. A kezelés után a levélkéket levágták a töről, s mérésre szárított állapotban kerültek. A szárított levélminták víztartalma ~15% volt. A kukoricalevelek mérésénél kapott eredményekről a 10. táblázat tájékoztat [162—164].

Megemlítjük, hogy a bórkoncentráció α -sugárzás méréssel történő meghatározásához szükséges a mérendő minta kémiai összetételének ismerete is, ebből s a sűrűségből számítható ugyanis az adott anyagra jellemző dE/dx érték. A szárított levélkék kémiai összetételét $H_{51}C_{23}O_{26}$ formulával jellemeztük, amit úgy kaptunk, hogy a légszáraz levél szárazanyagát szénhidrátnak tekintettük. Tény ugyan, hogy a szárazanyagban Na, K, Ca, N, B stb. elemek is előfordulnak, de részben ezen elemek relatív koncentrációja kicsi, s együttesen is csak néhány %-át képezik a szárazanyagnak, másrészt ezen elemek nagy részének alacsony a rendszáma, s így az ezekre vonatkozó dE/dx értékek nem térnek el jelentősen pl. az oxigén dE/dx értékétől. Így a kémiai összetétel pontatlansága a többi mérési hibánál — felületmérés, súlymérés, aktivitásmérés — kisebb, s ráadásul lényegében csupán szisztematikus hibát okoz.

A 10. táblázat adatai azt tükrözik, hogy a növénykék börtartalma egyenes arányban van a tápoldat bórkoncentrációjával s a kezelési idővel. Látható, hogy az 1 ppm bört tartalmazó tápoldatban nevelt növénykék leveleinek bórkoncentrációja azonos nagyságrendű a kontroll minta leveleinek börtartalmával. Ez részben arra utal, hogy ez a tápoldat-koncentráció már meglehetősen alacsony a bórfelvétel tanulmányozá-

10. TÁBLÁZAT

A kukoricalevelek mért bórkoncentrációja 10^{19} atom/cm³ egységben

Kezelési idő (h)	A tápoldat bórkoncentrációja ppm-ben				
	100	10	1	kontroll	
24	felső levél	19,2	5,7	2,8	1,5
	alsó levél	11,9	2,2	1,0	0,7
72	felső levél	85,7	7,9	6,5	3,5
	alsó levél	22,0	4,6	1,9	1,5

sára — az eredeti Knop-oldat is tartalmaz bizonyos mennyiségű bór, s a növénykéek a kezdeti időszakban nem csupán a tápoldatból, hanem a magból is vesznek fel ásványi anyagokat — másrészt a levelek alacsony bórkoncentrációja következtében a mérés hibája is nagy. A vizsgált minták felülete $2\text{--}4\text{ cm}^2$ volt, s a felületi záróréteges Si detektoros méréstechnika akkor adott a reprodukálhatóság szempontjából elfogadható eredményeket, ha a szárazanyagra vonatkoztatott bórkoncentráció meghaladta a 200 ppm értéket ($10^{19}\text{ atom}\cdot\text{cm}^{-3}=179\text{ ppm}$). Látható, hogy a kontroll-levelek bórkoncentrációja ezen határ körül volt. A kimutatási határra vonatkozó megállapítás természetesen az adott mérési viszonyokra érvényes, s pl. a mérési idő növelésével (pl. 10 órás mérés helyett 20—30 órás) természetesen a mérés pontossága is javul, ill. csökken a kimutatási határ. Nyilvánvaló persze, hogy a mérési idő nem növelhető akadálytalanul. Mint korábban már említettük, egy kb. 10 órás mérés során a kimutatási határ $2\cdot 10^{-7}\text{ g}$ bór, azaz 10 cm^2 felületű mintát feltételezve, s figyelembe véve, hogy a mérés során a bór nem a teljes mintából, hanem csupán egy $\sim 2\text{ }\mu\text{m}$ vastagságú felületi rétegből határoztuk meg, a kimutatási határ a száraz növényi anyagban kb. 100 ppm bór, azaz friss, natív állapotú növényi anyagra vonatkozóan kb. 10 ppm.

A 10. táblázat adatai alapján megállapítható, hogy a felső levelek bórkoncentrációja jelentősen meghaladta az alsó levélszinten mérhető bórkoncentrációt. (A bórral való kezelést megelőzően a növénykéek nevelése a 1/2 Knop-tápoldatban 3 leveles korukig — 2 hét — történt, így a felső levélszint a legfiatalabb, s az alsó a legidősebb.) Így tehát a gyökérzet által felvett bór eloszlása nem egyenletes a növényben, s attól függ, hogy fejlődése melyik szakaszában kapja a növény a bór. Mivel az alsó és felső levélszint bórtartalma között jelentős különbség adódott, ez arra utal, hogy a különböző korú levelek közötti transzlokáció minimális, azaz ahova a bór beépült, ott is marad. Mindez alátámasztja azt a feltételezést, miszerint a bór a növényben a transzspirációs árammal mozog [146, 165], s mivel a különböző korú növényi részek közötti bórtranszport a legtöbb növénynél — kivétel a gyapot és a fehértrepá — nagyon kismérvű, a növénynek gyakorlatilag a teljes fejlődési periódus alatt szüksége van bórra.

A 10. táblázat adataiból látható, hogy annak ellenére, hogy a 10 ppm-nél több bór tartalmazó tápoldat már toxikus a növényre, a bórfelvétel 1-2 nagyságrenddel is meghaladhatja a fiziológiailag szükséges mennyiséget. Ez a probléma környezetvédelmi s egészségügyi szempontból is jelentős lehet, hisz a bór az emberi s állati szervezetre már kis koncentrációban is toxikus hatású [166—167]. Komoly, s már erősen fitotoxikus mérvű bórfeldúsulást észleltek pl. a bórtartalmú üvegszálakat s zománcfestéket előállító üzemek környékén a növényzetben [168], s ugyancsak jelentős mennyiségű bór vehetnek fel a növények a levegőből kiülepedő pernyéből s hamuból is [169—171]. A hamu bórtartalma pl. átlagosan 800 mg/kg -ra becsülhető, s ennek mintegy 15%-a vízzoldható, azaz kb. 120 mg/kg a növények által felvehető bór mennyisége [171]. A növények egyébként a bór — hasonlóan a többi mikroelemhez — nem csupán a gyökérzetben, hanem a levélzetben keresztül is felvehetik, s az ionfelvételre azonos kinetikus konstansok s ionszelektivitás jellemző [172].

Irodalmi adatok szerint [145, 146, 165, 171] a talaj pH-ja negatív korrelációban van a növények bórtartalmával, azaz minél magasabb a talaj alkálitása, annál kisebb a bórkoncentráció a növényekben. Ezt az összefüggést nekünk kísérletileg nem sikerült igazolni, ugyanis a 10 ppm bór tartalmazó tápoldattal 24 órán keresztül kezelt babnövénykéek felső leveleinek bórkoncentrációja a pH függvényében a következőképp alakult: $pH=4$ -nél $(0,43\pm 0,08)\cdot 10^{20}\text{ atom}\cdot\text{cm}^{-3}$, $pH=6$ -nál $(0,41\pm 0,10)\cdot 10^{20}\text{ atom}\cdot\text{cm}^{-3}$, s $pH=8$ -nál $(0,48\pm 0,03)\cdot 10^{20}\text{ atom}\cdot\text{cm}^{-3}$. Látható, hogy a 3 külön-

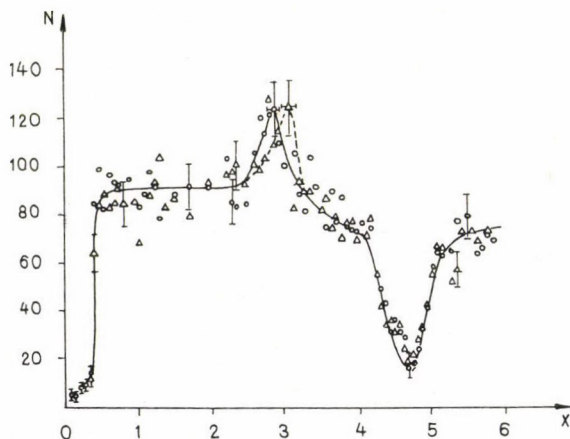
böző pH-nál mért érték a hibahatáron belül azonos, ami vagy azzal magyarázható, hogy ennél a nem túl nagy bórkoncentrációnál a mérési adatok pontatlansága viszonylag nagy, vagy pedig azzal, hogy a pH ugyan befolyásolja a bór felvételt, de nem olyan mértékben, hogy ez minden esetben kompenzálni tudná a növények bórkezeléstől függetlenül is meglevő természetes bórtartalmának statisztikus ingadozását.

Számos mérést végeztünk a kukorica- és bablevelek színi és fonáki oldala bórkoncentrációjának meghatározására [173]. Feltételezhető ugyanis, hogy a fonáki oldalon, ahol a sztómak száma több, s a vízpárolgás fokozottabb, a bór koncentrációja is magasabb. A 11. táblázat adatai szerint azonban — amelyek 3 különböző bablevél színi és fonáki oldalának bórkoncentrációját mutatják — a két oldal bórkoncentrációja között nincs szignifikáns különbség. Ugyanez látható a 16. ábrán is, amely a 17. ábrán látható, 1000 ppm tápoldatban kezelt babnövény felső levele auto-

11. TÁBLÁZAT

Bórkoncentráció bablevelek fonáki és színi oldalán. Az 1. és 2. minta esetében a tápoldat bórkoncentrációja 100–100 ppm, s 3. minta esetében 1000 ppm volt.
A kezelési idő mindhárom mintánál 24–24 óra volt

Minta száma	Oldal	Bórkoncentráció 10^{20} atom \cdot cm $^{-3}$			fonáki és színi oldal aránya
		\bar{x}	s_x	$s\bar{x}$	
1	fonáki	0,578	0,043	0,030	$1,034 \pm 0,101$
	színi	0,559	0,035	0,025	
2	fonáki	0,538	0,116	0,067	$1,159 \pm 0,259$
	színi	0,464	0,028	0,016	
3	fonáki	1,136	0,120	0,069	$1,076 \pm 0,176$
	színi	1,056	0,132	0,076	

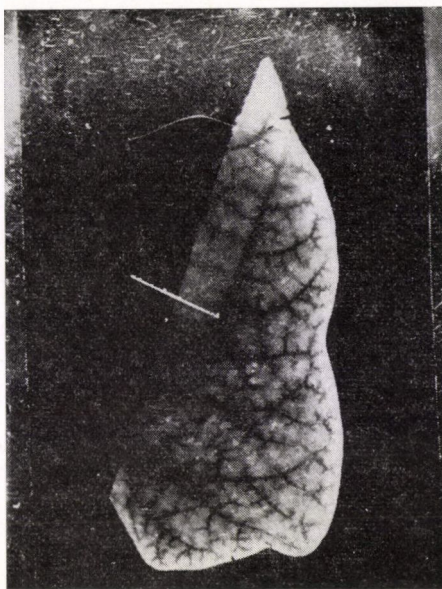


16. ábra. Bóreloszlás a színi ($\Delta \Delta \Delta$) és a fonáki ($\circ \circ \circ$) oldalon, 16 órás expozíció alapján mérve
 N detektált α -nyomok száma $4500 \mu\text{m}^2$ felületen,
 x távolság (mm)

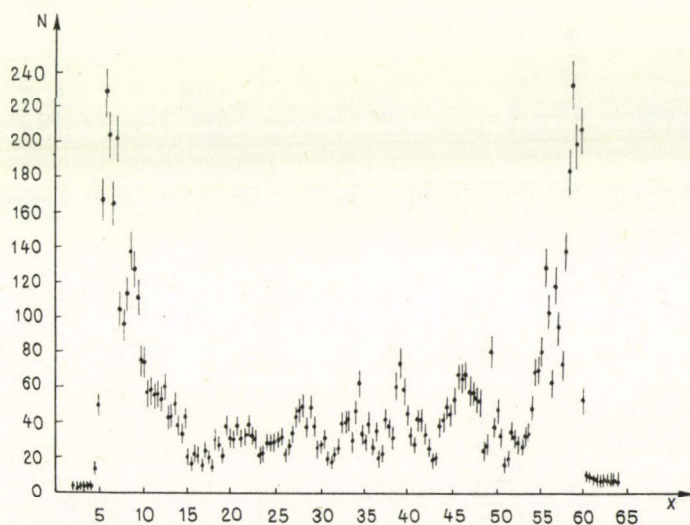
radiogramjának fehér vonallal bejelölt része bóreloszlását mutatja a színi és a fonáki oldalon. Hasonló adatokat kaptunk a kukoricalevelek színi és fonáki oldalának bórkoncentráció vizsgálata során is [164].

A 18. és 19. ábra a 17. ábrán látható bablevél bóreloszlását mutatja a levél hosszában és széltében. Látható, hogy a bór főleg a levél csúcsában és a széleken halmozódik fel, s ez alátámasztja *Michael* és *Kouhsiahi-Tork* [174] véleményét, mely szerint a dohánynövényeken végzett vizsgálatok alapján a bór transzportjában a transzspirációnak van döntő szerepe, s bőséges bórellátás esetén a bór a levélcsúcsokban halmozódik fel, valamint *Florov* és *Berzina* [175, 176] autoradiográfiás vizsgálati adatait, melyek szerint a legnagyobb bórkoncentráció a levelek szélén mérhető.

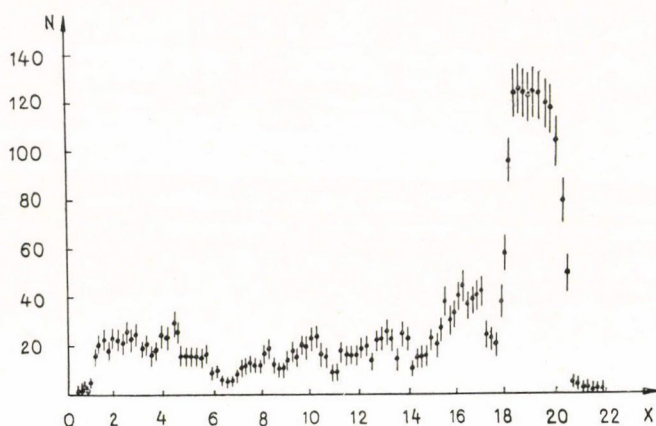
Hasonló adatokat nyertünk a kukoricalevelek vizsgálatánál is, a mérések szerint a levél csúcsában a bór szignifikánsan magasabb koncentrációban fordult elő, mint



17. ábra. Autoradiográfiás felvétel bablevélről.
A fehér mező magasabb, a sötét alacsonyabb bórkoncentrációt jelez



18. ábra. Bóreloszlás a bablevél hosszában, 3 órás expozíció alapján mérve
 N detektált α -nyomok száma $10\,000\,\mu\text{m}^2$ felületen,
 x távolság (mm)



19. ábra. Bóreloszlás a bablevél szélétében,
3 óras expozíció alapján mérve
N detektált α -nyomok száma $5000 \mu\text{m}^2$ felületen, x távolság (mm)

a levél szárhoz közelebb eső részein. Megemlítjük, hogy a bórkoncentrációnak a 16., 18. és 19. ábrán látható helyi szélsőértékei azzal magyarázhatók, hogy a levél felületén számos ér fut, s az erezet bórkoncentrációja lényegesen alacsonyabb. Így pl. a 17. ábrán látható bablevél színi felületének átlagos bórkoncentrációja $3,14 \cdot 10^{16}$ atom $\cdot \text{cm}^{-2}$, az erezeté $0,70 \cdot 10^{16}$ atom $\cdot \text{cm}^{-2}$, míg a széleken $16,9 \cdot 10^{16}$ atom $\cdot \text{cm}^{-2}$ bórtartalom mérhető. Ez arra utal, hogy a növényi érfal vastagsága meghaladja az 1,471 MeV energiájú α -részecskék hatótávolságát, s ezáltal az erezetben levő bór ily módon nem mérhető. (A légszáraz levél ereinek átmérője 30–200 μm volt.)

A 12. táblázat a vizsgált növényi eredetű élelmiszerminták eredeti, natív állapotú anyagra vonatkoztatott bórtartalmát mutatja (177). A kereskedelmi forgalomból beszerzett mintákat vékony szeletekre vágtuk, majd megszárazítottuk, s a méréseket ezen 5–15 cm^2 felületű, légszáraz mintákkal végeztük. Az adatok természetesen csupán tájékoztató jellegűek, hisz ezen növényekből csak egy-egy mintát mértünk,

s így a megadott szórásadatok nem különböző minták átlagértékeinek szórását, hanem egy-egy minta mérési eredményeinek szórását, azaz a mérési eljárás reprodukálhatóságát mutatják. A vizsgálatok során felületi záróréteges Si-detektorral történő méréstechnikát alkalmaztunk, s minden mintát 3-szor mértünk. Minden mérésre fennállt az alábbi összefüggés:

$$i_b > i_h + 3 \sqrt{i_h},$$

ahol:

i_b átlagos impulzusszám a bórspektrumban ($E \sim 1,3$ – $1,4$ MeV),

i_h átlagos háttér impulzusszám ($E \sim 1,5$ – $1,6$ MeV).

12. TÁBLÁZAT

Növényi eredetű élelmiszerminták
bórtartalma eredeti,
natív állapotú anyagra vonatkoztatva

Minta	Bórkoncentráció (ppm)
alma	52 ± 5
alma héj nélkül	24 ± 4
körte	104 ± 16
körte héj nélkül	83 ± 9
zöldpaprika	36 ± 2
paradicsom	78 ± 17
sárgarépa	215 ± 14
káposzta	7 ± 5
burgonya	374 ± 73

A 12. táblázat adatai alapján megállapítható, hogy a különböző növényi eredetű élelmi anyagok börtartalma jelentősen különbözhet egymástól. Az alma- és a körte-minták vizsgálata azt tükrözi, hogy a belső szövetek bórkoncentrációja kisebb, mint a héjé.

Figyelembe véve, hogy az állati eredetű élelmi anyagok bórkoncentrációja — annak következtében, hogy a bór toxikus — elég alacsony, általában 1 mg/kg -nál kisebb érték [147], valamint, hogy az ivóvíz megengedhető maximális bórkoncentrációját $\sim 0,5 \text{ mg/liter}$ értékben javasolják megszabni [167, 178, 179], megállapítható, hogy a bór nagy része növényi eredetű élelmiszereinkből kerül a szervezetbe. Jelentős mennyiségű bört tartalmazhatnak az ásványvizek is, ezek börtartalma $1\text{—}46 \text{ mg/liter}$ [180].

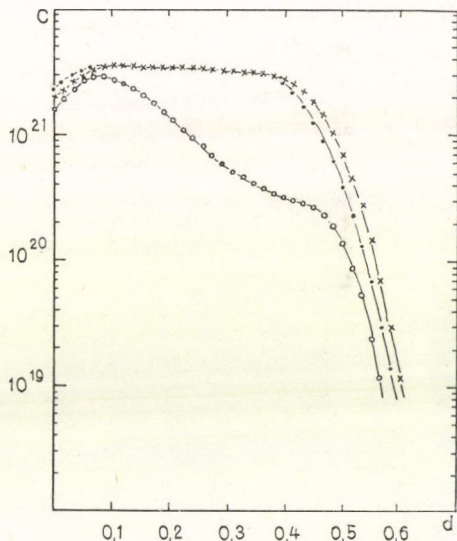
A növényi anyagok esetleges bőrfeldúsulásának vizsgálata növénytermesztési és táplálkozás-egészségügyi szempontból is fontos. Bár a szélsőségesen magas bór-mennyiség méretcsökkenést, s a növények pusztulását eredményezi [181, 182], de mivel a növények börtoleranciája többszörösen meghaladja az emberét s az állatokét, a növények számára még elviselhető bórkoncentráció súlyos, klinikai tünetekben is megnyilvánuló megbetegedést (bór-enteritisz) okoz emberben és állatban egyaránt [166, 171].

A 9. és a 12. táblázat adatai alapján levonható az a következtetés, hogy az emberi szervezet által az élelmiszerekkel és italokkal naponta felvett bór mennyisége (főleg ha növényi eredetű élelmi anyag kerül első-sorban fogyasztásra) meghaladja az emberi szervezet átlagos teljes börtartalmát — ez kb. 20 mg -ra becsülhető [183] — s ez egyezik a [183] irodalom adataival, viszont némileg ellentmond Schormüller [147] közlésének, mely szerint a napi átlagos bőrfelvétel $10\text{—}20 \text{ mg}$.

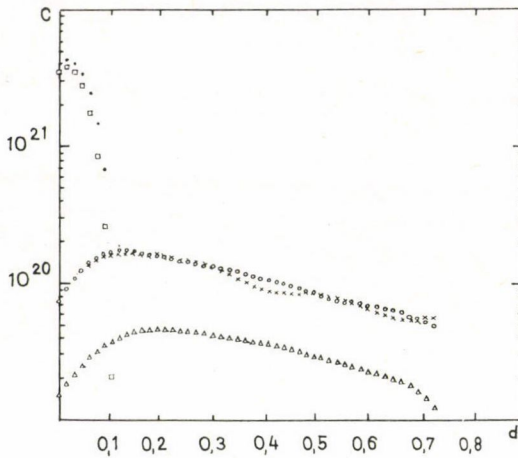
5. Egyéb vizsgálatok és számítások

Az eddig említett bőrvizsgálatokon kívül számos egyéb olyan bormérést is végeztünk, amely különböző műszaki, technológiai és medicinális jellegű problémák megoldására, ill. ezek vizsgálatára irányult [70, 162]. Így pl. a 20. és 21. ábra diffúziós technikával előállított, különböző Si-minták bórprofileloszlását, a 22. ábra pedig alumíniumra vákuumpárolással felvitt bórréteg koncentrációeloszlását mutatja.

Ismeretes, hogy az utóbbi években fokozott érdeklődés nyilvánult meg az ún. tükrös neutronvezetők iránt, amelyek alkalmazásával a termikus neutronok viszonylag kis fluxuscsökkenéssel kihozhatók a reaktorok biológiai védelmén kívül [184]. Ezek a tükrös neutronvezetők úgy készülnek, hogy üvegfelületre különböző eljárás-



20. ábra. Különböző Si-szeletekre diffúziós technikával felvitt bór mélységbeli eloszlása
c bórkoncentráció ($\text{atom} \cdot \text{cm}^{-3}$),
d behatolási mélység (μm)



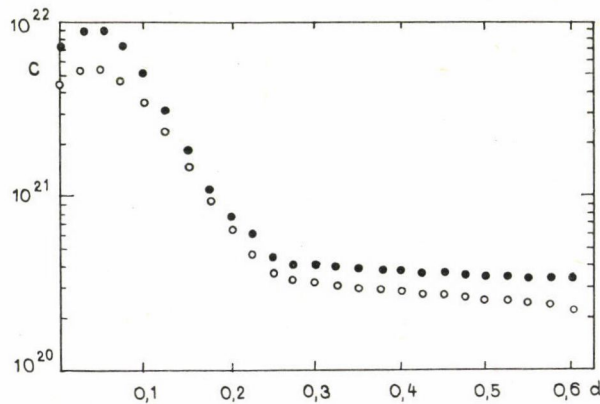
21. ábra. A diffúziós eljárás különböző fázisaiban mérhető koncentrációprofil

$\times \times \times$
 $\square \square \square$ } fényes felület $\bullet \bullet \bullet$
 $\triangle \triangle \triangle$ } $\circ \circ \circ$ } matt oldal

kek ismerete α -részecskékre vonatkozóan a $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ reakcióban keletkező α -részecskék energiavesztésének meghatározásán alapuló bór-eloszlás-vizsgálat során is.

Az \bar{R}_p érték általános alakban a ΔE_α mért energiavesztés ismeretében az

$$\bar{R}_p = \int_{E_0}^{E_0 - \Delta E_\alpha} \frac{1}{dE/dx} dE$$



22. ábra. Bór-eloszlás alumíniumban
 c bórkoncentráció (atom $\cdot\text{cm}^{-3}$), d behatolási mélység (μm)
 $\bullet \bullet \bullet$ bórprofil a vákuumpárolás után,
 $\circ \circ \circ$ bórprofil 400 °C-on történő 2 órás hőkezelés után

sokkal vékony, adott mechanikai és magfizikai (kis neutronbefogási hatáskeresztmetszet, nagy neutronszórás hatáskeresztmetszet) tulajdonságú réteget visznek fel. Ez a réteg lehet pl. BeO, s börtartalmú üveg felületére felvitt BeO réteg vastagságának vizsgálatára pl. jól alkalmazható a $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ magreakción alapuló mérési módszer [185]. Az α -részecskék energiavesztése ugyanis arányos a BeO réteg vastagságával. A 23. ábra egy bórüveg felületére vákuumpárolással felvitt BeO réteg vastagságának változását szemlélteti.

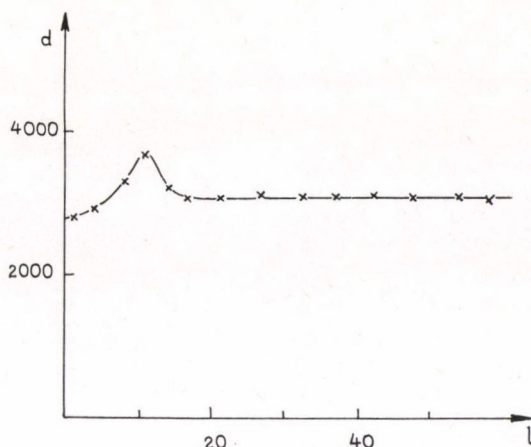
Mint ismeretes, nukleáris mérések során gyakran szükség van töltött részecskék fajlagos energiavesztésének (dE/dx), átlagos hatótávolságának (\bar{R}_p) meghatározására különböző kémiai összetételű anyagokban.

Így pl. szükséges a dE/dx és \bar{R}_p érté-

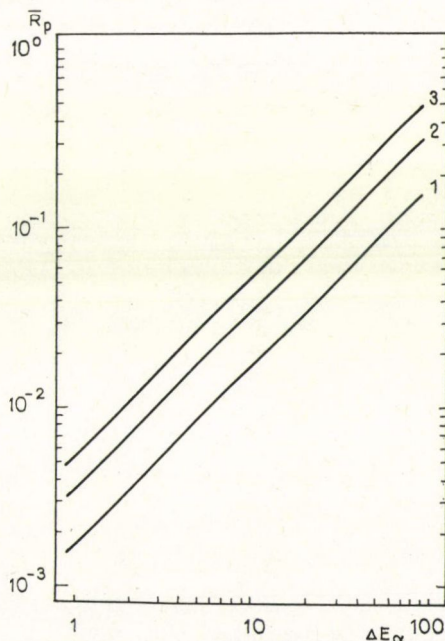
képlet alapján számítható [29, 186, 187]. Ziegler és Chu [100] adatai alapján számos általunk vizsgált anyagra kiszámítottuk az \bar{R}_p értékeket az 1,471 MeV energiájú α -részecskék energiavesztesége függvényében [188]. A 24. ábra $\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{P}_{14}\text{B}$ összetételű fémüvegre, szilíciumra s $\text{H}_{51}\text{C}_{23}\text{O}_{26}$ összetételű biológiai anyagra mutatja az \bar{R}_p és ΔE_α közötti összefüggést.

Megemlítendő, hogy a töltött részecskék lefékeződésére jellemző dE/dx értékek függenek a részecske energiájától, s így az \bar{R}_p értékek nem lineárisan arányosak az energiával. Ezt jól illusztrálja a 13. táblázat, amely protonokra vonatkozóan mutatja a dE/dx és \bar{R}_p értékek változását szilíciumban, a proton energia függvényében [189].

A dE/dx értékek meghatározására szolgáló empirikus képletekhez hasonlóan az irodalomban számos empirikus formula ismeretes az \bar{R}_p értékek meghatározására is a töltött részecskék kezdeti energiája függvényében. Így pl. jól ismert a Geiger-képlet ($R=0,309 \cdot E^{3/2}$), amely alapján az α -részecskék hatótávolsága számítható levegőben. Egyes szerzők [189] a töltött részecskék hatótávolságának meghatározására $R=a_0 + a_1 E^1 + a_2 E^2 + \dots a_n E^n$ alakú, mások [190, 191] $R=aE^b+c$ alakú formulát javasolnak. Lényegében ide sorolható az ún. LSS elmélet [192–197] is, amely lehetővé teszi, hogy kiszámítsuk az E energiájú, A_1 tömegű és Z_1 töltésű részecske behatolási mélységét A_2 tömegű s Z_2 rendszámú atomokból álló anyagban abban az esetben, ha az ion sebessége kisebb, mint $v=v_0 Z_1^{3/2}$ (v_0 az elektron sebessége a H atomban, értéke $2,2 \cdot 10^8 \text{ cms}^{-1}$). Ezen képletek alkalmazásánál viszont problémát okoz az a tény, hogy az össze-



23. ábra. BeO réteg vastagságának változása a bórüveg hosszában
 d rétegvastagság Å-ben, l bórüveg hossza cm-ben



24. ábra. Az $\bar{R}_p(\mu\text{m})$ s a ΔE_α (keV) közötti összefüggés
1 $\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{P}_{14}\text{B}_6$ 2 Si 3 $\text{H}_{51}\text{C}_{23}\text{O}_{26}$

13. TÁBLÁZAT

dE/dx és \bar{R}_p értékek protonokra vonatkozóan
szilícium mátrixban

E (MeV)	dE/dx (keV/mg·cm ⁻²)	\bar{R}_p (mg·cm ⁻²)
2,0	111,9	11,16
2,1	108,4	12,07
2,2	105,1	13,00
2,3	101,9	13,97
2,4	99,0	14,97
2,5	96,2	15,99
2,6	93,6	17,04
2,7	91,1	18,13
2,8	88,8	19,24
2,9	86,5	20,38
3,0	84,4	21,55

E — az α -részecskék energiája MeV-ben,

Z — a fékező anyag átlagos rendszáma,

a Nemec—Hofmann kézikönyv [29] összetartozó adatai alapján számoltunk. Ebben a könyvben az α -részecskék \bar{R}_p értéke 37 elemre (az első a hidrogén, az utolsó az urán) van megadva a 0,05—500 MeV intervallumban. A fékező anyag minőségét az átlagos rendszámmal jellemeztük, amely — mint ismeretes — pl. egy A_aB_b kémiai összetételű anyag esetében a következőképp számítható:

$$\bar{Z} = \frac{aZ_A + bZ_B}{a + b}.$$

Az összefüggés meghatározására a dubnai számítóközpont CDC—6500 típusú számítógépén, FORTRAN nyelven írt program alapján került sor. Olyan egységes matematikai formulát, amely az $\bar{R}_p = f(E, Z)$ összefüggést a teljes energiaintervallumban (0—500 MeV) jó illeszkedéssel írja le, nem találtunk. Sikertült viszont olyan egyenletekhez jutni, amelyek a 0—10 és 10—500 MeV energiaintervallumban használhatók (198). A bõrmeghatározás szempontjából csak a 0—10 MeV intervallum lényeges, sőt ezen belül is elsősorban az 1,0—1,5 MeV intervallum. Az $\bar{R}_p = f(E, Z)$ függvény általános alakja

$$f(E, Z) = a - b(E + c)^2 + [-d + e(E + f)^2] \log [g - h(E - k)^{Z+2}]$$

formában írható fel, a konstansok értékeit pedig a 14. táblázat mutatja.

Ezen $\bar{R}_p = f(E, Z)$ összefüggések által számítható értékek a $Z=1, 2$ és 3 kivételével nagyon jól egyeznek a kiindulási adatokkal, s használatuknak elsősorban az az előnye, hogy alkalmazásukkal viszonylag egyszerűen és gyorsan megfelelő pontosságú adatok nyerhetők sokkomponensű, összetett anyagokra vonatkozóan is. A 15. táblázatban megadunk egyes \bar{R}_p értékeket az energiaveszteség függvényében, $H_{51}C_{23}O_{26}$ összetételű biológiai anyagra s $Fe_{80}B_{20}$ összetételű fémüvegre, az 1,0—1,5 MeV energiaintervallumnak megfelelő konstansok alapján számolva.

függések vagy csak rendkívül szűk energia-intervallumban használhatók, vagy csak egy-egy adott anyagra jellemzők, vagy pedig a számítás meg lehetõszen bonyolult.

Mivel a [188]-as munkában leírt módszerrel a dE/dx és \bar{R}_p értékek meghatározása összetett kémiai anyag esetében eléggé munkaigényes feladat, olyan matematikai függvényeket kerestünk, amelyek alkalmazása lehetővé teszi az \bar{R}_p értékek közvetlen meghatározását az α -részecskék energiája s a fékező anyag minősége függvényében.

Az α -részecskék $mg\cdot cm^{-2}$ -ben megadott hatótávolságát leíró $R_p = f(E, Z)$ függvény meghatározásánál, ahol

Megemlítjük, hogy az általunk α -részek hatótávolságának meghatározására ajánlott képletek más töltött részecskék behatolási mélységének számítására is alkalmasak, hisz ismeretes olyan formula [29, 190], amely a protonok s a z töltésű s m tömegű részecske \bar{R}_p értékei közötti összefüggést adja. E képlet szerint

$$R_{zm}(E) = \frac{mz_p^2}{m_p z_m^2} R_p \left(\frac{m_p}{m} E \right),$$

ahol:

R_{zm} a z töltésű, m tömegű részecske behatolási mélysége,

m_p — a proton tömege,

z_p — a proton töltése,

R_p — a proton behatolási mélysége.

Végezetül megemlítjük, hogy sugárbiológiai és neutronterápiás jellegű kutatási céllal is végeztünk számos, prompt γ -méréssel történt bórmeghatározást [139, 162, 199]. Mint már a bevezetőben említettük, az utóbbi években számos kísérletre s klinikai kezelésre került sor a bőr neutronbefogásos terápiás alkalmazásával kapcsolatban [200—206]. Ennek az a lényege, hogy a nagy neutronbefogási keresztmetszettel rendelkező ^{10}B izotópból a termikus neutronok hatására végbemennő magreakció következtében rövid hatósugarú s igen erősen ionizáló hatású ^4He és ^7Li részecskék keletkeznek. Így megfelelő módszerekkel bőrt juttatva a daganatba s azt neutronokkal besugározva, a nagy ionizáló képességű α - és ^7Li részecskék a roncsoló hatást csak a daganatban fogják kifejteni. Ily módon pl. a neutronbefogásos terápia jól alkalmazható agydaganatok kezelésére. *Hatanaka* és *Sweet* közlése [206] szerint pl. Japánban 1968 óta alkalmazzák a neutronbefogásos terápiát, s a bőrt $\text{Na}_2\text{B}_{12}\text{H}_{11}\text{SH}$ formában juttatják a daganatba. Agydaganatok kezelésénél — az agy természetes bórkoncentrációja $<0,3 \mu\text{g/g}$ — pl. a pacienek agyának daganatos szöveteiben 22—43 $\mu\text{g/g}$ ^{10}B koncentrációt hoztak

14. TÁBLÁZAT

Az $\bar{R}_p = f(E, Z) = a - b(E+c)^2 + [-d + e(E+f)^2] \log [g - h(E-k)^{z+2}]$ általános alakú függvény konstansai a 0—10 és 1,0—1,5 MeV energiaintervallumra vonatkozóan

Konstans	0—10 MeV	1,0—1,5 MeV
a	0,799 139	0,209 980
b	3,670 40	2,728 22
c	0,620 403	0,461 416
d	0,643 405	0,321 356
e	0,681 696	0,554 689
f	1,161 37	0,989 644
g	152,462	281,224
h	1,073 94	0,241 655
k	11,444 2	33,736 7

15. TÁBLÁZAT

\bar{R}_p értékek az 1,471 MeV energiájú α -részecskék energiavesztése függvényében

Energia-vesztés (keV)	\bar{R}_p érték (mg/cm ²)	
	$\text{H}_{51}\text{C}_{23}\text{O}_{26}$	$\text{Fe}_{80}\text{B}_{20}$
1	0,000 46	0,001 13
2	0,000 92	0,002 27
3	0,001 38	0,003 40
4	0,001 84	0,004 53
5	0,002 30	0,005 66
6	0,002 76	0,006 79
7	0,003 22	0,007 93
8	0,003 68	0,009 06
9	0,004 14	0,010 19
10	0,004 60	0,011 32
20	0,009 17	0,022 61
30	0,013 71	0,033 88
40	0,018 22	0,045 12
50	0,022 71	0,056 34
60	0,027 18	0,067 53
70	0,031 61	0,078 70
80	0,036 02	0,089 85
90	0,040 41	0,100 97
100	0,044 77	0,112 07
150	0,066 22	0,167 25
200	0,087 10	0,221 91
250	0,107 45	0,276 11
300	0,127 32	0,329 90

létre. Agydaganatok kezelésére más országokban, pl. a Szovjetunióban is alkalmazzák a neutronbefogásos terápiát [207].

Az IBR—30 reaktoron folyó ilyen jellegű méréseket egy szövetekvivalens anyaggal (l. 16. táblázat) töltött fantomon végeztük részben a különböző energiatartományú neutronok mélydózis-görbéi meghatározására, részben pedig a börtartalom kapott dózistól s alkalmazott bőrkoncentrációtól függő meghatározhatóságának vizsgálata céljából. Hozzáfűzzük, hogy a 16. táblázat a lágy testszövettel ekvivalens anyag összetételét mutatja, s minthogy a szervezet a lágy testszöveteken kívül csontszövetet is tartalmaz, a „standard ember” kémiai összetétele ettől némiképp eltér. A „standard ember” összetétele a következő [208]: hidrogén: 10,0%, szén: 18,0%, nitrogén: 3,0%, oxigén: 65,0%, foszfor: 1,0%, kalcium: 1,5%, kén: 0,3%, egyéb ásványi anyag: 1,2%. A fantomon a méréseket egyébként — eltérően a növényi eredetű minták prompt γ mérésétől — az aktív zónától kb. 10 m távolságra végeztük, 30 cm³-es Ge(Li) detektort alkalmazva.

16. TÁBLÁZAT

A mérésekhez használt szövetekvivalens anyag összetétele

Elemi összetétel	(%)	Vegyület összetétel	(%)
H	9,8	víz	56,9
O	71,1	glicerín	28,4
C	15,6	szacharóz	7,1
N	3,5	karbamid	7,6

ÖSSZEGEZÉS

Az eddig elmondottakat röviden összegezve a következő főbb megállapítások tehetők:

1. Kidolgozásra s alkalmazásra került 3 roncsolásmentes, prompt aktivációs bór meghatározási eljárás. A bór mérés a $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ reakción alapul, az első módszer az α -részecskék detektálása felületi záróréteges Si(Au) detektossal, a második az α -részecskék regisztrálása autoradiográfiás úton, a harmadik mérési eljárás pedig a ^7Li gerjesztett állapotú mag által kibocsátott prompt γ sugárzás Ge(Li) detektossal történő mérése.

2. A bőrkoncentráció s a bór mélységbeli eloszlása vizsgálata szempontjából mérésre kerültek ionimplantációs és diffúziós technikával előállított szilícium lapkák, különböző kémiai összetételű üvegfém minták, valamint növényi eredetű minták. A mérési eredmények kiértékelése BESZM—4 és BESZM—6 típusú számítógépekkel történt, a tényleges felületi bőrkoncentráció-eloszlás meghatározására — a mérőrendszer energiafelbontását figyelembe véve — spektrumdekonzolációs módszert alkalmaztunk.

3. A $^{10}\text{B}^+$ ionokkal implantált Si minták börtartalmának vizsgálata alapján megállapítást nyert, hogy a mintákban a ténylegesen mérhető bórdózis nem független az implantálási energiától, s 80 keV-nél kisebb implantálási energiánál a tényleges bórdózis lényegesen kisebb az implantálás során elektromos módszerrel mért dózishoz képest.

4. Bab- és kukoricalevelek börtartalmának vizsgálata során azt tapasztaltuk, hogy a tápoldat bőrkoncentrációjának s a kezelési idő növelésével a növények által felvett bór mennyisége nagyságrendileg is meghaladhatja a fiziológiailag szükséges mennyiséget. A felvett bór nem homogénen oszlik el a leveleszintek között s a levelek felületén, a legnagyobb bőrkoncentrációkat a levelek szélén s a csúcán mértük. Mindez egyrészt arra utal, hogy a bór a növényben a transzspirációs árammal mozog, másrészt azt bizonyítja, hogy a különböző korú növényi részek közötti transzlókáció a bórra nézve minimális.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Végezetül kedves kötelezettségemnek teszek eleget, amikor megköszönöm Gyulai Józsefnek, Zanati Tibornak, V. Titovnak és Krakkai Istvánnak a minták elkészítésében, Bogács Jánosnak, V. Nazarovnak, I. Szásinnak és J. Kviteknek a mérések elvégzésében, Seres Zoltánnak, Mezei Istvánnak és Görgei Eszternek az eredmények matematikai feldolgozásában, valamint Nagy Árpádnak, Deme Sándornak, Bakos Lászlónak, Csöke Antalnak, Schiller Róbertnek és Cser Lászlónak az eredmények diszkutálásában nyújtott segítségét.

IRODALOM

1. J. T. Harcher, L. T. Wilcox: Colorimetric determination of boron in leaf tissue using carmin. *Anal. Chem.*, **22**, 567—569, 1950.
2. H. B. Desai, S. R. Desai, M. N. Nadkarni, R. N. Naik, M. S. Pendharkar, M. Sankar Das: Chemical methods for the determination of boron in reactor materials. I—II. Atomic Energy Establishment Trombay, Bombay, India, 1961.
3. M. Taddia, M. T. Cippolis: Determination of boron in silicon for semiconductors. *Ann. Chim (Ital.)*, **63** (1—2), 141—143, 1973.
4. L. C. Chandola, I. J. Machado: Spectrographic determination of trace impurities in reactor grade aluminium. *Indian J. Technol.*, **13** (10), 471—473, 1975.
5. Н. К. Подберезская, В. А. Сушкова, Т. И. Бродская: Экстракционно-фотометрическое определение бора во фторсодержащих продуктах. В сб. Исслед. в обл. хим. и физ. методов анализа минерального сырья. Вып. 4, Алма-Ата, 76—79, 1975.
6. T. E. Neuner, E. E. Pickett, C. W. Gehrke: Spectrophotometric determination of boron in boronated fertilizers. *J. Assoc. Offic. Anal. Chem.*, **58** (5), 920—922, 1975.
7. И. А. Блум, Ю. А. Золотов: Определение микроэлементов в геологических объектах. *Ж. Анал. Хим.*, **31** (1), 159—169, 1976.
8. W. P. Kilroy, C. T. Moynihan: Atomic absorption analysis of borosilicate glass. *Anal. Chim. Acta*, **83**, 389—392, 1976.
9. F. D. Pierce, H. R. Brown: Microgram determination of boron in surface waters by atomic emission spectrometry. *Anal. Chem.*, **48** (4), 670—673, 1976.
10. F. Thevenot, J. Cuelleron: Analytical problems in boron and refractory borides. *Analysis*, **5** (3), 105—121, 1977.
11. Т. Ф. Боровик, Е. А. Белова: Спектральное определение бора и некоторых других микроэлементов в почвах и горных породах. *Ж. Анал. Хим.*, **32** (3), 539—541, 1977.
12. Г. И. Михайлов, Л. П. Старчик: Применение реакции (p, γ) для определения содержания элементов с $Z \leq 17$. В сб. Активационный анализ, Изд. ФАН, Ташкент, 76—79, 1971.
13. C. Olivier, T. B. Pierce: The determination of boron in steels by measurement of the alpha-particles emitted during charged-particle irradiation. *Radiochem. Radioanal. Lett.*, **17** (5—6), 335—342, 1974.
14. G. Demortier: Prompt analysis of biological samples by proton bombardment. *Radiochem. Radioanal. Lett.*, **20** (3), 197—205, 1975.
15. R. Delmas, J. N. Barrandon, J. L. Debrun: Analyse de traces dans divers minéraux, par activation avec des protons de 10 MeV et spectrométrie γ directe. Comparaison avec l'analyse par activation au moyen de neutrons thermiques. *Analysis*, **4** (8), 339—346, 1976.
16. J. P. F. Sellschop, M. J. Renan, R. J. Keddy, D. W. Mingay, D. M. Bibby: Sub-ppm determination of boron, identification of the acceptor centre in natural semi-conducting diamond. *Int. J. Appl. Rad. Isot.*, **28** (3), 277—279, 1977.
17. I. S. Giles, C. Olivier, M. Peisach: Recent developments in the analytical application of prompt spectrometry. *J. Radioanal. Chem.*, **37** (1), 141—154, 1977.
18. C. Olivier, M. Peisach: Prompt proton spectrometry from high Q-value (d, p) reactions and its use for determining ^{10}B . *J. Radioanal. Chem.*, **11** (1), 105—122, 1972.
19. C. Olivier, J. W. McMillen, T. B. Pierce: An investigation into the use of the nuclear microprobe for examining distributions of boron isotopes. *J. Radioanal. Chem.*, **31** (2), 515—523, 1976.
20. T. B. Pierce: Experience with the use of the nuclear microprobe for determining light element distributions. *J. Radioanal. Chem.*, **37** (1), 285—295, 1977.
21. B. Borderie, J. N. Barrandon, J. L. Debrun: 3,5 MeV triton activation for elements with $Z < 34$. *J. Radioanal. Chem.*, **37** (1), 297—306, 1977.

22. Е. М. Лобанов, В. И. Звягин, Б. П. Зверев, Д. И. Блинков: Использование реакций легких ядер с нейтронами для определения легких элементов в кремнии и других материалах. В сб. Труды I Всесоюзного координационного совещания по активационному анализу. Изд. Наука, Ташкент, 5—20, 1964.
23. T. L. Isenhour, G. H. Morrison: Determination of boron by thermal neutron activation analysis using a modulation technique. *Anal. Chem.*, 38 (2), 167—169, 1966.
24. B. A. Loveridge, McInnes C. A. J.: The microanalytical estimation of boron in steel using the $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ reaction. *Microsc. Cryst. Front.*, 16, 105—114, 1967.
25. Б. П. Зверев, Ю. Ф. Симахин, М. М. Усманова: Определение бора в твердых материалах методом регистрации α -частиц из реакции $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$. *Атомная энергия*, 33(2), 697, 1972.
26. Б. П. Зверев, Ю. Ф. Симахин, М. М. Усманова: Ионизационная камера для спектрометрии α -частиц из реакции $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$: В сб. Активационный анализ в народном хозяйстве. Изд. ФАН, Ташкент, 28—31, 1974.
27. Б. П. Зверев, Ю. Ф. Симахин, Н. Жумаев, М. М. Усманова: Изучение диффузионного распределения бора в тонких эпитаксиальных пленках кремния ядерно-физическим методом. В сб. Структура и свойства облученных материалов. Изд. ФАН, 79—83, Ташкент, 1975.
28. Б. П. Зверев, О. Г. Муртазин, Л. Е. Красивина, М. Арипов, Н. Жумаев, М. М. Усманова, В. П. Ларченко: Нейтронно-активационное изучение распределения бора и висмута в полупроводниках и сплавах с помощью твердотельных трековых детекторов. В сб. Тезисы IV Всесоюзного совещания по активационному анализу. Инс. Физ. АН ГССР, Тбилиси, 215, 1977.
29. О. Ф. Немец, Ю. В. Гофман: Справочник по ядерной физике. Изд. Наукова Думка, Киев, 1975.
30. А. Чеке, А. Надь, Э. Сабо: Возможности использования импульсных реакторов для целей нейтронно-активационного анализа. KFKI Report 70—25, NAC, 1970.
31. Bogács J., Csöke A., Nagy Á., Simonits A., Szabó E., Deme S., Jazvickij Ju. Sz., Nazarov V. M.: Az IBR—2 impulzusreaktor aktivációs analitikai alkalmazásának lehetőségei. *Izotóptechnika*, 16 (11), 493—511, 1971.
32. В. Д. Ананьев, Д. И. Блохинцев, П. В. Букаев, Ю. М. Булкин, Ю. П. Вахрушин, В. В. Виноградов, Н. А. Доллежал, Г. М. Жемчужников, И. Д. Зубкова, В. С. Кузнецов, Б. И. Куприн, Е. Г. Комар, В. С. Лобанов, И. М. Матора, А. Навроцки, В. М. Назаров, А. К. Попов, В. П. Смирнов, В. С. Смирнов, И. М. Франк, А. И. Хонерский, Н. А. Хрястов, Е. П. Шабалин, Ф. Л. Шапиро, О. Я. Шах, Ю. С. Язвickий: Импульсный реактор с инжектором ИБР—2. Сообщение ОИЯИ, 13—4392, Дубна, 1969.
33. В. Д. Ананьев, Д. И. Блохинцев, Б. Н. Бунин, Е. Д. Воробьев, Н. А. Доллежал, В. И. Луциков, Ю. М. Останевич, В. С. Смирнов, И. М. Франк, Н. А. Хрястов, Е. П. Шабалин, Э. И. Шарапов, Ю. С. Язвickий: ИБР—2 импульсный реактор периодического действия для нейтронных измерений. *Приб. Тех. Экспер.*, 17—35, 1977 (5).
34. В. Д. Ананьев, В. А. Архипов, А. И. Бабаев, Д. И. Блохинцев, Ю. М. Булкин, Б. Н. Бунин, Е. Д. Воробьев, Н. А. Доллежал, Л. В. Едунов, В. С. Лазрухин, В. Л. Ломидзе, В. В. Мелихов, Ю. И. Митяев, Ю. Н. Пепельшев, В. П. Пластинин, А. Д. Рогов, В. С. Смирнов, И. М. Франк, Н. А. Хрястов, Е. П. Шабалин, Ю. С. Язвickий: Физический пуск импульсного исследовательского реактора ИБР—2. *Атомная энергия*, 46 (6), 393—400, 1979.
35. A. Zaoui, G. Bede, I. Gács: Borkonzentrationsmessung im 1. Kreislauf von Druckwasserreaktoren. *Kernenergie*, 18 (2), 47—49, 1975.
36. A. S. M. Jesus, G. W. J. Berg: Determination of low-boron concentrations in various matrices with a neutron source. *Radiochem. Radioanal. Lett.*, 36 (2—3), 183—192, 1978.
37. H. L. Giles, G. M. Holmes: The determination of boron in ferrous and non-ferrous alloys by neutron transmission. *J. Radioanal. Chem.*, 48 (1—2), 65—72, 1979.
38. T. Mutsuo, O. Akiva: Method for determination of the ^6Li , ^{10}B and ^{113}Cd content in water solutions by use of neutron generator with 14 MeV energy. *Radioisotopes*, 25 (5), 255—259, 1976.
39. Bacsó J.: Felületi záróréteges detektorok készítésénél szerzett tapasztalatok az ATOMKI-ban. *ATOMKI Közl.*, 12 (1—2), 5—10, 1970.
40. В. Ф. Кушнирук, Р. А. Никитина, Ю. П. Харитонов: Поверхностно-барьерные детекторы из кремния р-типа. Препринт ОИЯИ, Р13—6578, 1972.
41. И. Вильгельм, Л. И. Гумнерова, Й. Крацкова, Ли Чен Сон, Б. П. Осипенко, Н. М. Прахов: Поверхностно-барьерные детекторы с большой площадью. Препринт ОИЯИ, Р13—6515, Дубна, 1972.

42. В. Ф. Кушнирук, А. В. Рыхлюк, Ю. П. Харитонов: О спектрометрии α -частиц с помощью поверхностно-барьерных детекторов при пониженных температурах. Препринт ОИЯИ, РЗ—7633, 1973.
43. Silicon Surface-Barrier Detectors. Apr. 1973, ORTEC, Technical Data.
44. В. Ф. Кушнирук, Р. А. Никитина, Ю. П. Харитонов: Некоторые особенности поверхностно-барьерных детекторов из высокоомного дырочного кремния. Препринт ОИЯИ, РЗ—8919, 1975.
45. В. Ф. Кушнирук, Ю. П. Харитонов: Исследование поверхностно-барьерных детекторов на пучке ионов ксенона. Препринт ОИЯИ, РЗ—9836, 1976.
46. R. P. Larsen, R. F. Selman: An alpha counting chamber for use with surface barrier detectors. Radiochem. Radioanal. Lett., 30 (4), 247—252, 1977.
47. J. E. Noakes, J. L. Duggan: A high resolution 4π alpha spectrometer with silicon surface barrier detectors. J. Radioanal. Chem., 43 (2), 399—409, 1978.
48. Ц. Былов, Б. П. Осипенко, В. М. Чумин: Прецизионная спектрометрия излучений радиоактивных нуклидов с помощью полупроводниковых детекторов. Физ. элем. част. атомн. ядра. 9 (6), 1350—1459, Москва, Атомиздат, 1978.
49. М. Г. Горнов, Ю. Б. Гуров, М. А. Мороховец, К. Н. Неймарк, Б. П. Осипенко: Поверхностно-барьерные детекторы из кремния, легированного фосфором в потоке тепловых нейтронов. Сообщение ОИЯИ, 13—12567, 1979.
50. В. Б. Злоказов, Л. Ф. Неведьева: Математическое обеспечение осциллографа со световым карандашом. Сообщение ОИЯИ, 10—5966, Дубна, 1971.
51. Ц. Былов, Л. А. Былова, И. Н. Егшин, А. Ф. Новгородов, С. Орманджиев, Б. П. Осипенко, Я. Юрковски, М. И. Фоминых, В. С. Александров, В. М. Горожанкин, А. И. Иванов, Ш. Оманов: Спектрометрия излучений радиоактивных нуклидов с помощью полупроводниковых детекторов. Эффекты, искажающие форму аппаратного спектра. Препринт ОИЯИ, Р6—9072, Дубна, 1975.
52. Ц. Былов, Б. П. Осипенко, В. М. Чумин: Прецизионная спектрометрия излучений радиоактивных нуклидов с помощью полупроводниковых детекторов. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 9 (6), 1350—1459, Москва, 1978.
53. R. Bracewell: The Fourier transform and its applications. McGraw-Hill, New York, 1965.
54. J. B. Davis, H. H. Herd: Measuring optical transfer functions of lenses with the aid of a digital computer. Lens testing with computer, 93—103, Jan., 1969.
55. Zámori Z.: Mérési eredmények gépi kiértékelése. KFKI Report, 32, 1969.
56. T. Inouye, T. Harper, N. C. Rasmussen: Application of Fourier transforms to the analysis of spectral data. Nucl. Inst. Meth., 67 (1), 125—132, 1969.
57. T. Inouye: Spectral resolution improvement by non-damping filter. Nucl. Inst. Meth., 104 (3), 541—544, 1972.
58. J. F. Ziegler, G. W. Cole, J. E. E. Baglin: Technique for determining concentration profiles of boron impurities in substrates. J. App. Phys., 43 (9), 3809—3815, 1972.
59. K. J. Blinowska, E. F. Wessner: A method of on-line spectra evaluation by means of a small computer employing Fourier transform. Nucl. Inst. Meth., 118 (2), 597—604, 1974.
60. S. Valero: Applications de la transformation de Fourier au lissage, à l'extraction du fond et à la deconvolution des spectres en physique nucléaire. CEA—N—1723, Commissariat à l'Énergie Atomique France, 1974.
61. J. Kvítek, V. Hnatowitz, P. Kotas: Determination of boron concentration profiles in silicon from $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ reaction product spectra. Radiochem. Radioanal. Lett., 24 (3), 205—213, 1976.
62. T. J. Kennet, W. V. Prestwick, A. Robertson: Bayesian deconvolution I. Convergent properties. Nucl. Inst. Meth., 151, 285—292, 1978.
63. T. J. Kennet, W. V. Prestwick, A. Robertson: Bayesian deconvolution II. Noise properties. Nucl. Inst. Meth., 151, 293—301, 1978.
64. T. J. Kennet, P. M. Brewster, W. V. Prestwick, A. Robertson: Bayesian deconvolution III. Applications and algorithm implementation. Nucl. Inst. Meth., 153, 125—135, 1978.
65. Z. Kosina: A fast deconvolution method for small computers. Radiochem. Radioanal. Lett., 32 (3—4), 191—196, 1978.
66. E. Sjontoft: A straightforward deconvolution method for use in small computers. Nucl. Inst. Meth., 163, 519—522, 1979.
67. J. W. Cooley, J. W. Tukey: An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. Math. Comp., 19, 297—301, 1965.
68. C. Lanczos: Applied Analysis, New York, 1961.

69. Я. Богач, А. З. Надь, А. Сабо, З. Шереш: Некоторые вопросы обработки α -спектров на ЭВМ. Сообщение ОИЯИ, РП—11212, Дубна, 1978.
70. J. Bogács, J. Gyulai, Á. Nagy, A. Szabó, T. Zanati: Die Anwendung der Kernreaktion $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ zur Lösung verschiedener technischer und wissenschaftlicher Aufgaben. Radiochem. Radioanal. Lett., 32 (1—2), 71—82, 1978.
71. H. Baumbach, K. Freyer, D. Bautzman, H. Koch: Quantitative microscale determination of boron spatial distributions with the aid of neutron-induced autoradiography. Nucleonika, 21 (2), 199—208, 1976.
72. H. Baumbach, K. Freyer, W. Birkholz: Neutroneninduzierte Autoradiographie örtlicher Bor- und Stickstoffverteilungen mit einer 1 mg Californium-252-Quelle. ATOMKI Közl., 18, 155—167, 1976.
73. K. Freyer: Bestimmung lateraler örtlicher Verteilungen von Bor und Stickstoff mit Hilfe der neutroneninduzierten Autoradiographie. Zf-Mitteilungen, Nr. 9., 126—139, Zentralinstitut für Isotopen- und Strahlenforschung, Leipzig, 1977.
74. А. А. Гусаков, Г. Г. Рябова, Э. П. Грузина: Исследование распределения бора и углерода в стали методами активационной авторadiографии. IV Всесоюзное совещание по активационному анализу, Тбилиси, 133—134, 1977.
75. И. Б. Берман, А. Н. Столяров: Определение содержания бора методом (n, α) -радиографии. IV Всесоюзное совещание по активационному анализу. Тбилиси, 254—255, 1977.
76. H. Reuther: Analyse von Bor und Lithium in Festkörpern mit Hilfe von Zelluloseazetat-Detektoren. Isotopenpraxis, 14 (7), 222—224, 1978.
77. D. Mapper, D. J. Bolus: The use of solid-state nuclear track detection for the study of boron and fissile nuclide distributions in steel samples. J. Radioanal. Chem., 48 (1—2), 229—241, 1979.
78. В. Д. Ананьев, И. М. Матора, Г. Н. Погодаев, В. Т. Руденко, Е. П. Шабалин, Ф. Л. Шапиро, И. М. Франк: Импульсный реактор ЛНФ ОИЯИ и перспективы применения импульсных реакторов в нейтронной спектроскопии. Сообщение ОИЯИ, 2372, Дубна, 1965.
79. В. В. Голиков, Ж. А. Козлов, Л. К. Кулькин, Л. Б. Пикельнер, В. Т. Руденко, Э. И. Шаранов: Параметры нейтронных пучков ИБР—30. Сообщение ОИЯИ, 3—5736, Дубна, 1971.
80. Б. Н. Бунин, В. М. Левин, С. К. Николаев, В. Т. Руденко, А. Н. Семенов, В. Л. Смирнов, А. С. Торопов, В. К. Хохлов: Пуск реактора ИБР—30 в режиме импульсного бустера. Сообщение ОИЯИ, 13—6213, Дубна, 1972.
81. В. М. Назаров, Ю. М. Останевич: Применение импульсных реакторов периодического действия в исследованиях по физике конденсированных сред и для прикладных задач. III Совещание по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народно-хозяйственных задач. Р18—12147, 47—66, Дубна, 1979.
82. R. C. Greenwood, J. H. Reed: Prompt gamma rays from radiative capture of thermal neutrons. IITRI, 1193—53, IIT, Research Institute, 1965.
83. D. Comar, C. Crouzel, M. Chasteland, R. Riviere, C. Kellershohn: The use of neutron capture gamma radiations for the analysis of biological samples. Biomed. Appl., 114—127, 1969.
84. K. Kitao: A method for calculating the absorbed dose near interface from $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ reaction. Rad. Res., 61, 304—315, 1975.
85. M. R. Najam, M. A. U. Islam, A. F. M. Ishaq, J. A. Mirza, A. M. Khan, I. H. Qureshi: In-beam neutron activation analysis of stainless steel and iron ore. J. Radioanal. Chem., 27(1), 115—124, 1975.
86. E. S. Gladney, E. T. Jurney, D. B. Curtis: Nondestructive determination of boron and cadmium in environmental materials by thermal neutron-prompt γ -ray spectrometry. Anal. Chem., 48 (14), 2139—2142, 1976.
87. B. Buchanan, R. Dolan, S. Roosild: High energy (1—2,5 MeV) ion implanatation for obtaining novel semiconductor junction structures. Int. Conf. on Applications of Ion Beams to Semiconductor Technology, Grenoble, 24—26 May, 1967, 649—668.
88. N. G. Blamires, M. D. Matthews, R. S. Nelson: Improved profiles of electrical activity in boron implanted silicon. Phys. Lett., 28A(3), 178—179, 1968.
89. D. E. Davies: Range and distribution of implanted boron in silicon. Appl. Phys. Lett., 13(7), 243—245, 1968.
90. J. M. Fairfield, B. L. Crowder: Ion implantation doping of silicon for shallow junctions. Transactions of the Metallurgical Society of AIME, 245, 469—473, 1969.
91. T. E. Seidel: Distribution of boron in ion-implanted silicon. II. Int. Conf. Ion Implantation in Semiconductors., 24—28 May, 1971, Garmisch-Partenkirchen, Bavaria, Germany, Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 47—57, 1971.

92. J. F. Ziegler, B. L. Crowder, G. W. Cole, J. E. E. Baglin, B. J. Masters: Boron atom distribution in ion-implanted silicon. *Appl. Phys. Lett.*, 21 (1), 16—17, 1972.
93. J. F. Gibbons: Ion implantation in semiconductors. I. Range distribution theory and experiments. *Proc. IEEE*, 56 (3), 295—319, 1968.
94. В. В. Тутов: К вопросу о конструировании заданных профилей распределения примеси методом ионной имплантации. *Журн. Тех. физ.*, 48 (11), 2407—2411, 1978.
95. J. Gyulai: Application of ion implantation. *Int. Conf. on Ion Implantation in Semiconductors*. Lublin (Poland) 9—12, Sept., 1974, *Inst. Nucl. Res., Swierk*, Vol. 1—2, 563—579, 1974.
96. Gyulai J.: Ionimplantációs kutatások. *Fizikai Szemle*, 26 (11), 423—427, 1976.
97. Pásztor E., Kirdlyhidi L., Riedl P., Horváth B., Szalók M.: A KFKI 150 keV-es implantáló berendezése. KFKI—76—27, Budapest, 1976.
98. L. C. Northcliffe, R. F. Schilling: Range and stopping-power tables for heavy ions. *Nuclear Data Tables A* 7, 233—463, 1970.
99. T. W. Armstrong, K. C. Chandler: Calculation of stopping power and ranges for muons, charged pions, protons and heavy ions. ORNL, CCC-228, 1973.
100. J. F. Ziegler, W. K. Chu: Stopping cross sections and back-scattering factor for ^4He ions in matter $Z=1-92$, $E_\alpha=400-4000$ KeV. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, Vol. 13 (5), 1974, 463—489, Acad. Press, N. Y.
101. F. H. Eisen, G. J. Clark, J. Bottiger, J. M. Poate: Stopping power of energetic helium ions transmitted through thin silicon crystals in channeling and random directions. *Rad. Eff.*, 13, 93—100, 1972.
102. Я. Боганч, Ш. Деме, Й. Дюлаи, А. Надь, В. М. Назаров, А. Чеке, Ю. С. Язвickий: Использование реакции $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ для определения средней глубины проникновения ионов бора, имплантированных в кремний. *Int. Conf. Ion Implant. Semiconduct.*, 9—12 Sept., 1974, Lublin, Poland.
103. Надь А., Я. Боганч, Ш. Деме, Й. Дюлаи, В. М. Назаров: Использование реакции $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ для определения пробега ионов бора. *Internationale Tagung: Nukleare Analysen-verfahren*, 12—16 Mai, 1975, Dresden, DDR.
104. J. Bogáncs, J. Gyulai, A. Nagy, V. Nazarov, Z. Seres, A. Szabó, J. S. Jazvitsky: Determination of boron range distributions in ion-implanted silicon by the $^{10}\text{B}(n, \alpha)$ reaction. *Int. Conf.: Modern trends in activations analysis*, 13—17 Sept., 1976, München, Germany.
105. Я. Боганч, А. Сабо: Применение реакции $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ для решения научно-технических задач. IV Всесоюзное совещание по активационному анализу. 1—3 июня, 1977, Тбилиси, СССР.
106. A. Szabó: Die Bestimmung des Gehaltes und der Verteilung von Bor in Silizium mit Hilfe der Reaktion $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$. *Int. Conf. Atom. Spectrosc.*, Prague, 30. 8. —7. 9. 1977, Czechoslovakia.
107. Я. Боганч, Ш. Деме, Й. Дюлаи, А. Надь, В. М. Назаров, А. Чеке, Ю. С. Язвickий: Исследование реакции $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ для определения пробега ионов бора, имплантированных в кремний. Препринт ОИЯИ, Р14—8295, Дубна, 1974.
108. Я. Боганч, Й. Дюлаи, А. Надь, В. М. Назаров, З. Шереш, Ю. С. Язвickий: Использование реакции $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ для определения распределения атомов бора в кремнии. *Isotopenpraxis*, II(12) 429—432, 1975.
109. Я. Боганч, Й. Дюлаи, А. Надь, В. М. Назаров, З. Шереш, А. Сабо: Использование реакции $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ для определения распределения атомов бора в кремнии. Препринт ОИЯИ, Р3—10777, Дубна, 1977.
110. Я. Боганч, Й. Дюлаи, А. Надь, В. М. Назаров, З. Шереш, А. Сабо: Использование реакции $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ для определения распределения бора, имплантированного в кремний. Приб. тех. эксп., 58—63, 1979 (1).
111. Nagy Á., Bogáncs J., Csöke A., Deme S., Gyulai J., Jazvickij J. Sz., Laskova E., Nazarov V. M., Szalók M., Seres Z.: $^{10}\text{B}(n, \alpha)$ magreakció alkalmazása szilíciumba implantált bór ionok hatótávolságának és koncentrációeloszlásának meghatározására. *Izotóptechnika*, 20, 53—71, 1977.
112. П. В. Павлов, В. А. Усков, Е. И. Зорин, Д. И. Темельбаум, А. С. Барацкова: Исследование диффузии бора в кремнии из слоя, легированного методом ионной бомбардировки. *Физика твердого тела*, 8 (9), 2782—2784, 1966.
113. T. E. Seidel, A. U. MacRae: Some properties of ion implanted boron in silicon. *Transact. Metall. Soc. AIME*, 245, 491—498, 1969.
114. R. B. Fair, P. N. Pappas: Diffusion of ion-implanted B in high concentration P and As doped silicon, *J. Electrochem. Soc.*, 122 (9), 1241—1244, 1975.

115. R. B. Fair: Boron diffusion in silicon, concentration and orientation dependence, background effects and profile estimation. *J. Electrochem. Soc.*, 122 (6), 800—805, 1975.
116. S. P. Murarkas: Diffusion and segregation of ion-implanted boron in silicon in dry oxygen ambients. *Phys. Rev. Solid State*, 12 (6), 2502—2519, 1975.
117. W. von Muench, C. Gessert: Low surface concentration of boron in silicon by diffusion through silicon dioxide. *J. Electrochem. Soc.*, 122 (12), 1685—1689, 1975.
118. G. Masetti, S. Somi, G. Soncini: Temperature dependence of boron diffusion in (111), (110), (100) silicon. *Solid State Electr.*, 19 (6), 545—546, 1976.
119. Suto Takashi, Nishi Hidetoshi, Furuya Tsuneo: Redistributions of implanted boron and phosphorous sources during thermal diffusion. *Fujitsu Sci. Techn. J.*, 12 (1), 115—124, 1976.
120. G. T. Marcyk, B. G. Streetman: Boron impurity profile tailoring in silicon by ion implantation and measurement by glow discharge optical spectrometry. *J. Electrochem. Soc.*, 123 (9), 1388—1391, 1976.
121. A. Szabó, J. Bogács: Correlation between the energy of implantation and quantity of boron at the determination of boron in silicon. *Radiochem. Radioanal. Lett.*, 31 (6), 383—396, 1977.
122. А. Сабо, Я. Богач, Ш. Деме, И. Мезеи, А. Надь: Исследования зависимости дозы от энергии имплантации. *Isotopenpraxis*, 15 (2—3), 41—43, 1979.
123. Й. Квитек: Анализ бора и лития в материалах с помощью реакции (n, α). II Совещание по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-тех. и народно-хозяйственных задач, 1—4 декабря, Дубна, СССР, 1976.
124. У. А. Арифов, Т. Д. Раджабов: Сорбционные процессы при взаимодействии заряженных частиц с поверхностями твердых тел. Изд. ФАН, Ташкент, 1974.
125. H. J. Güntherodt: Metallic glasses. *Festkörperprobleme*, XVII. Braunschweig, 25—53, 1977.
126. P. Duwez: Structure and properties of glassy metals. *Annual Rev. Materials Sci.*, 6, 83—117, 1976.
127. T. Masumoto, H. Kimura, A. Inoue, Y. Waseda: Structural stability of amorphous metals. *Mater. Sci. Eng.*, 23 (2—3), 141—144, 1976.
128. L. A. Davis, R. Ray., C. P. Chou, R. C. O'Handley: Mechanical and thermal properties of $\text{Fe}_{50}\text{B}_{50}$ glass. *Scr. met.*, 10 (6), 541—546, 1976.
129. Geszti T.: Ismerkedjünk a fémüvegekkel. *Fizikai Szemle*, 27 (4), 121—126, 1977.
130. T. Masumoto, T. Sendai: Recent developments in fundamental and practical fields of amorphous metallic materials. 5th Int. Symp., High purity materials in Science and Technology, Dresden, GDR, May 5—9, 1980.
131. J. Logan, M. Yung: The low-temperature electrical resistivity of amorphous iron-phosphorus alloys. *J. Non-Cryst. Sol.*, 21, 151—154, 1976.
132. R. Hasegawa, W. A. Hines, L. E. Kabacoff, P. Duwez: Nuclear magnetic resonance study of ^{31}P and ^{195}Pt in the metallic glass system $(\text{Ni}_x\text{Pt}_{1-x})_{75}\text{P}_{25}$. *Solid State Com.*, 20, 1035—1038, 1976.
133. W. M. Swift, K. A. Foster: Losses and temperature-dependent magnetic properties of an amorphous magnetic alloy. *Mater. Sci. Eng.*, 23 (2—3), 267—270, 1976.
134. J. L. Walter, F. Bacon, F. E. Luborsky: An Auger analysis of the embrittlement of the amorphous alloy $\text{Ni}_{40}\text{Fe}_{40}\text{P}_{14}\text{B}_6$. *Mater. Sci. Eng.*, 24 (2), 239—245, 1976.
135. B. Vasvári: Electron-transport in amorphous metals. KFKI—1978—44. Central Research Institute for Physics, Budapest.
136. J. Tóth: Kinetics of crystallization of Fe—B glass with electrical resistance measurements. *Mat. Res. Bull.*, 13 (7), 691—696, 1978.
137. J. Logan: The radial distribution function of amorphous iron-phosphorus alloys. *Phys. Stat. Sol.*, 32 (2), 361—368, 1975.
138. J. J. Gilman: Mechanical behavior of metallic glasses. *J. Appl. Phys.*, 46 (4), 1625—1633, 1975.
139. Я. Богач, Й. Дюлаи, А. Надь, В. М. Назаров, А. Сабо, З. Шереш: Использование пучков тепловых нейтронов для изучения распределения атомов бора в материалах. Препринт ОИЯИ, РЗ—11816, Дубна, 1978.
140. Á. Z. Nagy, B. Vasvári, P. Duwez, L. Bakos, Z. Seres, J. Bogács, V. M. Nazarov: Variation of boron concentration in metallic glass ribbons. KFKI—1979—91, Central Research Institute for Physics, Budapest.
141. A. S. Szabó, J. Bogács, V. M. Nazarov, I. L. Sashin: Application of pulsing reactor for investigation of boron distribution in solid materials. 5th Int. Symp. High purity materials in Science and Technology, Dresden, GDR, May 5—9, 1980.
142. Б. П. Никольский (гл. ред.): Справочник химика. I. Изд. Химия, Ленинградское отделение, 1971.

143. Kuthy S.: Cukorrépa permetező trágyázása NPK+B műtrágyaoldattal. A mezőgazdasági kutatások 1963. évi főbb eredményei, Budapest, 53—55, 1964.
144. Tölgyesi Gy.: A növények mikroelem tartalma és ennek mezőgazdasági vonatkozásai. Mezőgazd. Kiadó, Budapest, 1969.
145. K. Mengel: Ernährung und Stoffwechsel der Pflanze. VEB, Gustav Fisher Verlag, Jena, DDR, 1972.
146. J. E. Bowen: Of using enough, but not too much boron. Crops Soils Mag., 12—14, 1977 (Aug.—Sept.).
147. J. Schormüller (Red.): Handbuch der Lebensmittelchemie. Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1965.
148. Tölgyesi Gy., Kozma A.: A pázsitfűvek bórfelvételét befolyásoló tényezők. Agrokémia és Talajtan, 23, 88—98, 1974.
149. Kozma A., Tölgyesi Gy.: A pázsitfűvek börtartalmának alakulása és a bórfelvételüket befolyásoló tényezők szerepe eltérő termőhelyi adottságú területeken. Bot. Közl., 61, 63—70, 1974.
150. Kozma A., Tölgyesi Gy.: Duna ártéri területek növényeinek vizsgálata mezőgazdasági hasznosíthatóságuk, valamint makro- és mikroelem-tartalmuk szempontjából. Magy. Állatorv. Lapja, 34 (3), 158—163, 1979.
151. Précésnyi I., Opauszky I.: Homokpusztai növények mikro- és ultramikroelem koncentrációja. Bot. Közl., 66 (1), 29—32, 1979.
152. D. Comar, C. Crouzel, M. Chasteland, R. Riviere, C. Kellershohn: The use of neutron capture gamma radiations for the analysis of biological samples. Biomed. Appl., 114—127, 1969.
153. P. D. LaFleur: Biological matrix standard reference materials for trace element determinations. J. Radioanal. Chem., 19 (2), 227—232, 1974.
154. H. J. M. Bowen: Problems in the elementary analysis of standard biological materials. J. Radioanal. Chem., 19 (2), 215—226, 1974.
155. П. И. Ансюк: Микроудобрения, Колос, Ленинград, 1978.
156. М. Я. Школьник: Микроэлементы в жизни растений. Изд. Наука, Ленинград, 1974.
157. А. А. Куст: Биологическая роль химических элементов. Изд. ФАН, Ташкент, 1973.
158. M. K. John, H. H. Chuach, C. J. Van Laerhoven: Boron response and toxicity as affected by soil properties and rates of boron. Soil Sci., 124 (1), 34—39, 1977.
159. A. S. Pollard, A. J. Parr, B. C. Loughman: Boron in relation to membrane function in higher plants. J. Experim. Bot., 28 (105), 831—841, 1977.
160. D. R. Leece: Effects of boron on the physiological activity of zinc in maize. Austr. J. Agric. Res., 29, 739—747, 1978.
161. D. E. Whiting, P. C. Crandall, C. G. Woodbridge: Boron uptake by bartlett pear trees as influenced by soil retention a leaching. J. Amer. Soc. Hort. Sci., 103 (5), 641—645, 1978.
162. Я. Боганч, Й. Дюлаи, А. Надь, В. М. Назаров, А. Сабо, З. Шереш: Использование пучков тепловых нейтронов для изучения распределения атомов бора в материалах. III Совещание по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народно-хозяйственных задач. PI8—12147, 131—146, Дубна, 1979.
163. J. Bogáncs, A. Szabó, Á. Z. Nagy, A. Csőke, J. Pecznik, I. Krakkai: Nondestructive nuclear method for boron analysis in plant samples. Radiochem. Radioanal. Lett., 39 (6), 393—403, 1979.
164. Bogáncs J., Szabó A., Nagy Á., Csőke A., Pecznik J., Krakkai I.: Roncsolásmentes felület-elemző módszer növényi minták börtartalmának vizsgálatára. Növénytermelés, 28 (4), 317—322, 1979.
165. W. Larcher: Ökologie der Pflanzen. Verlag Eugen Ulmer, Stuttgart, 1976.
166. В. В. Ковалский: Геохимическая экология. Изд. Наука, Москва, 1974.
167. Г. В. Вербицкая: Экспериментальные и натурные исследования по гигиенической оценке питьевой воды, содержащей бор. Гиг. Сан., 7, 49—53, 1975.
168. P. J. Temple, S. N. Linzon: Boron as a phytotoxic air pollutant. J. Air Pollut. Contr. Assoc. 26 (5), 489—499, 1976.
169. C. O. Plank, D. C. Martens: Boron availability as influenced by application of fly ash to soil. Soil Sci. Awer Proced., 38, 974—977, 1974.
170. E. M. Romney, A. Wallace, G. V. Alexander: Boron in relationship to a coal burning power plant. Commun. Soil Sci. Plant Anal., 8 (9), 803—807, 1977.
171. Kozma A., Tölgyesi Gy.: Urbanizációs tényezők okozta bórfeldúsulás vizsgálata Budapest—Kelenföld—Sas-hegyi területeken vadontermő pázsitfű és pillangósvirágú növényfajokban. Bot. Közl., 65 (1), 29—38, 1978.
172. Cseh E.: Viz- és iontranszport. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

173. И. Краккау, В. М. Назаров, А. Ш. Сабо, И. Л. Сашии: Исследования распределения концентрации бора в растительных объектах. Препринт ОИЯИ, Дубна, ОИЯИ, 1980.
174. G. Michael, K. Kouhsiahi-Tork: Durch hohe Luftfeuchtigkeit induzierter Bormangel. Z. Pflanzenernähr., Düng. Bodenkunde, 122, 1, 1969.
175. Г. Н. Флеров, И. Г. Берзина, А. В. Друщиз, С. В. Малинко, Г. К. Морарь: О возможностях метода (n, α)-радиографии при изучении пространственного распределения бора в растениях. Докл. АН СССР, 241 (3), 733—736, 1978.
176. Г. Н. Флеров, И. Г. Берзина: Радиографии минералов, черных пород и руд. Атомиздат, Москва, 1979.
177. A. S. Szabó: Bestimmung des Borgehaltes in pflanzlichen Lebensmitteln. Lebensmittel-industrie, 26 (12), 549—550, 1979.
178. G. N. Krasovskii, S. P. Varshavskaya, A. I. Borisov: Toxic and gonadotropic effects of cadmium and boron relative to standards for these substances in drinking water. Environ. Health Perspect., 13 (2), 69—75, 1976.
179. Г. Н. Красовский, С. П. Варшавская, А. И. Борисов, Л. Я. Васюкович, М. И. Бобылева: К вопросу о допустимости кадмия, бора и нитритов в питьевой воде. В сб. Материалы 2-го объедин. съезда гигиенистов, эпидемиологов, микробиологов и инфекционистов Казахстана, 130—131, 1975, Алма-Ата.
180. Б. П. Зверев, Ю. Ф. Симахин, М. У. Умаров, М. М. Усманова, Н. Жумаев: Определение бора в природных водах нейтронно-активационным методом. Ж. Анал. Хим., 31 (12), 2323—2326, 1976.
181. K. Braunlich: Versuchsergebnisse zum Problem der Borüberdüngung. Z. Pflanzenern. Düng. Bodenkunde, 83, 1—7, 1958.
182. W. Bergmann, L. Büchel, W. Wrazidlo: Bor- und Stickstoff-Überschuss-Symptome bei Gewächshausgurken sowie Borschäden bei einigen anderen Pflanzen. Archiv für Gartenbau, 13, 65—67, 1965.
183. Человек. Медико-биологические данные. Москва, Медицина, 1977.
184. B. Farnoux, B. Hennion, J. Fagot: Description et caracteristiques neutroniques du tube conducteur de neutrons installe près du réacteur EL-3. SM—104/30, 353—380.
185. Е. Лашкова, И. Г. Шелкова: Изготовление покрытий из окиси бериллия на стеклянных поверхностях большой площади. Сообщение ОИЯИ, 12—9972, Дубна, 1976.
186. Г. Н. Пометюнко, Э. Т. Шипатов: Ионизационные потери энергии и пробеги альфа-частиц в ионных кристаллах. Атомная энергия, 40 (4), 343—345, 1976.
187. Г. Н. Пометюнко: К вопросу об определении удельных потерь энергии заряженных частиц в веществе. Атомная энергия, 41 (2), 134—135, 1976.
188. Я. Боганч, А. Надь, А. Сабо: Определение пробегов α -частиц в многокомпонентных веществах. Сообщение ОИЯИ, P11—11800, Дубна, 1978.
189. Г. Н. Пометюнко: Нахождение удельных потерь энергии заряженных частиц в веществе методом прострела поглотителей произвольной толщины. Атомная энергия, 43 (2), 118—120, 1977.
190. В. А. Муминов, С. Мухамедов, Р. А. Хайдаров: Полуэмпирическая формула для определения пробегов заряженных частиц. В сб. Активационный анализ в народном хозяйстве. Изд. ФАН, Ташкент, 3—6, 1974.
191. С. В. Стародубцев, А. М. Романов: Прохождение заряженных частиц через вещество. Ташкент, Изд. АН УзССР, 1962.
192. J. Lindhard, M. Scharff: Energy dissipation by ions in the keV region. Phys. Rev., 124 (1), 128—130, 1961.
193. J. Lindhard, M. Scharff, H. E. Schiott: Range concepts and heavy ion ranges. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selskab., 33 (14), 1—42, 1963.
194. J. Lindhard, A. Winther: Stopping power of electron gas and equipartition rule. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 34 (4), 1—22, 1964.
195. J. Lindhard: Influence of crystal lattice on motion of energetic charged particles. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selskab., 34 (14), 1—64, 1965.
196. J. Lindhard, V. Nielsen, M. Scharff: Approximation method in classical scattering by screened Coulomb fields. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 36 (10), 1—32, 1968.
197. В. С. Кессельман: Аналитические соотношения для расчета глубины проникновения ионов в вещество. Атомная энергия, 24(6), 557—563, 1968.
198. Э. Гергеи, А. Ш. Сабо: Уравнения для описания пробегов α -частиц в зависимости от энергии и среднего порядкового номера вещества. Kernenergie, 23 (7), 266—269, 1980.

199. Szabó A., Fedorenko B. Sz., Smakova Ny. L.: Neutronok alkalmazása sugárterápiás célokra. *Magy. Onk.*, 23, 36—44, 1979.
200. A. H. Soloway: Boron compounds in cancer therapy. *Progress in boron chemistry*. Pergamon Press, New York, 1, 203, 1964.
201. W. Entzian, A. H. Soloway, R. Raju, W. H. Sweet, G. L. Brownell: Effect of neutron capture irradiation upon malignant brain tumors in mice. *Acta Radiol.*, 5, 95, 1966.
202. G. L. Brownell, W. H. Sweet: Studies on neutron capture therapy. *Progress in nuclear energy*, Ser. VII. Vol. 2. Pergamon Press, New York, 1968.
203. A. K. Asbury, R. G. Ojemann, S. L. Nielsen, W. H. Sweet: Neuropathologic study of fourteen cases of malignant brain tumors treated by neutron capture therapy using boron-10. *J. Neuro-pathol. Exp. Neurol.*, 31, 278, 1972.
204. H. Hatanaka, K. Sano: A revised boron-neutron capture therapy for malignant brain tumors. Experience on terminally ill patients after cobalt-60 radiotherapy. *Z. Neurol.*, 204, 309, 1973.
205. H. Hatanaka, W. H. Sweet: Slow neutron capture therapy for malignant tumors. *Biomedical Dosimetry. Proc. Symp. IAEA, Vienna*, 147—178, 1975.
206. B. W. Murray, O. L. Deutsch, R. G. Zamenhof, R. I. Pettigrew, R. A. Rydin, G. L. Brownell: New approaches to the dosimetry of boron neutron capture therapy at MIT—MGH. *Biomedical Dosimetry. Proc. Symp. IAEA*, 179—203, 1975.
207. Л. Д. Лунденбра́тен, Ф. М. Лясс: Медицинская радиология. Москва, Медицина, 1979.
208. Makra Zs.: Neutron-dozimetria. *Magy. Fiz. Foly.*, 13 (1), 1—18, 1965.

A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

HULLÁMMEZŐK KVANTUMELMÉLETE II.

W. HEISENBERG és W. PAULI*

A hullámmezők kvantumelméletében megvizsgáljuk a teljes term-rendszer szétbomlását nem kombinálódó részrendszerekbe. Emellett a Hamilton-féle függvény invarianciatulajdonságaiból levezetjük a mozgásegyenletek integráljait. Továbbá megkapjuk a mértékinvariancia figyelembevételével pöttagok nélkül az elektrodinamika kielégítő megfogalmazását. Majd a hullámelmélet és a részecskeelmélet közötti matematikai összefüggést tárgyaljuk.

Bevezetés. A hullámmezők kvantumelméletét az eddigi relativisztikus megfogalmazásában¹ még súlyos ellenvetések érhetik. Különösen az elektronoknak önmagukkal való kölcsönhatására látszik egyelőre bizonyos esetekben lehetetlennek az elmélet alkalmazása. Mégis szeretnénk hinni, hogy a kvantumelmélet további előrehaladása a hullámelmélet kiépítését nem nélkülözheti.

A kvantumelméleti pontmechanikában lényeges előrelépés történt a Hamilton-féle függvény invarianciatulajdonságainak vizsgálatával.² Ezekből az invarianciasajátságokból vezethető le a term-rendszerek beosztása nem kombinálódó részcsoportokba, úgyszintén a Hamilton-féle függvény ilyen invarianciasajátságaival függnek össze a mozgásegyenletek egyszerű integráljai. Egészen hasonló módon kell felhasználnunk a hullámegyenletek invarianciasajátságait a következő megfontolásokban.

1. §. Az általános módszer és impulzustételek. A módszer alap gondolata általában a következő: ha a \bar{H} Hamilton-féle függvény bizonyos műveletekkel szemben invariáns, akkor ez azt jelenti, hogy bizonyos, minden számunkra fontos esetben lineáris operátor \bar{H} -t változtatlanul hagyja, azaz \bar{H} -val felcserélhető. Ha ezt az operátort kvantummechanikai változóként fogjuk fel,³ akkor ennek következtében ez a változó időben állandó, tehát megkaptuk az egyenleteknek egy integrálját. Ha az előbb megnevezett invariancia érvényben marad a rendszer bármely megváltoztatásánál, vagy perturbációjánál, akkor a változók értékeinek megváltozása teljesen lehetetlen, tehát az operátor minden egyes számértéke a többi term-mel nem kombinálódó term-ek rendszerét képezi.

* Megjelent Zeitschrift für Physik 59, 168, 1929/30.

¹ W. Heisenberg és W. Pauli ZS. f. Phys. 56, 1, 1929. Ezt a dolgozatot a következőkben I-ként idézzük.

² Hasonlítsuk össze H. Weyl, Csoportelmélet és kvantummechanika című összefoglaló leírásával. Lipcse, Hirzel, 1928.

³ Vö. P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) 123, 714, 1929.

Egyszerű példának vegyük a Hamilton-függvény invarianciáját az egész hullámmező térbeli translációjánál. A jelöléseket a következő képletekben az I cikkből vettük át. Az $x_i \rightarrow x_i + \delta x_i$ translációnak megfelel a Q_α hullámfüggvény (vö. I, 20. old.)

$$Q_\alpha \rightarrow Q_\alpha - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i \quad (1)$$

megváltozása.

A Q_α egy F funkcionáljának megváltozása tehát

$$F \rightarrow F - \int dV \sum_\alpha \frac{\delta F}{\delta Q_\alpha} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i = \left(1 - \delta x_i \int dV \sum_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} \frac{\delta}{\delta Q_\alpha} \right) F. \quad (2)$$

A δx_i -vel történt translációnak tehát megfelel az

$$1 - \delta x_i \int dV \sum_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} \frac{\delta}{\delta Q_\alpha} \quad (3)$$

operátor.

Mivel a \bar{H} Hamilton-féle függvény translációkkal szemben invariáns, azért a (3) operátornak \bar{H} -val felcserélhetőnek kell lennie. A neki megfelelő kvantumelméleti változó tehát időben állandó. Mivel a $\frac{\delta}{\delta Q_\alpha}$ operátornak a $\frac{2\pi i}{h} P_\alpha$ változó felel meg (I, (20) egyenlet), azért (3)-ból megkapjuk a

$$\int dV \sum_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} P_\alpha = \text{const.} \quad (4)$$

impulzustételeket (I, (24) egyenlet).

2. §. A töltés megmaradása. Az elektronokra (ψ_e) és a sugárzásra (Φ_v) vonatkozó speciális Hamilton-féle függvény invariáns a

$$\psi_e \rightarrow \psi_e e^{i\alpha}; \quad \psi_e^* \rightarrow \psi_e^* e^{-i\alpha} \quad (5)$$

transzformációval szemben, ahol α egy állandót jelent, vagy pedig a megfelelő

$$\psi_e \rightarrow \psi_e + i\delta\alpha\psi_e; \quad \psi_e^* \rightarrow \psi_e^* - i\delta\alpha\psi_e^* \quad (6)$$

infinitezimális transzformációval szemben. Mivel a ψ_e^* -ok a ψ_e -khoz tartozó kanonikus impulzusokat jelentik, elegendő csak a ψ_e -kat tekintetbe venni; a ψ_e egy funkcionálja átmegy a

$$F \rightarrow F + i\delta\alpha \int dV \frac{\delta F}{\delta \psi_e} \psi_e \quad (7)$$

funkcionálba, a (6) transzformációhoz tartozó operátor tehát

$$1 + i\delta\alpha \int dV \psi_e \frac{\delta}{\delta \psi_e}. \quad (8)$$

Innen következik

$$\int dV \psi_e \psi_e^* = \text{const.} \quad (9)$$

A (9) bal oldalán a tényezőket felcserélhetjük anélkül, hogy az integrál időbeli állandóságát megzavarnánk. Így megkapjuk a töltés megmaradásának tételét. Ha a Hamilton-féle függvény tartalmazza az elektronok és a protonok anyaghullámát, akkor a töltésmegmaradás tételének alakja

$$\int dV (-\psi_e^{*(e)} \psi_e^{(e)} + \psi_e^{*(p)} \psi_e^{(p)}) = \text{const.} \quad (10)$$

Hogy az egyenlet fennálljon, a Hamilton-függvénynek a következő transzformációval szemben kell invariánsnak lennie:

$$\psi_e^{(e)} \rightarrow \psi_e^{(e)} e^{i\alpha}, \quad \psi_e^{*(e)} \rightarrow \psi_e^{*(e)} e^{-i\alpha} \quad (11)$$

$$\psi_e^{(p)} \rightarrow \psi_e^{(p)} e^{-i\alpha}, \quad \psi_e^{*(p)} \rightarrow \psi_e^{*(p)} e^{i\alpha}.$$

A Hamilton-függvény eddig szokásos alakja két független összeadandót tartalmaz, amelyek külön-külön vagy csak $\psi_e^{(e)}$ -től vagy csak $\psi_e^{(p)}$ -től, függenek. Ez a függvény invariáns (11)-gyel szemben, tehát a töltés megmaradása külön-külön érvényes az elektronokra és a protonokra. (11)-ből látható, hogy a Hamilton-függvénybe esetleg

$$\psi_e^{(e)} \psi_\sigma^{(p)} F_{ik} \tilde{s}_{e\sigma}^{ik} + \psi_e^{*(e)} \psi_\sigma^{*(p)} F_{ik} \tilde{s}_{e\sigma}^{*ik} \quad (12)$$

alakú tagokat vezethetünk be, anélkül, hogy (10)-et megváltoztatnánk (\tilde{s}^{ik} jelenti a Dirac-féle spintenzor komponenseit). Ilyen póttagok lehetővé tesznek „szétsugárzási folyamatokat”, amelyekben egy elektron és egy proton egy fénykvantumra egyesülnek. Szétsugárzási folyamatok tehát a hullámok kvantumelméletében nehézség nélkül bevezethetők, míg közismerten az ilyeneknek a részecskeelméletben nincs helye.

3. §. A $\Phi_v \rightarrow \Phi_v + \frac{\partial \chi}{\partial x_v}$; $\psi_e \rightarrow e^{-\frac{2\pi i}{h} \frac{e}{c} \chi} \psi_e$ transzformáció.

A következő számításokban az egyszerűség kedvéért csak egyféle anyagot (ψ_e) tételezünk fel. Ekkor, amennyiben az ε -os és a δ -s tagokat elhagyjuk (I. 31. old.), a Hamilton-függvény invarianciája fennáll a következő transzformáció esetén⁴:

$$\Phi_v \rightarrow \Phi_v + \frac{\partial \chi}{\partial x_v}, \quad \psi_e \rightarrow e^{-\frac{2\pi i}{h} \frac{e}{c} \chi}; \quad \psi_e^* \rightarrow \psi_e^* e^{\frac{2\pi i}{h} \frac{e}{c} \chi}, \quad (13)$$

ahol χ a tér és idő tetszőleges függvénye (itt χ az összes ψ_e , Φ_α változókkal, és ezenkívül χ és $\frac{\partial \chi}{\partial t}$ értékei különböző térbeli helyeken egymással felcserélhetők kell, hogy legyenek). Mint ismeretes, ezt az invarianciát az ε -os és a δ -s póttagok megzavarják. Ez az elmélet egyik szépséghibája, ami elkerülhetetlennek látszik, ha a Maxwell-féle egyenleteket szokásos módon átvisszük a kvantumelméletbe. Ha azonban a (13)-hoz

⁴ Weyl erre az idézett művében a „mértékinvariancia” kifejezést használja.

tartozó integrálokat vizsgáljuk, akkor lehetőség adódik arra, hogy a póttagokat egészen elkerüljük.⁵

A következő számításokban az ε -os és a δ -s tagok nélküli Lagrange-függvényből indulunk ki; ennek sugárzási része (Heaviside-féle egységek alkalmazásával) egyszerűen

$$\frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} \right)^2.$$

Ebben a Lagrange-függvényben csak a Φ_i ($i=1, 2, 3$)-ket tekintjük változóknak, míg Φ_4 -et egy minden más változóval felcserélhető, önkényesen megadott függvénynek vesszük. Lehet pl. Φ_4 -et egyszerűen nullának választani. Ez megfelel a klasszikus fizika tényállásának, ugyanis (13) szerint a négy komponens egyike teljesen önkényes. Ha Φ_4 rögzített, akkor a (13) invariancia csak időtől független χ függvényekre áll fenn. Legyen tehát χ a három térkoordináta tetszőleges függvénye, amely a végtelenben kielégítő módon eltűnik és keressük a (13)-hoz tartozó integrálokat.

⁵ E. Fermi időközben megjelent egyik munkájában — Rendiconti d. R. Acc. dei Lincei (6) 9, 1, 881, 1929 — a kvantálásnak egy másik érdekes módját adta meg, amelyben a mértékinvarianciát póttagok helyett mellékfeltételek sértik. A jelen munkában elfoglalt álláspontból a Fermi-féle módszer a következőképpen jellemezhető: a Lagrange-függvény sugárzási részé gyanánt az

$$L^{(s)} = \int \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \left(\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} \right)^2 dV$$

integrált vezetjük be úgy, hogy Φ_μ variációjával a megfelelő téregyenletek:

$$-\sum_\nu \frac{\partial^2 \Phi_\mu}{\partial x_\nu^2} = s_\mu.$$

A

$$K = \sum_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\mu}$$

mennyiség számára ezekből az egyenletekből következik $\sum_\mu \frac{\partial s_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ miatt a

$$\sum_\nu \frac{\partial^2 K}{\partial x_\nu^2} = 0$$

összefüggés. Eme téregyenletek és a Maxwell-egyenletek következményei megegyezése érdekében Fermi ismert módon egy $t = \text{const.}$ metszetre a

$$K = 0 \quad \text{és} \quad \dot{K} = 0$$

mellékfeltételeket írta elő, amelyek az idő folyamán a téregyenletek következtében maguktól továbbterjednek. Ezek a mellékfeltételek a kvantumelektrodinamikában nem mint q -számösszefüggések, hanem olyan értelemben érvényesek, ahogy nálunk a később levezetendő (25) egyenlet. Miután Fermi az elektromágneses mező esetére a Fourier-felbontást, az anyagmező esetére a konfigurációs teret használta (vö. e dolgozat 7. §-át), eljutott saját kvantumelektrodinamikai egyenleteihez. A kanonikus f. r.-ek vagy megfelelő operátor-eljárások relativisztikus invarianciájának kérdését Fermi nem nagyon vizsgálta, mégis ez minden további nélkül következik az I. cikkből és a jelen cikk 4. §-ából.

Figyelembe kell vennünk, hogy a Φ_i -ket variálva a Lagrange-függvényben a Maxwell-egyenleteknek csak három térkomponense jelenik meg, míg a

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho \quad (14)$$

egyenletnek nem kell teljesülnie.

(13) helyett vegyük az

$$\Phi_i \rightarrow \Phi_i + \delta \frac{\partial \chi}{\partial x_i}; \quad \psi_e \rightarrow \psi_e - \frac{2\pi i}{4} \frac{e}{c} \delta \chi \cdot \psi_e \quad (15)$$

infinitesimalis transzformációt. Ekkor Φ_i és ψ_e egy F funkcionálja így transzformálódik:

$$\begin{aligned} F &\rightarrow F + \delta \int dV \left(\frac{\delta F}{\delta \Phi_i} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} - \frac{2\pi i}{h} \frac{e}{c} \frac{\delta F}{\delta \psi_e} \psi_e \chi \right) = \\ &= F - \delta \int dV \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\delta F}{\delta \Phi_i} + \frac{2\pi i}{h} \frac{e}{c} \frac{\delta F}{\delta \psi_e} \psi_e \right) \chi. \end{aligned} \quad (16)$$

Az

$$\int dV \chi \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\delta}{\delta \Phi_i} + \frac{2\pi i}{h} \frac{e}{c} \psi_e \frac{\delta}{\delta \psi_e} \right) \quad (17)$$

operátor tehát megfelel a (15) transzformációnak és felcserélhető a Hamilton-függvénnyel.

Tehát

$$\int dV \chi \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_i}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \sum_e \psi_e^* \psi_e \right) \quad (18)$$

állandó. Mivel ez tetszőleges χ térfüggvényre érvényes, következésképpen

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} + e \sum_e \psi_e^* \psi_e = \text{const.} = C. \quad (19)$$

Az itt adott megfogalmazás mellett tehát (14) helyett csupán (19)-re következtethetünk, ahol C egy tetszőleges térfüggvényt jelent. Most azonban vigyázni kell arra, hogy C minden egyes értékrendszere egy sajátos, a többi term-mel nem kombinálódó term-rendszert képvisel és C változásai egyáltalában nem lehetségesek. Ugyanis semmilyen kölcsönhatási tag vagy perturbáció a Hamilton-függvényben nem sérti a (15)-tel szembeni invarianciát. Mindenesetre az I-beli ε - és δ -tag típusú póttagok nem megengedhetők, de az a feltevés igazoltnak látszik, hogy csak olyan mennyiségeknek van fizikai jelentése, amelyek (13)-mal szemben invariánsok. Az ilyen mennyiségeket Weyl nyomán mértékinvariánsnak nevezzük.

A C mennyiség felcserélési szabályait legegyszerűbben a

$$\bar{C} = \int \chi (\operatorname{div} \mathfrak{E} + e \sum_e \psi_e^* \psi_e) dV = \int \chi C dV \quad (20)$$

mennyiség segítségével fogalmazhatjuk meg, ahol χ ismét egy tetszőleges térfüggvény. Az I (47) és (57) egyenlete szerint felírható:

$$[\bar{C}, \psi_e] = -e\chi\psi_e, \quad [\bar{C}, \psi_e^*] = e\chi\psi_e^*, \quad [\bar{C}, \Phi_k] = \frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial \chi}{\partial x_k}. \quad (21)$$

Ez azonban azt jelenti, hogy a (15) transzformáció χ -nek infinitezimális variációjánál éppen

$$f \rightarrow f + \frac{2\pi i}{hc} [\delta \bar{C}, f] \quad (22)$$

szerint történik, ha f a ψ_e , ψ_e^* , Φ_i mennyiségek egyikét jelenti. Emiatt (22) egy tetszőleges f mennyiség (15)-tel szembeni változására is érvényes. Megemlítjük, hogy ezt a (22) összefüggést a (13) véges transzformáció esetében így kell általánosítani:

$$f \rightarrow e^{\frac{2\pi i}{h} C} \cdot f \cdot e^{-\frac{2\pi i}{h} C} \quad (22')$$

Speciálisan mértékinvariáns mennyiségekre — köztük a legfontosabbak

$$F_{\mu\nu}, \psi_e^* \psi_\sigma, \psi_e^* \left(\frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\mu} + e \psi_\sigma \Phi_\mu \right), \left(\frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial \psi_e^*}{\partial x_\mu} - e \Phi_\mu \psi_e^* \right) \psi_\sigma \quad (23)$$

fennáll

$$[\bar{C}, F] = 0,$$

tehát

$$[C, F] = 0, \quad (24)$$

azaz ezek C -vel felcserélhetőek. Ha a rendszer változóit mátrixként állítjuk elő, akkor a mértékinvariáns mennyiségek egyetlen olyan elemet sem tartalmaznak, amelyek C átmeneteinek felelnének meg, de más nem mértékinvariáns mennyiségek ilyen elemeket tartalmaznak. Mivel a közvetlenül mérhető mennyiségek mindig mértékinvariánsak, azért a C állandónak egy numerikus érték adható. Ha speciálisan a

$$C = 0 \quad (25)$$

értéket választjuk, akkor a Maxwell-egyenletek negyedik komponense is fennáll, bár általában nem mint q -számösszefüggés, de minden mértékinvariáns relációban. $C=0$ azt jelenti, hogy a (17) operátort alkalmazva bármilyen stacionárius állapot $F(\psi_e, \Phi_i)$ Schrödinger-funkcionáljára, zérust ad, vagyis a $C=0$ kiválasztja azokat a megoldásokat, amelyeknél a Schrödinger-funkcionálok szintén invariánsak (15)-tel szemben.

Megadható több független mértékinvariáns f.r., amelyekből minden más mértékinvariáns f.r. levezethető. Ilyenek lényegében a (23) mennyiségek egymás közötti relációi és ezeknek azonosaknak kell lenniök azokkal, amelyek az I dolgozatból levezethetők. Az I (21) egyenlete ezek érvényességét tetszőleges időpontra kiterjeszti. Célszerű azonban Φ_i és \mathfrak{E}_i között, tehát nem mértékinvariáns mennyiségek között vett f.r.-okat alkalmazni. Ennek felel meg a pontmechanika többtestproblémájánál az, hogy $p_k q_l - q_l p_k = \frac{h}{2\pi i} \delta_{kl}$ egyenletet a $p_k = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}$ levezetésére felhasználjuk, bár végül is a kiválasztott antiszimmetrikus rendszerben ilyen f.r.-t egyáltalán nem lehet definiálni.

Az éppen leírt séma relativisztikus invarianciája először kétségesnek látszik, mivel Φ_4 a Φ_k -kal szemben ki van tüntetve. Mielőtt ezt a kérdést megvizsgáljuk (5. §), a következő paragrafusban a Lorentz-csoportot a relativisztikusan invariáns Lagrange-függvény (pl. az ε -tagokkal kiegészített, I-ben használt Lagrange-függvény)

és a kanonikus f.r.-ok esetére olyan módszerrel tárgyaljuk, amely hasonló a más csoportoknál eddig alkalmazott módszerhez.

4. §. Lorentz-transzformáció.⁶ A Hamilton-függvény térbeli forgásokkal szembeni invarianciájának az impulzusnyomaték-tételek felelnek meg; a tulajdonképpeni Lorentz-transzformációk esetén az eddig alkalmazott módszereket némileg módosítani kell, mert a Hamilton-függvény ezekkel szemben nem invariáns, hanem az impulzuskomponensekkel együtt úgy viselkedik, mint egy négyesvektor komponensei. Látni fogjuk, hogy a tulajdonképpeni Lorentz-transzformációknak három további integrál felel meg. Ismét elegendő infinitezimális transzformációkra szorítkozni (I (33) egyenlet):

$$x_\mu \rightarrow x_\mu + \varepsilon s_{\mu\nu} x_\nu \quad (s_{\mu\nu} = -s_{\nu\mu}). \quad (26)$$

(Azonos indexekre itt és a következőkben mindig összegezzünk.) A hullámfüggvények ekkor két okból változnak: Q_α -k általában nem skalárok, egy bizonyos világpontban előírt módon transzformálódnak; ezenkívül a világpontok, amelyekre a Q_α vonatkozik, változnak. Ebből következik I jelöléseivel [I, (34), (35), (9)]

$$Q_\alpha \rightarrow Q_\alpha + \varepsilon t_{\alpha\beta} Q_\beta - \varepsilon \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\mu} s_{\mu\nu} x_\nu \quad (27a)$$

$$P_{\alpha 4} \rightarrow P_{\alpha 4} - \varepsilon t_{\beta\alpha} P_{\beta 4} - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}} s_{4k} x_k - \varepsilon \frac{\partial P_{\alpha 4}}{\partial x_\mu} s_{\mu\nu} x_\nu. \quad (27b)$$

Keresünk most olyan \bar{A} operátort, hogy

$$Q_\alpha \rightarrow Q_\alpha + \varepsilon \frac{2\pi}{hc} [\bar{A}, Q_\alpha] \quad (28a)$$

legyen. Egy ilyent kapunk, ha [vö. I, (7) a Hamilton- és Lagrange-függvény közötti összefüggést]

$$\bar{A} = \int A dV \quad (29)$$

$$\begin{aligned} A &= \left(t_{\alpha\beta} Q_\beta - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} s_{k\nu} x_\nu \right) P_{\alpha 4} - H s_{4k} x_k = \\ &= \left(t_{\alpha\beta} Q_\beta - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\mu} s_{\mu\nu} x_\nu \right) P_{\alpha 4} + L s_{4k} x_k. \end{aligned} \quad (30)$$

Valóban, tekintettel arra, hogy

$$\frac{2\pi}{hc} [\bar{H}, F] = \frac{\partial F}{\partial x_4}, \quad \frac{2\pi}{hc} [P_{\alpha 4}, Q'_\beta] = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r})$$

⁶ E paragrafus lényeges része, főleg a A (30) kifejezése és a hozzá tartozó (29) térfogati integrál időbeli állandóságának bizonyítása J. v. Neumann-tól származik, akinek eredményei átengedéseért hálás köszönettel tartozunk.

(29), (30) behelyettesítése közvetlenül (28a)-ba egy a (27a) jobb oldalával megegyező kifejezést szolgáltat.

Azonban ugyanazzal a \bar{A} -val fennáll a

$$P_{\alpha 4} \rightarrow P_{\alpha 4} + \varepsilon \frac{2\pi}{hc} [\bar{A}, P_{\alpha 4}] \quad (28b)$$

egyenlet is, amiből I (20) egyenlete szerint következik először

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{hc} [\bar{A}, P_{\alpha 4}] &= - \left(\frac{\partial A}{\partial Q_{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_i}} \right) = \\ &= -t_{\beta\alpha} P_{\beta 4} - \frac{\partial}{\partial x_i} (s_{iv} x_v P_{\alpha 4}) + \frac{\partial H}{\partial Q_{\alpha}} s_{4k} x_k - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_i}} s_{4k} x_k \right) \end{aligned}$$

és a téregyenletekből a $\frac{\partial P_{\alpha 4}}{\partial x_4}$ -re vonatkozó kifejezés felhasználásával:

$$\frac{2\pi}{hc} [\bar{A}, P_{\alpha 4}] = -t_{\beta\alpha} P_{\beta 4} - \frac{\partial P_{\alpha 4}}{\partial x_i} s_{iv} x_v - \frac{\partial P_{\alpha 4}}{\partial x_4} s_{4k} x_k - \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_k}} s_{4k}$$

(27b)-vel egyezésben.

(28a, b)-ből általánosítással következik, hogy infinitezimális Lorentz-transzformációnál egy tetszőleges, a koordinátákat explicit nem tartalmazó F mennyiség így transzformálódik:

$$F \rightarrow F + \varepsilon \frac{2\pi}{hc} [\bar{A}, F]. \quad (31)$$

Véges Lorentz-transzformáció esetén ebből egy S operátor léte következik, amellyel a véges transzformáció

$$F \rightarrow SFS^{-1} \quad (31')$$

S -nek ε szerinti hatványsorában kell hogy a lineáris tagot

$$S = 1 + \varepsilon \frac{2\pi}{hc} \bar{A} + \dots \quad (32)$$

adja meg. Mégsem sikerült nem infinitezimális transzformáció esetére S számára egy explicit kifejezést találnunk. A Schrödinger-függvények vagy funkcionálok Lorentz-transzformációk alkalmazásánál megfelelő módon

$$\varphi \rightarrow S\varphi$$

szerint transzformálódnak, ahol S -et operátorként kell felfogni, amely a φ -ben szereplő változókra hat.

Még arra a kérdésre kell válaszolnunk, vajon \bar{A} az x_4 időkoordinátától független-e. Megmutatjuk, hogy nem ez a helyzet, feltéve, hogy a

$$J_\mu = \int \left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\mu} P_{\alpha 4} - \delta_{\mu 4} L \right) dV$$

kifejezések egy négyesvektor komponensei (energia-impulzusvektor, $J_k = -icG_k$, $J_4 = \bar{H}$). Ez azt jelenti, hogy (26) infinitezimális transzformáció esetén fennáll

$$J_\mu \rightarrow J_\mu + \varepsilon s_{\mu\nu} J_\nu$$

speciálisan

$$\bar{H} \rightarrow \bar{H} + \varepsilon s_{4k} J_k.$$

A (31)-gyel való összehasonlítás ekkor ezt adja:

$$\frac{2\pi}{hc} [\bar{A}, \bar{H}] = s_{4k} J_k. \quad (33)$$

Most már könnyű $\frac{d\bar{A}}{dx_4}$ -et kiszámítani. Olyan F mennyiség esetén, amely x_4 -et nem tartalmazza explicite, egyszerűen

$$\frac{\partial F}{\partial x_4} = -\frac{2\pi}{hc} [F, \bar{H}];$$

ha azonban $F = \bar{A}$, akkor ehhez még olyan tag is adódik, amely \bar{A} -nak a benne explicite szereplő x_4 szerinti differenciálásával áll elő. Ehhez a (30) második tagja $v=4$ esetre egy járulékot ad és így:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{dx_4} &= -\frac{2\pi}{hc} [\bar{A}, \bar{H}] - \int \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} P_{\alpha 4} s_{k4} dV = \\ &= -\frac{2\pi}{hc} [\bar{A}, \bar{H}] + J_k s_{4k}. \end{aligned} \quad (34)$$

Ez éppen eltűnik (33) miatt, tehát

$$\bar{A} = \text{const.} \quad (35)$$

Ez az egyenlet a hat $s_{\mu\nu} = -s_{\nu\mu}$ komponensnek megfelelően (a $t_{\alpha\beta}$ -kat az $s_{\mu\nu}$ -k egyértelműen meghatározzák) mindig hat független integrált tartalmaz, amelyek közül az s_{ik} -khoz tartozó három az impulzusnyomaték-tételt adja, míg az s_{4k} -hoz tartozó további háromnak nincs szemléletes jelentése. A (4) és (30) tényezőinek sorrendjét illően ismét ki kell emelni (vö. I), hogy ez bár lényeges, mégis ettől függetlenül fennáll az integrálok időbeli állandósága.

(31) vagy (31)-ből egyenesen következik a kanonikus f.r.-k invarianciája a Lorentz-transzformációkkal szemben. Az itt véghezvitt invarianciabizonyítás az I-ben megadottnál valamivel egyszerűbb. Mégis hangsúlyozzuk, hogy J_ν vektorjellege egy új feltevést jelent, ami a Lagrange-függvény Lorentz-invarianciájából egyedül nem következik. Ellenben ez a feltevés mindig teljesül, ha az energia-impulzus-tétel differenciál-

alakja egy tenzor-divergencia eltűnésében áll, azaz

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x} = 0.$$

Ahogy I-ből kiviláglik, ez minden fizikailag fontos esetben igaz.

5. §. Lorentz-transzformációk és mértékinvariancia. A 3. §-ban egy eljárást tárgyaltunk, ahol egy speciális koordináta-rendszerben $\Phi_4=0$ helyettesítése után a kanonikus f.r.-kat használtuk. Ekkor a

$$C = \text{div } \mathfrak{E} + e \sum_q \psi_q^* \psi_q = 0 \quad (25)$$

egyenlet csak mértékinvariáns mennyiségekre érvényes mint q -számösszefüggés, míg más mennyiségek pl. ψ és Φ_μ a bal oldallal nem felcserélhetők. Mivel azonban C az energiával felcserélhető, mellékfeltétel gyanánt mégis használható a Schrödinger-funkcionálok esetében.

Ilyen eljárás magában relativisztikusan nem invariáns; másik vonatkozási rendszerben a kanonikus f.r.-k nem mértékinvariáns mennyiségek között már nem álnak fenn. Megmutatható azonban, hogy minden mértékinvariáns mennyiségre vonatkozó állítás, amit ily módon nyertünk, a relativisztikus invariancia követelményének eleget tesz, ha a (25) egyenletet hozzávesszük. Evégből állapítsuk meg először a Hamilton-függvény és mindenekelőtt az előző paragrafusban a Lorentz-transzformációra mérvadónak talált \bar{A} mértékinvarianciáját. Az I (45), (51), (51), (58) egyenletek szerint (törölve az ε -t tartalmazó tagokat és a sugárzásra nézve $P_{44} \equiv 0$ -t véve) a Lagrange-függvény és a Hamilton-függvény anyagi és sugárzási részére:

$$L^{(m)} = - \left[\psi_\sigma^* \left(\frac{hc}{2\pi} \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_4} + e i \psi_\sigma \Phi_4 \right) + \alpha_{q\sigma}^k \psi_q^* \left(\frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k} + e \psi_\sigma \Phi_k \right) + mc^2 \alpha_{q\sigma}^4 \psi_q^* \psi_\sigma \right] \quad (36a)$$

$$H^{(m)} = - \frac{hc}{2\pi} \psi_\sigma^* \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_4} - L^{(m)} = \alpha_{q\sigma}^k \psi_q^* \left(\frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k} + e \psi_\sigma \Phi_k \right) + mc^2 \alpha_{q\sigma}^4 \psi_q^* \psi_\sigma + e i \psi_\sigma^* \psi_\sigma \Phi_4 \quad (37a)$$

$$L^{(s)} = - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2), \quad (36b)$$

$$H^{(s)} = - F_{4k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_4} - L^{(s)} = - F_{4k} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_k} - \frac{1}{2} F_{4k} F_{4k} + \frac{1}{4} F_{ik} F_{ik}. \quad (37b)$$

Amint látjuk, $H^{(m)}$ és $H^{(s)}$ külön-külön $L^{(m)}$ és $L^{(s)}$ -sel ellentétben nem mértékinvariánsak. Viszont az összenergia parciális integrálással átalakul:

$$\begin{aligned} \bar{H} = \int (H^{(m)} + H^{(s)}) dV = \int & \left[\alpha_{q\sigma}^k \psi_q^* \left(\frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k} + e \psi_\sigma \Phi_k \right) + \right. \\ & \left. + mc^2 \alpha_{q\sigma}^4 \psi_q^* \psi_\sigma - \frac{1}{2} F_{4k} F_{4k} + \frac{1}{4} F_{ik} F_{ik} + i \Phi_4 C \right] dV. \end{aligned} \quad (38)$$

Az összipulzusra egy hasonló átalakítás érvényes. $C=0$ esetben tehát \bar{H} mérték-invariáns és csak ekkor képezi egy négyesvektor időkomponensét.

Hasonlóképpen alakul a (29) és (30) definiálta $\bar{\Lambda}$ mennyiség kiszámítása. Most $t_{\sigma\sigma}$ alatt speciálisan az anyaghullámokra vonatkozó mennyiségeket értjük, míg a Φ_μ -k esetében vektorjellegük miatt a hozzájuk tartozó $t_{\mu\nu}$ -k $s_{\mu\nu}$ -kel azonosak lesznek. Emiatt

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda} = \int dV \left[-\frac{hc}{2\pi} \psi_\sigma^* \left(t_{\sigma\sigma} \psi_\sigma - \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\mu} s_{\mu\nu} x_\nu \right) + L^{(m)} s_{4k} x_k \right. \\ \left. - F_{4k} \left(s_{k\mu} \Phi_\mu - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_\mu} s_{\mu\nu} x_\nu \right) + L_{(s)} s_{4k} x_k \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Azonban fennállnak a következők:

$$\begin{aligned} \int dV F_{4k} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_\mu} s_{\mu\nu} x_\nu - s_{k\mu} \Phi_\mu \right) = \\ = \int dV F_{4k} \left(F_{\mu k} s_{\mu\nu} x_\nu + \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_k} s_{\mu\nu} x_\nu + s_{\mu k} \Phi_\mu \right) = \\ = \int dV F_{4k} \left[F_{\mu k} s_{\mu\nu} x_\nu + \frac{\partial}{\partial x_k} (\Phi_\mu s_{\mu\nu} x_\nu) \right] = \\ = \int dV \left(F_{4k} F_{\mu k} s_{\mu\nu} x_\nu - \frac{\partial F_{4k}}{\partial x_k} \Phi_\mu s_{\mu\nu} x_\nu \right), \end{aligned}$$

az utolsó eredményt parciális integrálással kaptuk. Összevéve írhatjuk

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda} = \int dV \left[-\frac{hc}{2\pi} t_{\sigma\sigma} \psi_\sigma^* \psi_\sigma + \psi_\sigma^* \left(\frac{hc}{2\pi} \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\mu} + i e \psi_\sigma \Phi_\mu \right) s_{\mu\nu} x_\nu + \right. \\ \left. + L^{(m)} s_{4k} x_k + F_{4k} F_{\mu k} s_{\mu\nu} x_\nu + L^{(s)} s_{4k} x_k - i C s_{\mu\nu} \Phi_\mu x_\mu \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Tehát $\bar{\Lambda}$ a $C=0$ esetben mértékinvariáns.

A (31) formula szerint (39)-ből megkapjuk az új vonatkozási rendszer összes mennyiségét, kivéve Φ_4 értékét, ha az eredeti rendszerben $\Phi_4=0$ -t és kanonikus f.r.-kat tételezünk fel. Nem mértékinvariáns mennyiségek esetén azonban fel nem cserélhetőségüket C -vel és a (40) utolsó tagjának ebből származó járulékait tekintetbe kell vennünk. Ezek (21)-gyel való összehasonlítás útján könnyen előállíthatók. Ebből a tényből kétféle végkövetkeztetésre juthatunk. Először a f.r.-k a mértékinvariáns mennyiségekre az új vonatkoztatási rendszerben az eredeti rendszerbeli érvényességükből következnek függetlenül attól, hogy milyen f.r.-k érvényesek a többi mennyiségre. Ugyanis a (31) mértékinvariáns mennyiségekre való érvényességének bizonyítására csupán az első f.r.-k szükségesek. Másodszor: kiderül, hogy egy megfelelő χ függvény segítségével új mértéket választva az új rendszerben is $\Phi_4=0$ -hoz és a kanonikus f.r.-okhoz térhetünk vissza. Mindenesetre ez a χ általában q -szám.

Az új mértékválasztásra nem szükséges részletesebben kitérni ahhoz, hogy az egész eljárás Lorentz-invarianciáját megmutassuk. Ehhez elegendő ismételtlen megállapítani, hogy az új vonatkozási rendszerben is érvényben maradnak a ψ_σ , ψ_σ^* , Φ_k ,

F_{i4} mennyiségek között fennálló f.r.-k és hogy ott Φ_4 minden Φ_k -val és ψ_σ -val és ψ_σ^* -gal felcserélhető, ahogyan könnyen utánaszámíthatunk. Az új vonatkozási rendszerben a Maxwell-egyenletek térkomponensei többé nem mint q -számösszefüggések teljesülnek, mégis a jobb oldaluk zérus sajátértékeit felhasználhatjuk a többi term-mel nem kombinálódó részrendszer definiálására, ahogy ez a $C=0$ választásnak megfelel az eredeti vonatkoztatási rendszerben. Ha pedig ezután megfigyeljük, hogy $C=0$ esetére Φ_4 a Hamilton-függvényben egyáltalán nem lép fel és hogy más egyenletekben a $\frac{hc}{2\pi} \frac{\partial \Psi_6}{\partial x_4} + ei\psi_\sigma \Phi_4$ kifejezés az anyaghullámegyenleten keresztül a ψ_σ -k, Φ_k -k és térbeli deriváltjaik segítségével kifejezhető, akkor felismerjük a számítási séma azonosságát az új vonatkoztatási rendszerben a kiindulási rendszer sémájával.

6. §. A séma kiépítése póttagok nélkül. Visszatérünk a valós $x_4 = ict$ időhöz és a térerősség, valamint az áramvektorok közönséges egységeihez és bevezetjük a kanonikus $[\Pi_i, \Phi_r] = \frac{4}{2\pi i} \delta_{ik}, \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ f.r.-t kielégítő

$$\Pi_k = -\frac{1}{4\pi c} \mathfrak{E}_k \quad (41)$$

mennyiségeket vö. I, (60), (61), továbbá legyen a tárgyalásra kiválasztott koordináta-rendszerben $\Phi_4 = \Phi_0 = 0$. Most a Hamilton-függvény (37a, b):

$$\begin{aligned} \bar{H} = \int dV \left[\frac{hc}{2\pi i} \alpha_{\sigma\sigma}^k \psi_\sigma^* \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k} + mc^2 \alpha_{\sigma\sigma}^4 \psi_\sigma^* \psi_\sigma + \right. \\ \left. + \frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \right)^2 + 2\pi c^2 \Pi_k^2 + e \Phi_k \alpha_{\sigma\sigma}^k \psi_\sigma^* \psi_\sigma \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Az utolsó tag közvetíti a kölcsönhatást a sugárzás és az anyag között és perturbáló tagnak tekintjük. A módszer véghezvitelére célszerű, ahogy I-ben tettük, a Φ_i -ket sorbafejteni egy ortogonális rendszer szerint, amelyeket a perturbálatlan feladat megoldásában találunk meg. A korábbi módszerrel ellentétben a perturbálatlan problémában a Maxwell-egyenleteknek csak a három térkomponensét kell kielégíteni. Ismét legyen — vö. I (84) egyenlet —

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}} q_1^r \cos \frac{\pi}{L} \kappa_r x \cdot \sin \frac{\pi}{L} \lambda_r y \cdot \sin \frac{\pi}{L} \mu_r z \\ &\quad (\text{és ciklikus felcserélés}), \\ \Pi_1 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}} p_1^r \cos \frac{\pi}{L} \kappa_r x \cdot \sin \frac{\pi}{L} \lambda_r y \cdot \sin \frac{\pi}{L} \mu_r z. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Ekkor a Hamilton-függvény sugárzási része minden egyes sajátrezgésre:

$$\begin{aligned} \overline{H_r^{(s)}} &= 2\pi c^2 [(p_1^r)^2 + (p_2^r)^2 + (p_3^r)^2] + \\ &+ \frac{\pi}{8L^3} \cdot [(q_1^r \lambda_r - q_2^r \kappa_r)^2 + (q_1^r \mu_r - q_3^r \kappa_r)^2 + (q_2^r \mu_r - q_3^r \lambda_r)^2]. \end{aligned} \quad (44)$$

Ha a klasszikus elméletben $q_i^r = b_i^r \sin 2\pi\nu_r t$ -t írunk, akkor a Maxwell-egyenletek három térkomponenséből három lineáris egyenletet kapunk b_i^r -kre a következő determinálással:

$$\begin{pmatrix} \nu_r' = \frac{2L}{c} \nu_r, & X_r = \kappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2 - \nu_r'^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} X_r - \kappa_r^2, & -\kappa_r \lambda_r, & -\kappa_r \mu_r \\ -\lambda_r \nu_r, & X_r - \lambda_r^2, & -\lambda_r \mu_r \\ -\mu_r \kappa_r, & -\mu_r \lambda_r, & X_r - \mu_r^2 \end{vmatrix} \quad (45)$$

A determináns zérussal téve egyenlővé kapunk egy $\nu_r'^2 = \kappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2$ kétszeres gyököt és egy $\nu_r' = 0$ egyszeres gyököt.

Tehát két valódi főrezgést kapunk

$$\nu_r' = \sqrt{\kappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2} \text{ frekvenciával,}$$

az ezekhez tartozó b_i^r együtthatóknak ki kell elégítenie a

$$\kappa_r b_1^r + \lambda_r b_2^r + \mu_r b_3^r = 0 \quad (46)$$

feltételt. Ehhez járul egy aperiodikus megoldás:

$$q_i^r = b_i^r t, \quad (47)$$

ahol

$$\frac{b_1^r}{\kappa_r} = \frac{b_2^r}{\lambda_r} = \frac{b_3^r}{\mu_r}.$$

Bevezetjük a főrezgések P^r , Q^r koordinátáit és így a következő sémát nyerjük:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4cL}} q_1^r &= \frac{\lambda_r}{\sqrt{\nu_r'(\kappa_r^2 + \lambda_r^2)}} Q_1^r + \frac{\mu_r \kappa_r}{\nu_r \sqrt{\nu_r'(\kappa_r^2 + \lambda_r^2)}} Q_2^r + \frac{\kappa_r}{\nu_r' \sqrt{\nu_r'}} Q_3^r \\ \frac{1}{\sqrt{4cL}} q_2^r &= -\frac{\kappa_r}{\sqrt{\nu_r'(\kappa_r^2 + \lambda_r^2)}} Q_1^r + \frac{\mu_r \lambda_r}{\nu_r' \sqrt{\nu_r'(\kappa_r^2 + \lambda_r^2)}} Q_2^r + \frac{\lambda_r}{\nu_r' \sqrt{\nu_r'}} Q_3^r \\ \frac{1}{\sqrt{4cL}} q_3^r &= -\frac{\sqrt{\kappa_r^2 + \lambda_r^2}}{\nu_r' \sqrt{\nu_r'}} Q_2^r + \frac{\mu_r}{\nu_r' \sqrt{\nu_r'}} Q_3^r \\ \sqrt{4cL} p_1^r &= \lambda_r \sqrt{\frac{\nu_r'}{\kappa_r^2 + \lambda_r^2}} P_1^r + \frac{\mu_r \kappa_r}{\sqrt{\nu_r'(\kappa_r^2 + \lambda_r^2)}} P_2^r + \frac{\kappa_r}{\sqrt{\nu_r'}} P_3^r \\ \sqrt{4cL} p_2^r &= -\kappa_r \sqrt{\frac{\nu_r'}{\kappa_r^2 + \lambda_r^2}} P_1^r + \frac{\mu_r \lambda_r}{\sqrt{\nu_r'(\kappa_r^2 + \lambda_r^2)}} P_2^r + \frac{\lambda_r}{\sqrt{\nu_r'}} P_3^r \\ \sqrt{4cL} p_3^r &= -\frac{\sqrt{\kappa_r^2 + \lambda_r^2}}{\sqrt{\nu_r'}} P_2^r + \frac{\mu_r}{\sqrt{\nu_r'}} P_3^r. \end{aligned} \quad (48)$$

Az új változókkal kifejezett Hamilton-függvény sugárzási része

$$\bar{H}_s = \sum_r 2\pi\nu_r \left\{ \frac{1}{2} [(P_1^r)^2 + (Q_1^r)^2] + \frac{1}{2} [(P_2^r)^2 + (Q_2^r)^2] + \frac{1}{2} (P_3^r)^2 \right\}. \quad (49)$$

A P_1^r , Q_1^r , P_2^r , Q_2^r helyett mint I-ben, a (98) egyenlettel, változókul bevezetjük a fénykvantumok $M_{r,1}$, ill. $M_{r,2}$ számát és a konjugált szögeket:

$$\begin{aligned} Q_\lambda^r &= \frac{1}{i} \sqrt{\frac{h}{4\pi}} (M_{r\lambda}^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h} \chi_{r,\lambda}} - e^{-\frac{2\pi i}{h} \chi_{r,\lambda}} M_{r,\lambda}^{1/2}) \\ P_\lambda^r &= \sqrt{\frac{h}{4\pi}} (M_{r\lambda}^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h} \chi_{r,\lambda}} + e^{-\frac{2\pi i}{h} \chi_{r,\lambda}} M_{r,\lambda}^{1/2}) \end{aligned} \quad \lambda = 1, 2. \quad (50)$$

Ilyen helyettesítés azonban P_3^r esetén nem értelmes, mert a perturbátatlan Hamilton-függvényben Q_3^r nem fordul elő, tehát P_3^r a perturbátatlan rendszerben állandó. Ezért a valószínűségi amplitúdók független változói gyanánt az N_r , $M_{r\lambda}$ ($\lambda=1, 2$) és P_3^r -eket használjuk. Ezekkel a változókkal, feltételezve a kizárási elvet, az anyag esetén, a Schrödinger-egyenlet:

$$\begin{aligned} &[-E + \sum_s N_s E_s + \sum_{r,\lambda} M_{r,\lambda} h\nu_r + \sum_r \pi\nu_r (P_3^r)^2] \varphi(N_1, N_2, \dots, M_1, \dots, P_3^1, \dots) = \\ &= -ie \sqrt{\frac{h}{4\pi}} \sum_{s,t,r} N_s (1 - N_t) \nu_s (N_1 \dots 1 - N_s) \nu_t (N_1 \dots 1 - N_t) \cdot \\ &\cdot \left\{ \sum'_{\lambda=1,2} c_{st}^{r\lambda} [M_{r\lambda}^{1/2} \varphi(N_1 \dots 1 - N_s, 1 - N_t; M_1 \dots M_{r\lambda} - 1, P_3^1, \dots) \right. \\ &\quad \left. - (M_{r\lambda} + 1)^{1/2} \varphi(N_1 \dots 1 - N_s, 1 - N_t, M_1 \dots M_{r\lambda} + 1, P_3^1, \dots) \right] + \\ &+ c_{st}^{r3} \sqrt{\frac{h}{\pi}} \frac{\partial}{\partial P_3^r} \varphi(N_1 \dots 1 - N_s, 1 - N_t; M_1 \dots P_3^1, \dots) \Big\} \\ &- ie \sqrt{\frac{h}{4\pi}} \sum'_{s,r} N_s \left\{ \sum_{\lambda=1,2} c_{ss}^{r\lambda} [M_{r\lambda}^{1/2} \varphi(N_1 \dots; M_1 \dots M_{r\lambda} - 1 \dots P_3^1, \dots) \right. \\ &\quad \left. - (M_{rs} + 1)^{1/2} \varphi(N_1 \dots, M_1 \dots M_{r\lambda} + 1, \dots, P_3^1, \dots) \right] \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{h}{\pi}} c_{ss}^{r3} \frac{\partial}{\partial P_3^r} \varphi(N_1 \dots M_1 \dots P_3^1, \dots) \right\}. \end{aligned} \quad (51)$$

Ezen kívül φ -nek ki kell elégítenie azt a további feltételt, hogy a C operátor φ -re alkalmazva nullát ad, tehát:

$$\begin{aligned} &P_3^r \varphi(N_1, \dots, M_1, \dots, P_3^1, \dots) + e \sum'_{s,t} N_s (1 - N_t) \cdot \nu_s (N_1 \dots 1 - N_r) \cdot \nu_s (N_1 \dots 1 - N_t) \cdot \\ &\cdot d_{st}^r \varphi(N_1 \dots 1 - N_s, 1 - N_t, \dots, M_1 \dots P_3^1, \dots) + \\ &+ \sum_s N_s d_{ss}^r \varphi(N_1 \dots; M_1 \dots P_3^1, \dots) = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Itt

$$d_{st}^r = \int u_q^{*s} u_q^t v_r^0 dV, \quad (53)$$

ahol

$$v_r^0 = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{2}{c v_r^3}} \sin \frac{\pi}{L} \kappa_r x \cdot \sin \frac{\pi}{L} \lambda_r y \cdot \sin \frac{\pi}{L} \mu_r z. \quad (54)$$

A perturbálatlan rendszerben, ahol az anyag és a sugárzás kölcsönhatását elhanyagoljuk, (52) szerint fennáll:

$$P_3^r = 0. \quad (55)$$

Ekkor csak az 1 és 2 ismert főrezgés marad fenn. A perturbált rendszerben azonban tekintetbe kell venni a P_3^r -eket is, ami P_3^r folytonos sajátérték-spektruma miatt a korábbi sémához képest néhány eltérést okoz.

A következőkben, ahogyan I-ben, csak az elektrosztatikus kölcsönhatást akarjuk végigszámolni; a mágneses és a késleltetési hatásokat az I-beli módszer szerint Breit⁷ tárgyalta.

Elektrosztatikus kölcsönhatás esetén a P_3^r operátort (51)-ben legegyszerűbben (52) segítségével fejezzük ki. Ekkor (51)-ben a c_{st}^r -es tagokat a d_{st}^r -es tagokkal szemben első közelítésben elhanyagolhatjuk. Perturbációs energia gyanánt ebben a közelítésben csak $\sum_r \pi v_r (P_3^r)^2$ időbeli középértéke marad meg, ahol P_3^r -et az (51)-beli operátor helyettesíti. A sajátérték-perturbációra tehát (N_s^0 -k jelöljék az N_s -ek értékeit a perturbálatlan rendszerben) kapjuk

$$\Delta E = e^2 \sum_{r,s,t}' \pi v_r N_s^0 (1 - N_t^0) d_{st}^r d_{ts}^r + e^2 \sum_{r,s,t}' \pi v_r N_s^0 N_t^0 d_{ss}^r d_{tt}^r. \quad (56)$$

Ebből az I-beli számításokhoz pontosan hasonló módon adódik:

$$\Delta E = \frac{e^2}{2} \left[\sum_{s,t}' N_s^0 (1 - N_t^0) A_{st,ts} + \sum_{s,t}' N_s^0 N_t^0 A_{ss,tt} \right], \quad (57)$$

ahol $A_{st,ts}$ a

$$A_{st,nm} = \int dV \cdot dV' \frac{u_q^{*s}(P) u_q^t(P) u_{\sigma'}^{*n}(P') u_{\sigma}^m(P')}{r_{PP'}}.$$

kicszerelődségi integrálokat (I, 114) jelenti. Az u_q^s azt az ortogonális rendszert jelenti, amely szerint az anyag-sajátfüggvényeket sorbafejtjük.

(57)-ből kitűnik, hogy az itt követett módszer mellett is az elektronoknak önmagukra gyakorolt kölcsönhatása végtelennek adódik, ami sok esetben lehetetlenné teszi az elmélet alkalmazását. Az itt leírt módszernek tehát csupán annyi az előnye, hogy feleslegessé teszi a póttagokat a Maxwell-egyenletekhez.

7. §. Áttérés a konfigurációs térre⁸. Ebben a fejezetben azt a kérdést akarjuk tárgyalni, hogyan lehet (adott energiánál) annak valószínűségét kiszámítani, hogy előre megadott $M_{r,\lambda}$ ($\lambda=1, 2$) fénykvantum-szám mellett és adott $P_{r,3}$ mellett a jelenlevő N elektron helye a $q_{i1}, \dots, q_{ip}, \dots, q_{iN}$ koordinátájú pontok $dq_{i1}, \dots, dq_{ip}, \dots, dq_{iN}$

⁷ G. Breit, Phys. Rev. 34, 553, 1929.

⁸ Ennek a módszernek kidolgozásában R. Oppenheimer szívélyesen támogatott minket, amiért ezen a helyen is kifejezzük köszönetünket.

környezetében található. Az i index 1-től 3-ig fut és a három térkoordinátára vonatkozik. A p index 1-től N -ig halad és a különböző részecskékre vonatkozik. Látjuk, hogy a meglevő részecskék összes számát állandónak vesszük úgy, hogy a szétsugárzási folyamatokat itt kizárjuk. Továbbá megtartjuk a sugárzási tér Fourier-felbontását az anyaghullámokéval ellentétben, mert egyelőre csak így lehet a sugárzás zérus-pont-energiáját kiküszöbölni. Megmutatjuk, hogy lehetséges olyan

$$\varphi_{q_1 \dots q_N}(q_{i1}, \dots, q_{iN}, M_{r\lambda}, P_{r3})$$

valószínűségi amplitúdókat definiálni, amelyekben a q_p indexek a spinelektron Dirac-féle elmélete négy hullámfüggvényének megfelelően minden egyes p -re négy értéket vesznek fel és amelyekből

$$\sum_{q_1 \dots q_N=1}^4 |\varphi_{q_1 \dots q_N}(q_{i1} \dots q_{iN}, M_{r\lambda}, P_{r3})|^2$$

szerint a keresett valószínűség kiszámítható. Ezek a függvények egyszerű differenciálegyenleteket elégítenek ki anélkül, hogy szükség lenne bármily elhanyagolásra vagy közelítésre. Világos, hogy a hullámmező kvantumelmélete eredményeinek összehasonlítását a többtestprobléma Schrödinger-féle nemrelativisztikus elméletével (konfigurációs tér hullámai) ilyen függvények bevezetése megkönnyíti. Ezeket a függvényeket az előző paragrafusokban definiált $\Phi(N_s, M_{r\lambda}, P_{r3})$ függvények útján is le lehetne vezetni, de mégis egy közvetlen utat részesítünk előnyben.

Elsősorban a (42) Hamilton-függvényhez tartozó Schrödinger-egyenletet és a megfelelő $C=0$ mellékfeltételt akarjuk felállítani az $N_e(x_i) = \psi_e^* \psi_e$, $M_{r\lambda}$, P_{r3} változójú funkcionálokra. A gondolatmenetnek legfontosabb része ekkor az áttérés $N_e(x_i)$ -kről a $q_{i1}, q_{11}, \dots, q_{ip}, q_p \dots q_{iN}, q_N$ változókra. (43), (48) és (50) szerint fennállanak:

$$\Phi_k = \sum_{\lambda=1,2} \sum_r \sqrt{\frac{h}{4\pi}} v_k^{\lambda} \frac{1}{i} (M_{r\lambda}^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h} x_{r,\lambda}} - e^{-\frac{2\pi i}{h} x_{r,\lambda}} M_{r,\lambda}^{1/2}) + \sum_r v_k^3 Q^{r3}, \quad (58a)$$

$$\Pi_k = \sum_{\lambda=1,2} \sum_r \sqrt{\frac{h}{4\pi}} \frac{v_r}{2c^2} v_k^{\lambda} (M_{r\lambda}^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h} x_{r,\lambda}} + e^{-\frac{2\pi i}{h} x_{r,\lambda}} M_{r,\lambda}^{1/2}) + \sum_r \frac{v_r}{2c^2} v_k^3 P^{r3}. \quad (58b)$$

Itt

$$v_1^{\lambda} = c \sqrt{\frac{2}{v_r}} \sqrt{\frac{8}{L^3}} f^{r\lambda} \cdot \cos \frac{2\pi v_r}{c} \varepsilon_{r1} x_1 \cdot \sin \frac{2\pi v_r}{c} \varepsilon_{r2} x_2 \cdot \sin \frac{2\pi v_r}{c} \varepsilon_{r3} x_3 \quad (59)$$

(és ciklikus felcseréléssel a többi),

ahol f_k^{λ} minden r -nél a következő mátrix:

$$\begin{array}{c|ccc} & \lambda & 1 & 2 & 3 \\ k & & & & \\ \hline 1 & & \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}, & \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}, & \varepsilon_1 \\ 2 & & -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}, & \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}, & \varepsilon_2 \\ 3 & & 0, & -\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}, & \varepsilon_3 \end{array} \quad (48')$$

Látjuk, hogy az $\varepsilon_{r,k}$ -k a hullámfelület normális egységvektorainak komponensei ($\sum_k \varepsilon_k^2 = 1$) és minden r -re

$$\varkappa = v' \varepsilon_1, \quad \lambda = v' \varepsilon_2, \quad \mu = v' \varepsilon_3 \left(v' = \frac{2L}{c} v \right).$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{E} &= -4\pi c \operatorname{div} \Pi = \\ &= \sum_r \frac{8\pi^2}{c} \sqrt{\frac{v_r^3}{2}} \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin \frac{2\pi v_r}{c} \varepsilon_{r,1} x_1 \cdot \sin \frac{2\pi v_r}{c} \varepsilon_{r,2} x_2 \cdot \sin \frac{2\pi v_r}{c} \varepsilon_{r,3} x_3 P_{r3}, \end{aligned}$$

tehát

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} + 4\pi e \sum_q \psi_q^* \psi_q = 0,$$

amit a Fourier-tétel segítségével P_{r3} -ra megoldva

$$P_{r3} + e \int v_{0r}(x_i) \sum_q \psi_q^* \psi_q dV = 0, \quad (60)$$

ahol v_{0r} -et (54) definiálja. Továbbá (42) szerint a Hamilton-függvény, törölve a sugárzási nullpontenergiáját

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \sum_{r,\lambda} M_{r\lambda} h v_{r\lambda} + \sum_r \pi v_r (P_{r3})^2 + \\ &+ \int dV \left(\frac{hc}{2\pi i} \alpha_{e\sigma}^k \psi_e^* \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k} + mc^2 \alpha_{e\sigma}^4 \psi_e^* \psi_\sigma \right) + \\ &+ e \sum_r \sqrt{\frac{h}{4\pi}} \sum_{\lambda=1,2} \frac{1}{i} (M_{r\lambda}^{1/2} \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} x_{r\lambda}} - e^{-\frac{2\pi i}{h} x_{r\lambda}} M_{r\lambda}^{1/2} \cdot \\ &\cdot \int v_k^{r\lambda} \alpha_{e\sigma}^k \psi_e^* \psi_\sigma dV + e \sum_r Q^{r3} \int v_k^{r3} \alpha_{e\sigma}^k \psi_e^* \psi_\sigma dV. \end{aligned} \quad (61)$$

Most mindkét utóbbi összefüggést mint operátoregyenletet írjuk fel, amelyek a $\varphi\{N_e(x_i), M_{r\lambda}, P_{r3}\}$ funkcionálra hatnak. Eközben vegyük figyelembe, hogy $e^{\pm \frac{2\pi i}{h} x} M$ értéket megfelelően $M \mp 1$ értékbe viszi át és Q^{r3} -t $\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial P_{r3}}$ helyettesíti. Ekkor

$$\begin{aligned} &\left(P_{r3} + e \int v_{0r}(x_i) \sum_q N_e(x_i) dV \right) \varphi\{N_e(x_i), M_{r\lambda}, P_{r3}\} = 0 \quad (60') \\ &\left[-E + \sum_{r,\lambda} M_{r\lambda} h v_{r\lambda} + \sum_r \pi v_r (P_{r3})^2 \right] \psi\{N_e(x_i), M_{r\lambda}, P_{r3}\} + \\ &+ \left[\int dV \left(\frac{hc}{2\pi i} \alpha_{e\sigma}^k \psi_e^* \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k} + mc^2 \alpha_{e\sigma}^4 \psi_e^* \psi_\sigma \right) \right] \varphi\{N_e(x_i), M_{r\lambda}, P_{r3}\} + \\ &+ e \sum_r \sqrt{\frac{h}{4\pi}} \cdot i \cdot \sum_{\lambda=1,2} \left(\int v_k^{r\lambda} \alpha_{e\sigma}^k \psi_e^* \psi_\sigma dV \right) \end{aligned}$$

$$(M_{r\lambda} + 1)^{1/2} \varphi \{N_{\varrho}(x_i) \dots M_1 \dots M_{r\lambda} + 1 \dots P_{r3}\} - M_{r\lambda}^{1/2} \varphi \{N_{\varrho}(x_i) \dots M_1 \dots M_{r\lambda} - 1 \dots P_{r3}\} + \\ + e \sum_r \frac{i\hbar}{2\pi} \left(\int v_k^3 \alpha_{\varrho\sigma}^k \psi_{\varrho}^* \psi_{\sigma} dV \right) \frac{\partial}{\partial P_{r3}} \varphi \{N_{\varrho}(x_i), M_1 \dots P_{r3}\} = 0 \quad (61')$$

Most az a kérdés, hogyan hatnak a

$$\int \sum_{\varrho, \sigma} f_{\varrho\sigma}(x_i) \psi_{\varrho}^* \psi_{\sigma} dV \quad \text{és} \quad \int \sum_{\varrho, \sigma} f_{\varrho\sigma}(x_i) \psi_{\varrho}^* \frac{d\psi_{\sigma}}{dx_k} dV$$

alakú operátorok (az f -ek c -számok) egy $\Phi\{N_{\varrho}(x_i)\}$ funkcionálra, ha $N_{\varrho}(x_i) = \psi_{\varrho}^* \psi_{\varrho}$ és fennállanak a

$$[\psi_{\varrho}, \psi_{\sigma}^*] = \delta_{\varrho\sigma} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

kanonikus f.r.-k; továbbá mi a megfelelő $\varphi(q_{i1}, \dots, q_{ip}, \dots, q_{iN})$ -ra vonatkozó eredmény.

A szükséges transzformáció-elméletet többször kifejtették.⁹ Mégis célszerű a $\psi(x_i)$ -ket először lépcsős függvénnyel helyettesíteni, azután áttérni a konfigurációs térre és a függvényeket csak végezetül folytonossá tenni. Legyenek tehát egyenlő ΔV nagyságú cellák, amelyekben belül ψ^* és ψ ugyanazt az értéket veszik fel és legyen:

$$a_{\varrho, x_i} = \psi_{\varrho}(x_i), \quad a_{\varrho, x_i}^* = \psi_{\varrho}^*(x_i) \Delta V$$

úgy, hogy fennáll

$$[a_{\varrho}, a_{\sigma}^*]_{\pm} = \delta_{\varrho\sigma} \delta_{x_i x_i},$$

ahol x_i csak diszkrét értékeket vesz fel. Látható, hogy

$$N_{\varrho, x_i} = a_{\varrho x_i}^* a_{\varrho x_i}$$

a részecskék rögzített N össz-száma mellett — ez a feltevés lényeges — a

$$\sum_{p=1}^N \delta_{\varrho \varrho_p} \cdot \delta_{x_i q_{ip}}$$

sajátértékekkel rendelkezik, ahol több ϱ_p, q_p értékpár egybe is eshet.

$$N_{\varrho}(x_i) = \psi_{\varrho}^*(x_i) \psi_{\varrho}(x_i) = \lim \frac{1}{\Delta V} a_{\varrho, x_i}^* a_{\varrho, x_i}$$

sajátértékei tehát

$$\sum_{p=1}^N \delta_{\varrho \varrho_p} \cdot \delta(x_i - q_{ip}),$$

ahol most a Dirac-féle δ -függvény lép fel.

⁹ P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) 114, 243, 1927; P. Jordan és O. Klein, ZS. f. Phys. 45, 751, 1927; P. Jordan, ZS. f. Phys. 45, 766, 1927; P. Jordan és E. Wigner, ugyanott 47, 631, 1928.

Az áttérés a konfigurációs térre, azaz hozzárendelése $\Phi\{N_{\varrho, x_i}\}$ -hez a $\varphi(\varrho_1, q_1 \dots \varrho_N q_N)$

$$\Phi(1_{\varrho_1 q_1}, 1_{\varrho_2 q_2} \dots 1_{\varrho_N q_N}) = (N!)^{1/2} \varphi(\varrho_1, q_1 \dots \varrho_N, q_N),$$

$$\Phi(1_{\varrho_1 q_1}, \dots 2_{\varrho_t q_t} \dots 1_{\varrho_{N-1} q_{N-1}}) = \left(\frac{N!}{2!}\right)^{1/2} \varphi(\varrho_1, q_1 \dots \varrho_t q_t \varrho_t q_t \dots) \quad (62)$$

$$\Phi(N_{\varrho_1, q_1}^{(1)}, N_{\varrho_2, q_2}^{(2)} \dots) = \left(\frac{(N!)}{\prod N^{(2)}!}\right)^{1/2} \varphi(\underbrace{\varrho_1 q_1 \dots \varrho_1 q_1}_{N^{(1)}\text{-szer}}, \underbrace{\varrho_2 q_2 \dots \varrho_2 q_2 \dots}_{N^{(2)}\text{-szer}}, \dots)$$

egyenletek szerint megy végbe. Látjuk, hogy az első sorban minden ϱ_p, q_p pár egymástól különböző, a második sorban két egyenlő van, az utolsóban általánosan minden $N^{(1)}, N^{(2)} \dots$ érték egybeesik. Az Einstein—Bose-statisztikánál $\varphi(\varrho_1 q_1 \dots \varrho_N q_N)$ szimmetrikus, a kizárási elvnel antiszimmetrikus; az utóbbi esetben (62)-nek csak az első sora veendő tekintetbe.

A további számításokat az egyszerűség kedvéért az Einstein—Bose-statisztika esetére hajtjuk végre. Ekkor

$$a_{\varrho, x_i}^* = N_{\varrho, x_i}^{1/2} e^{-i\theta_{\varrho, x_i}}; \quad a_{\varrho, x_i} = e^{i\theta_{\varrho, x_i}} N_{\varrho, x_i}^{1/2}$$

és $e^{\pm i\theta_{\varrho, x_i}}$ mint operátor N_{ϱ, x_i} -t átalakítja $N_{\varrho, x_i} \pm 1$ -be. Tehát

$$\left(\sum_{\varrho, \sigma, x_i} f_{\varrho, \sigma, x_i} a_{\varrho, x_i}^* a_{\sigma, x_i}\right) \Phi\{N_{\varrho', x_i'}\} =$$

$$= \sum_{\varrho, \sigma, x_i} f_{\varrho, \sigma, x_i} N_{\varrho, x_i}^{1/2} (N_{\sigma, x_i} + 1)^{1/2} \Phi\{N_{\varrho', x_i'} - \delta_{\varrho\varrho'} \delta_{x_i x_i'} + \delta_{\sigma\varrho'} \delta_{x_i x_i'}\} \quad (63)$$

Bizonyos ϱ, σ, x_i mellett Φ argumentuma a jobb oldalon abban különbözik a bal oldalétól, hogy N értéke a ϱ, x_i cellában eggyel csökken, míg N értéke a σ, x_i cellában eggyel nő. Ha N értéke a ϱ, x_i cellában nulla, akkor az $N_{\varrho, x_i}^{1/2}$ tényező gondoskodik arról, hogy a jobb oldal eltűnjön. Ha pedig $N_{\varrho', x_i'}$ helyébe a $\sum_{\varrho} \delta_{\varrho'\varrho} \delta_{x_i' x_i}$ sajátértéket tesszük és végrehajtjuk (62) szerint az áttérést a konfigurációs térre, akkor

$$\left(\sum_{\varrho, \sigma, x_i} f_{\varrho, \sigma, x_i} a_{\varrho, x_i}^* a_{\sigma, x_i}\right) \varphi(\varrho_1 q_1, \dots \varrho_N q_N) =$$

$$= \sum_{\varrho, \sigma, x_i} f_{\varrho, \sigma, x_i} \sum_p \delta_{\varrho \varrho_p} \delta_{x_i q_{ip}} \varphi(\varrho_1, q_{i1} \dots \sigma, q_{ip} \dots \varrho_N, q_{iN}) =$$

$$= \sum_{\sigma} \sum_p f_{\varrho_p, \sigma, q_{ip}} \varphi(\varrho_1, q_{i1}, \dots \sigma, q_{ip} \dots \varrho_N q_{iN}). \quad (64)$$

Az $N_{\varrho, x_i}^{1/2} (N_{\varrho, x_i} + 1)^{1/2}$ tényezők (63)-ban a (62)-ből származó kombinatorikus tényezőkkel éppen kiejtik egymást. Az átmenet a kontinuumra (64)-ben minden további nélkül végrehajtható. Az eredmény

$$\varphi_{\varrho_1 \dots \varrho_N}(q_1 \dots q_N) = \lim (AV)^{-N/2} \cdot \varphi(\varrho_1, q_1 \dots \varrho_N, q_N)$$

$$\Phi\{N_{\varrho}(x_i)\} = \lim (AV)^{-N/2} \Phi\{N_{\varrho, x_i}\}.$$

Tehát

$$N_{\varrho}(x_i) = \sum_{p=1}^N \delta_{\varrho, \varrho_p} \cdot \delta(x_i - q_{ip})$$

számára a

$$\begin{aligned} & \left(\int f_{\varrho\sigma}(x_i) \psi_{\varrho}^*(x_i) \psi_{\sigma}(x_i) dV \right) \Phi \left\{ \sum_{p=1}^N \delta_{\varrho, \varrho_p} \delta(x_i - q_{ip}) \right\} \rightarrow \\ & \rightarrow \sum_{p=1}^N \sum_{\sigma_p} f_{\varrho_p, \sigma_p}(q_{ip}) \varphi_{\varrho_1} \dots \sigma_p \dots \varrho_N(q_{i1}, \dots, q_{iN}) \end{aligned} \quad (65)$$

hozzárendelést kapjuk. Speciálisan az $f_{\varrho, \sigma} = \delta_{\varrho, \sigma} f$ esetben

$$\begin{aligned} & \left(\int f(x_i) N(x_i) dV \right) \Phi \left\{ \sum_{p=1}^N \delta_{\varrho, \varrho_p} \delta(x_i - q_{ip}) \right\} \rightarrow \\ & \rightarrow \sum_{p=1}^N f(q_{ip}) \varphi_{\varrho_1} \dots \varrho_N(q_{i1}, \dots, q_{iN}). \end{aligned} \quad (66)$$

Hasonlóképp megmutatható, hogy

$$\begin{aligned} & \left(\int \sum_{\varrho, \sigma} f_{\varrho, \sigma}(x_i) \psi_{\varrho}^* \frac{\partial \psi_{\sigma}}{\partial x_k} dV \right) \Phi \left\{ \sum_{p=1}^N \delta_{\varrho, \varrho_p} \delta(x_i - q_{ip}) \right\} \rightarrow \\ & \rightarrow \sum_{p=1}^N \sum_{\sigma_p} f_{\varrho_p, \sigma_p}(q_{ip}) \frac{\partial}{\partial q_{kp}} \varphi_{\varrho_1} \dots \sigma_p \dots \varrho_N(q_{i1} \dots q_{iN}). \end{aligned} \quad (67)$$

Ahogy Jordan és Wigner vizsgálataiból kiderül, a (65), (66), (67) állítások a kizárási elv esetében is igazak maradnak, ha a φ függvényt a ϱ_p, q_p párokban antiszimmetrikusnak tételezzük fel. (A $\varrho_1 q_1 \dots \varrho_N q_N$ argumentumok sorrendje itt bizonyos előjelfüggvények meghatározásánál mérvadó.)

(60), (61) egyenleteinket most közvetlenül átírhatjuk a konfigurációs térre. Kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \left[P_{r3} + e \sum_{p=1}^N v_{or}(q_{ip}) \right] \varphi_{\varrho_1 \dots \varrho_N}(q_{i1} \dots q_{iN}, M_{r\lambda}, P_{r3}) = 0 \quad (68) \\ & \left[-E + \sum_{r, \lambda} M_{r\lambda} h v_{r\lambda} + \sum_r \pi v_r (P_{r3})^2 \right] \varphi_{\varrho_1 \dots \varrho_N}(q_{i1} \dots q_{iN}, M_{r\lambda}, P_{r\lambda}) + \\ & + \sum_{k, p, \sigma_p} \left(\frac{hc}{2\pi i} \alpha_{\varrho_p, \sigma_p}^k \frac{\partial}{\partial q_{kp}} + mc^2 \alpha_{\varrho_p, \sigma_p} \right) \varphi_{\varrho_1 \dots \sigma_p \dots \varrho_N}(q_{ip}, M_{r\lambda}, P_{r3}) + \\ & + e \sum_r \sqrt{\frac{h}{4\pi}} i \sum_{\lambda=1, 2} \sum_{k, p, \sigma_p} v_k^{r\lambda}(q_{ip}) \alpha_{\varrho_p, \sigma_p}^k \\ & \quad [(M_{r\lambda} + 1)^{1/2} \varphi_{\varrho_1 \dots \sigma_p \dots \varrho_N}(q_{ip}, M_1 \dots M_{r\lambda} + 1 \dots P_{r3}) \\ & \quad - M_{r\lambda}^{1/2} \varphi_{\varrho_1 \dots \sigma_p \dots \varrho_N}(q_{ip}, M_1 \dots M_{r, \lambda} - 1 \dots P_{r3})] \\ & + e \sum_r \frac{ih}{2\pi} \sum_{k, p, \sigma_p} v_k^{r3}(q_{ip}) \alpha_{\varrho_p, \sigma_p}^k \frac{\partial}{\partial P_{r3}} \varphi_{\varrho_1 \dots \sigma_p \dots \varrho_N}(q_{ip}, M_{r\lambda}, P_{r3}) = 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Azt, hogy ezeket az egyenleteket a konfigurációs térbeli Schrödinger-féle egyenletek mennyire közelítik meg, R. Oppenheimer egy nemsokára megjelenő dolgozata tárgyalja. Ebben is nehézséget jelent az elektronok sajátenergiája.

Említsük még meg, hogy a konfigurációs térre való áttérés itt alkalmazott eljárását hogyan kell a szétsugárzási folyamatok esetére általánosítani. Ekkor a részecskék száma nem marad többé állandó. Mégis lehetséges a különböző dimenziójú terekben megadott függvények rendszerével számolni:

$$\varphi(M_{r\lambda}, P_{r3}), \varphi(q_{i1}, M_{r\lambda}, P_{r3}) \dots \varphi(q_{i1}, \dots q_{iN}, M_{r\lambda}, P_{r3}) \dots,$$

ezek megfelelnek olyan eseteknek, amikor nulla, egy, ... N ... részecske van jelen. Ezeket a függvényeket egy bizonyos elméletben szimultán differenciálegyenlet-rendszerrel kell összekapcsolni. A 2. § (12) egyenletében megadott speciális póttagok esetében semmi nehézséget nem jelentene eme egyenletrendszer felállítása. Mégis itt eltekintünk ettől, mivel ezeknek a speciális tagoknak aligha van fizikai jelentésük.

Fordította

Csoma Zsigmond

A IUPAP HÍREI

LIST OF IUPAP CONFERENCES 1982

At the meeting of the Executive Committee of the International Union of Pure and Applied Physics held in Paris, France, August 29, patronage of the Union was extended to international conferences to be organized in 1982 as listed in this News Bulletin.

It is recalled that IUPAP conferences are classified as A, B or C type conferences depending on size and scope. The three categories are defined as follows:

- A: *General conferences* designed to provide an overview of the entire field of interest to a Commission. Normally occurring at three-year intervals and with an attendance in the range 750—1500.
- B: *Topical conferences* concentrating on broad subfields in the area of a Commission's interest. Normally scheduled in the three years between type A conference. Expected attendance in the range 300—600.
- C: *Special conferences* on more specialized topics than in the case of Type B conferences. Normally held in the years between type A conferences. Anticipated attendance in the range 50—200.

INTERNATIONAL CONFERENCES IN 1982

EC EXECUTIVE COMMITTEE

- | | |
|---|---|
| EC.1 International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics.
Istanbul, TURKEY
August 23—27, 1982
"B" | Organizer: Professor M. Serdaroglu
Bogazici University
Physics Department, P. K.
2 Bebek
Istanbul, TURKEY |
|---|---|

C3 COMMISSION ON THERMODYNAMICS AND STATISTICAL MECHANICS

- | | |
|--|---|
| C3.1 Statistical Mechanics of Ionic Matter.
Les Houches, FRANCE
March 29—April 10, 1982
"C" | Organizer: Professor M. Baus
C.P. 231, Université Libre de
Bruxelles, B—1050 Bruxelles
BELGIUM |
|--|---|

C4 COMMISSION ON COSMIC RAYS

- C4.1 5th Symposium on Solar-Terrestrial Physics.
Ottawa, CANADA
May 17—22, 1982
"A" *Organizer:* Dr. J. G. Roederer
Geophysical Institute,
University of Alaska,
Fairbanks, AK 99701
USA

C8 COMMISSION ON SEMICONDUCTORS

- C8.1 12th International Conference on Defects in Semiconductors.
Amsterdam,
THE NETHERLANDS
August 31—September 3, 1982
"B" *Organizer:* Professor C. A. J. Ammerlaan
Naturkundig Laboratorium
Universiteit van Amsterdam
Valckenierstraat 65
1018 XE Amsterdam
THE NETHERLANDS
- C8.2 XVIth International Conference on the Physics of Semiconductors.
Montpellier, FRANCE
September 6—10, 1982
"A" *Organizer:* Professor B. Pistoulet
Centre d'Etudes d'Electro-
nique des Solides, Universite
des Sciences et Techniques
du Languedoc, Place E. Batail-
lon,
34060 Montpellier, FRANCE

C9 COMMISSION ON MAGNETISM

- C9.1 VII International Conference on Solid Compounds of Transition
Elements.
Grenoble, FRANCE
June 22—25, 1982
"C" *Organizer:* Dr. E. F. Bertaut
Centre National de la
Recherche Scientifique, Lab.
de Cristallographie, 25,
Avenue des Martyrs,
166X — 38042 Grenoble
Cedex, FRANCE
- C9.2 XXII Ampere Congress.
Poznań, POLAND
August 23—27, 1982
"B" *Organizer:* Professor J. Stankowski
Inst. of Molecular Physics,
Polish Academy of Sciences,
Smoluchowskiego 17/19
60—179 Poznań, POLAND

- C9.3 International Conference on Magnetism.
Tokyo, JAPAN
September 6—10, 1982
"A"
Organizer: Professor S. Chikazumi
Inst. for Solid State Physics,
University of Tokyo, Rappongi
7—12, Minato-ku,
Tokyo 106, JAPAN
- C9.4 10th International Colloquium on Magnetic Films and Surfaces.
Yokohama, JAPAN
September 13—16, 1982
"C"
Organizer: Professor Y. Gondo
Faculty of Engineering,
Yokohama, National
University,
Yokohama 240, JAPAN

C10 COMMISSION ON SOLID STATE PHYSICS

- C10.1 Sixth International Conference on Positron Annihilation.
Arlington, Texas, USA
April 3—7, 1982
"C"
Organizer: Dr. P. G. Coleman
Center for Positron Studies,
The University of Texas at
Arlington, Box 19059,
Arlington, Texas 76019, USA
- C10.2 Vibrations at Surfaces III.
Asilomar, Calif., USA
September 1—4, 1982
"B"
Organizer: Dr. H. Morawitz
IBM Research Laboratory
Dept. K31/281, 5600 Cottle
Road,
San Jose, CA 95193, USA
- C10.3 Materials Development 1982.
Pretoria, REPUBLIC OF
SOUTH AFRICA
November 9—12, 1982
"B"
Organizer: Dr. J. B. Clark
CSIR
P. O. Box 395, Pretoria
South Africa 0001
- C10.4 Physics and Chemistry of Synthetic and Organic Metals.
Le Martinique, FRANCE
December, 1982
"B"
Organizer: Dr. R. Comes
Lab, de Physique des Solides,
Université de Paris Sud,
Bâtiment 510, 91405 Orsay,
FRANCE

C11 COMMISSION ON PARTICLES AND FIELDS

- C11.1 International Colloquium on the History of Particle Physics.
Paris, FRANCE
July 21—23, 1982
"C"
Organizer: Dr. A. Berthelot
College de France, 20, Rue
Berbier du Mets,
75013 Paris, FRANCE

C11.2 XXI International Conference on High Energy Physics.

Paris, FRANCE
 July 26—31, 1982
 "A"

Organizer: Professor M. Froissart
 20, Rue Berbier du Mets,
 75013 Paris, FRANCE

C12 COMMISSION ON NUCLEAR PHYSICS

C12.1 Spin Excitations in Nuclei.

Telluride, Colorado, USA
 March 25—27, 1982
 "C"

Organizer: Dr. Fred Petrovich
 Department of Physics,
 Florida State University,
 Tallahassee, Florida 32306,
 USA

C12.2 Conference on Hypernuclear and Kaon Physics.

Heidelberg, FRG
 June 20—25, 1982
 "C"

Organizer: Professor B. Martin
 Max Planck Institut für Kern-
 physik, Postbox 10 39 80,
 D-Heidelberg, FRG

C12.3 International Conference on Nuclear Structure.

Amsterdam,
 THE NETHERLANDS
 August 30—September 3, 1982
 "B"

Organizer: Dr. J. F. A. van Hienen
 Vrije Universiteit,
 Naturkundig
 Laboratorium, Postbus 7161,
 1007 MC Amsterdam,
 THE NETHERLANDS

C12.4 International Conference on Nuclear Data for Science.

Antwerp, BELGIUM
 September 6—10, 1982
 "C"

Organizer: Dr. K. H. Böckhoff
 Central Bureau for Nuclear
 Measurements, Joint
 Research Centre,
 Steenweg op Retie,
 2440 Geel, BELGIUM

C12.5 International Conference on Nucleus — Nucleus Collision.

East Lansing, USA
 September 27—October 1, 1982
 "B"

Organizer: Dr. David K. Scott
 National Superconducting
 Cyclotron Laboratory,
 Michigan State University,
 East Lansing, Mich. 48824,
 USA

SOUTH AUSTRALIA 5000

C10 COMMISSION ON SOLID STATE PHYSICS

- C10.1 VII International Conference on Crystal Growth (ICCG—7).
Stuttgart, FRG
September 12—16, 1983
“B”
Organizer: Dr. K. W. Benz
Kristallabor, Physikalisches
Inst. der Univ.,
Pfaffenwaldring 57,
7000 Stuttgart — 80, FRG
- C10.2 Symposium on Mechanical Behaviour of Electromagnetic Solid Continua.
(*Cosponsored with IUTAM*)
Paris, FRANCE
“B”
Organizer: Professor G. A. Maugin
Maitre de Recherche
au CNRS,
Lab. de Mécanique
Théorique,
Univ. Pierre-et-Marie Curie,
Tour 66, Place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05,
FRANCE

C12 COMMISSION ON NUCLEAR PHYSICS

- C12.1 International Conference on Nuclear Physics.
Florence, ITALY
August, 1983
“A”
Organizer: Dr. P. Blasi
Istituto di Fisica, Università
Firenze, Laboratori Nazionali
01
Legnaro, ITALY
- C12.2 Few Body Problems in Physics.
Karlsruhe, FRD
September, 1983
“B”
Organizer: Dr. B. Zeitnitz
Kernforschungszentrum
Karlsruhe,
Institut für Kern- und
Teilchenphysik, Postfach 3640,
7500 Karlsruhe, FRD

C17 COMMISSION ON QUANTUM ELECTRONICS

- C17.1 6th International Conference on Infrared and Millimeter Waves.
Marseille, FRANCE
February, 1983
“B”
Organizer: Professor A. Hadni
Université de Nancy I,
54037 Nancy Cedex,
FRANCE

KÖNYVISMERTETÉS

I. I. Sobelman, L. A. Vainshtein, E. A. Yukov: *Excitation of Atoms and Broadening of Spectral Lines*
Springer Series in Chemical Physics 7, Springer-Verlag, 1981

A kötetet a szerzők I. Sobelman „Atomic Spectra and Radiative Transitions” c. művének folytatásaként írták. Rendszerezve tárgyalják az atomspektrumok gerjesztéséért felelős elemi folyamatokat, valamint a spektrumvonalak kiszélesedésének elméletét. Napjainkban, amikor a lézerek fizikai és meteorológiai alkalmazásai, valamint a plazmafizika, asztrofizika stb. jövőtől a atomspektroszkópia reneszánszát éljük, e könyv időszerűségét aligha kell hangsúlyozni.

A szerzőknek nem volt céljuk átfogó kézikönyvet írni a témáról, helyett megelégszenek a hatáskeresztmetszetek számítására és becslésére vonatkozó leghatásosabb és relatíve egyszerű módszerek ismertetésével. Az alkalmazások többségének igényeit figyelembe véve a tematika ezen korlátozása a könyvnek inkább előnyére vált, mint hátrányára.

A spektrumvonalak kiszélesedésének elméletét igen általános alapokból, nevezetesen a sűrűségmátrixból és a kvantumkinetikai egyenletből kiindulva közelítik meg: ez az általános megközelítési mód több modern alkalmazás szempontjából is fontos, ilyen pl. a nagy felbontású lézerspektroszkópia.

Az 1. fejezetben az atomok és ionok gerjesztéséért és ionizálásáért felelős elemi folyamatokat tárgyalják, valamint ezek relatív szerepét a különféle plazmákban. A 2. fejezetben az atomi ütközések általános elméletét ismertetik, olyan mélységig, amely a különböző közelítő módszerek megfogalmazásához szükséges. A 3. fejezet tartalmazza a hatáskeresztmetszetek számítására és becslésére vonatkozó közelítő módszereket. A 4. fejezet témája: nehéz részecskék ütközése, az 5. fejezetben pedig a gerjesztési kinetika számos problémája került terítékre. A 6. fejezet (több mint 80 oldal) táblázatokat és formulákat tartalmaz az effektív hatáskeresztmetszetek becslésére vonatkozóan. A könyv záró, 7. fejezete foglalkozik a spektrumvonalak kiszélesedésének problémakörével.

Rácz Sándor

S. Grossmann: *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*
B. G. Teibner, Stuttgart, 1981

Idézet a könyv előszavából: „A fizika területén folyó képzés kezdeti időszakának régi problémája, hogy matematikai ismeretek és készségek bizonyos repertoárját igényli. Ez a repertoár viszonylag korlátozott terjedelmű, de részben igen specifikus. És mindenekelőtt: *időben* van rá szükség.”

Az említett matematikai repertoár elég jól körülhatárolható. Magában foglalja a vektoralgebrát, a determinánselméletet és a mátrixszámítás alapjait — tehát a lineáris algebra egy részét —, valamint a többdimenziós integrálok elméletét és a vektoranalízist. És mivel a fizikusképzés fenti problémája világprobléma, tanulságos és célszerű időnként egy pillantást vetni arra, hogyan birkóznak meg ezzel a problémával mások; még akkor is, ha úgy tűnik, hogy a bevezető jellegű matematikai előadásoknak hazai egyetemeinken is kialakulóban vannak a jól bevált módszerekből táplálkozó hagyományai.

S. Grossmann könyve, mely az NSZK-ban immár 3. kiadásban jelent meg, a fentebb részletezett matematikai anyag tudatos didaktikai szempontok következetes végigvételével megírt prezentálása — meglepően kis terjedelemben. A bevezetett matematikai fogalmakat mindig fizikai vagy geometriai szempontok alapján motiválja, hogy azután az illető fejezet végén teljes részletességgel feltárja kapcsolatukat az absztrakt struktúrákkal. (Pl. hogy a vektorok az összeadásra nézve Abel-csoportot alkotnak, vagy szintén a vektoroknál maradva, hogy ezek halmaza az összeadásra, a komplex számmal való szorzásra és a skalársorzatra vonatkozó tulajdonságai alapján az $R^{(n)}$ unitér térrel izo-

morf.) A tételek kimondásánál és a bizonyításnál még ha ezeket a háromdimenziós esetre részletezi is, mindig rámutat, hogyan általánosíthatók az eredmények tetszőleges dimenziósra. A figyelmes olvasó a részletekben is számos, didaktikai szempontból figyelemreméltó újdonságra bukkanhat. A könyv előismeretként csupán az egyváltozós függvények differenciál-számítását tételezi fel, az egyváltozós függvények integrálásával és a többváltozós függvények differenciálszámításával külön fejezetekben foglalkozik.

Az anyag könnyebb megértését és jobb elsajátítását 92 ábra, 102 kidolgozott mintapélda és 201 gyakorló feladat hivatott elősegíteni.

R. S.

**W. K. Bühler: GAUSS — A Biographical Study
Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New-York, 1981.**

Érdekes, élvezetes olvasmány a „matematika fejedelmé”-ről szóló életrajz. Az igényes természettudós matematikai alapkultúráját feltételezve teljes egészében érthető, míg ennek hiányában a Gauss tudományos kutatásait ismertető részek természetesen nemigen követhetők. Szerencsére a szerző nem törekszik teljességre, a nagy tudós életének lényeges mozzanatait törekszik bemutatni. Viszont magánéletének és tudományos kutatásainak, emberi kapcsolatainak, jelentős levelezésének olyan plasztikus képét kapjuk, amelyet a szerző gondosan és sikeresen helyez el az adott kor (Gauss 1777-től 1855-ig élt) életkörülményei közt és világképében. A fizikus számára különösen érdekes lehet, hogy a matematika ezen óriása, aki hírnevét a szabályos 17-szög szerkesztése mellett számelméleti kutatásaival alapozta meg, tudományos érdeklődésének és tevékenységének milyen jelentős részét szentelte az asztronómia, a geodézia és nem utolsósorban a fizika egy-egy konkrét, a kor tudományát élenként izgató problémájának (Gauss működésének szinte teljes ideje alatt a göttingeni obszervatórium vezetője volt). Végül a magyar olvasó bizonyára megnyugvással veszi Bolyai János prioritásának egyértelmű elismerését a nem-euklideszi geometria megteremtésében (a szerző Lobecsevskij munkáit is megfelelően értékeli). Ezzel kapcsolatban kritikus elemzését találjuk Gauss — Bolyai Jánost annyira elkeserítő, de nemcsak vele szemben megnyilvánult — méltánytalanul negatív reakciójának.

Szász Domokos

**W. Zawadzki (ed.): Narrow Gap Semiconductors, Physics and Applications
Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, 1980.**

A kötet a Dél-Franciaországban, Nimes-ben 1979 szeptemberében megrendezett, a keskeny, tiltott sávú félvezetők fizikájával és alkalmazásával foglalkozó Nemzetközi Nyári Iskola anyagát tartalmazza. Harmincegy előadás, 572 oldalon, átfogva gyakorlatilag a téma egészét, a sáv szerkezet kvantummechanikai számítási módszereitől a kristályok növesztéséig és alkalmazásáig. A kötet méltán tekinthető a téma tankönyvének is, tekintettel teljességére és arra a tényre, hogy a szerkesztő külön felkérte az előadókat, lehetőleg írjanak olyan egyszerűen, hogy előadásuk ne csupán az adott szakterületen tevékenykedő kollégáik számára legyen érthető.

S bár a kutatás az utóbbi két évben természetesen minden területen előrehaladt, a kötetben foglaltak még mindig a téma alapvető ismeretanyagához tartoznak.

Az alábbiakban — a rövidség kedvéért a neves előadók nevének elhagyásával — felsoroljuk a kötetben szereplő előadásokat. A következő jelölést fogjuk használni: keskeny tiltott sávú félvezetők = NGS.

Általános bevezetés; Keskeny tiltott sávú félvezetők sáv szerkezete; Zérus gap-ű félvezetők dielektromos anomáliái; Elektron-szórás és klasszikus transzportjelenségek NGS-ben; Fononok NGS-ben; Sávon belüli magnetooptika NGS-ben; Sáv—sáv átmenetek magnetooptikája; Spin-flip Raman-szórás és kapcsolódó $\chi^{(3)}$ nem-linearitások; Szennyezési állapotok erős mágneses térben; Landau-emisszió félvezetőkben; A Shubnikov-De Haas effektus és a mágneses „befagyás”; A kadmiumarzenid elektromos tulajdonságai; Kvantum-transzport NGS-ben; Félvezetők nagy-terű mágneses ellenállásának néhány kérdéséről; Keskeny tiltott sávú félvezetők; NGS mágneses tulajdonságai; Elektron Raman-szórás NGS-ben; InAs-GaSb szuperrácsok — szintetikus NGS és félfémek; A gap-nélküli félvezetők szennyezési állapotairól; Rezonáns állapotok félvezetőkben.

A Slater-Koster modell néhány alkalmazása; A mechanikai deformáció hatásai NGS-re; Forró elektronok NGS-ben; Fotogalvanikus effektusok nem-centroszimmetrikus félvezetőkben; Hiba-helyek IV—VI típusú vegyületekben; A IV—VI típusú vegyületek magnetooptikai tulajdonságai; Magnetoplasma-hullámok félvezetőkben; Fázisátalakulások IV—VI vegyületekben; NGS elektron-alsávjai; Felületi töltésrétegek; Keskeny tiltott sávú félvezető kristályok növesztése. Elmélet és technikák; Detektorok és lézerek NGS-ből.

R. S.

D. C. Mattis: The Theory of Magnetism I (Statics and Dynamics)
Springer Series in Solid State Sciences 17

A szilárdtest tudományok fejlődése és műszaki alkalmazásainak terebélyesedése során a mágneses jelenségek kutatása és alkalmazása általában bizonyos elkülönültségben, szinte független tudományágként haladt a maga útján. Ez az elkülönültség különösen a műszaki alkalmazások területén szembetűnő, eltekintve a mágneses buborékmemóriák és egyéb szilárd test — elsősorban félvezető — eszközök mikroelektronikai technológiáinak hasonlóságaitól. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy az anyag elemi alkotórészeinek perdületével (spinjével) kapcsolatos sajátos mágneses jelenségek és kölcsönhatások megismerése mindig ösztönzőleg hatott a szilárdtest-fizika elméleti alapjainak a fejlődésére, a kristályos állapot szimmetriáitól a kollektív elemi gerjesztéseken át a kritikus jelenségekig, csak néhány jellegzetes példát említve.

Daniel C. Mattis könyve — amely a másfél évtizeddel korábban megjelent azonos című könyv lényegesen kibővített és naprakésszé szerkesztett kétkötetes változata — az elméleti fizika egységes szemléletmódját szem előtt tartva a mágnesség elméletének alapjait tárgyalja. Az itt szóbanforgó első kötet a mágneses jelenségek koherens elméletének felépítéséhez szükséges alapfogalmakkal és kvantummechanikai módszerekkel foglalkozik. A szilárdtestfizika és általában az elméleti fizika szélesebb horizontú tárgykörével fennálló kölcsönösen gyümölcsöző kapcsolatok kérdéseiről, elsősorban a fázisátalakulásokról és a kritikus jelenségekről fog szólni a könyv második kötete, Termodinamika és Statisztikus Mechanika alcímmel.

Az első kötet első fejezete a mágnesség történetének ebben a műfajban szokatlanul kiterjedt, éppen ezért rendkívül érdekfeszítő és átfogó, a legújabb irányzatok kialakulását is magában foglaló áttekintését nyújtja. Az 1965-ös kiadású kötethez viszonyítva új alfejezetek érintik a mágneses buborékoknak, a membránszerű kétdimenziós mágneses vékonyrétegeknek, a híg mágneses ötvözeteknek és a térelméleti módszereknek az elméleti mágnességtannal való összefüggéseit.

A következő három fejezet az elméleti alapfogalmakat tisztázza. A kicserélődésről írott második fejezet megmutatja, hogy az atomi mágneses momentumok rendeződéséért nem a klasszikus dipól-dipól kölcsönhatás, hanem a Pauli-féle kizárási elv következményeként adódó kvantummechanikai eredetű kicserélődési kölcsönhatás felelős. Az atomi mágneses momentum az impulzusmomentummal arányos mennyiség, természetes tehát, hogy a harmadik fejezet az impulzusmomentum kvantumelméletét tárgyalja, és megmutatja, hogy a spin operátorok hogyan fejezhetők ki az egyszerű fermion és bozon operátorok segítségével. A negyedik fejezet a sok-elektron hullámfüggvények konstrukciójával és a Slater-determinánsok hasznos tulajdonságaival foglalkozik általában és konkrét esetekben, a második kvantálás ismertetésével bevezetve a kollektív elemi gerjesztések tárgyalásának elvi alapjait is.

Az ötödik fejezetben kerülnek sorra a kölcsönható spinrendszerek dinamikus elemi gerjesztései. A magnonok vagy spinhullámok, a mágneses alapállapot kis amplitúdójú, harmonikus oszcillátor-szerű gerjesztései a ferromágnesekben és az antiferromágnesség egydimenziós modellje esetén a szóráselmélet lineáris közelítésében egzaktul kezelhetők. A több magnonos kötött és szórási állapotok elmélete a spinrendszer inherens nem-lineáris jellege miatt a teljes soktest-probléma megoldásának technikai nehézségeivel kerül szembe. Az előző kiadás megjelenése óta fejlődött ki és új alfejezetekben tárgyalódik a topologikus gerjesztések vagy vortexek, valamint az „elkülönült” hullámok vagy szolitonok elmélete.

A hatodik, utolsó fejezet az eddig említett elméleti módszereket kiterjeszti és alkalmazza a fémek sávszerkezetben kollektivizálódott, lokalizálatlan elektronjainak a vizsgálatára. Kiderül, hogy a kicserélődési típusú Hamilton operátor a sávmélet keretein belül is levezethető és ennek alapján

a fémek mágneses tulajdonságai értelmezhetők. Itt esik szó a fémek mágneses szennyezéseinek lokalizált momentumok tulajdonságairól, az ehhez kapcsolódó Kondo-problémáról és a spinüveg állapotáról.

„A mágnesség elmélete” című könyv közel 300 oldalas első kötetének egyszerű és világos fogalomalkotásra törekvő, elegáns stílusa a hőmérsékleti effektusok hasonlóan világos és elegáns tárgyalását ígéri a második kötetben. Melegen ajánljuk tanulmányozásra a szilárdtestfizika és az elméleti fizika iránt érdeklődő tudományos kutatóknak, egyetemi oktatóknak és hallgatóknak.

Kádár György

Ola Bratelli—Derek W. Robinson: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II.
Springer-Verlag, New-York—Heidelberg—Berlin. 1981. 501 oldal

Az első, előkészítő jellegű kötet folytatása, mint remélhető volt, gyorsan az olvasó kezébe kerülhetett. A kvantum statisztikus fizika operátoralgebrai módszerekkel való kutatásának e két aktív és jól ismert specialistája jóvoltából óriási áttekintéssel igen gondosan megírt monográfiához jutnak a téma iránt érdeklődők.

Jelen, második kötet anyaga két részre oszlik: az első rész a kvantumállapotok értelmezésével foglalkozik, míg a második rész a kvantum statisztikus fizika alapvető modelljeivel ismerteti meg. Az első rész részletesen vizsgálja mindkét lehetséges megközelítést: végtelen modellek esetén az állapotok bevezethetők egyrészt véges modellekből a termodinamikai határátmenet segítségével, másrészt közvetlenül a végtelen modellben a Kubo—Martin—Schwinger-feltétel segítségével. A szerzők kitérnek a két megközelítés kapcsolatára is.

A második rész kvantum spin modellekre és folytonos kvantum rendszerekre vonatkozó eredményeket tárgyal, foglalkozik a modellek létezésének kérdésével, valamint az egyensúlyi állapotok halmazának struktúrájával, és ismerteti a lehetséges dinamikai leírásokat is.

A kétkötetes művet ajánljuk a szigorú matematikai módszerekkel dolgozó — akár kvantum, akár klasszikus — statisztikus fizika iránt érdeklődő elméleti fizikusoknak, matematikusoknak és aspiránsoknak.

Szász Domokos

S. A. Losev: Gázdinamikus lézer
Springer, Chemical Physics 12

Sokkal szerencsésebb lett volna a címben pontosabban megadni a könyv tartalmát. Akkor a: „Gázdinamikus lézerek elmélete” elnevezést kapta volna, s így az olvasónak támpontot nyújtott volna ahhoz, hogy mire számítson. A szerző, — a moszkvai egyetem professzora — a bevezetőben meg is említi, hogy konstruktőröknek nemigen ajánlja munkáját, azok inkább az irodalomjegyzékben válogassanak. A bíráló is ezt teszi, nem mintha pillanatig is kétségbe vonná a lézerfizikában az elméleti munkák jelentőségét — csakhát azok, az esetek nagy részében a gyakorlat után teszik rendbe a dolgokat.

Érdekes határterületen fekszik a gázdinamikus lézerek tudománya. Megértésükhöz, elkészítésükhöz egyaránt szükség van a lézerfizika, fizikai-kémia, gázdinamika ismeretére és nagy tapasztalattal kell rendelkezni a távoli infravörös „fény” tartományában, mivel ezek a lézerek ma még csak ott működnek. Olyan különleges lézerekről van szó e gyűjtőfogalom keretein belül, melyekben a lézerműködéshez szükséges populációinverziót a termikus egyensúlyban levő gáz hirtelen, nem-egyensúlyi lehűtésével állítják elő. Ez a lézertípus az egyik lehetséges megvalósítási formája a romboló lézergyvereknek, mivel több szempontból is kiválóan megfelel a haditechnikai követelményeknek. Ez még nem lenne elegendő indok ahhoz, hogy fényképen vagy sematikus rajzon se nyújtsanak nagyságrendi támogatást az olvasónak. Így aki még nem látott ilyen lézert a gyakorlatban, a könyv elolvasása után sem lesz róla fogalma. A könyv inkább az oktathatóság szempontjait tartotta szem előtt. Így a figyelmes olvasó — ha az Appendix-ek levezetéseit is megtanulja — jelentkezhet egy jelesért egy kb. 2 féléves kurzus anyagából, bár nem biztos, hogy ha elé tesznek két lézert, akkor csalhatatlanul ráfog tudni mutatni a gázdinamikusra.

Horváth Zoltán György

W. Demtröder: Laser Spectroscopy
Springer Series in Chemical Phys. 5

Végre! Végre megjelent egy könyv a lézeres spektroszkópiáról, mely az aminek a címe alapján tarthatjuk. Nem mintha ilyen címmel már nem forgathattunk volna akár a Springertől is könyveket. E régebbiek azonban az azonos című konferenciák absztrakt, vagy meghívott előadás gyűjteményei voltak. A maguk nemében szintén kiváló munkák, csakhát jellegüknél fogva csak a szűk szakközönség rétegeiben lehettek értő olvasóra, mivel a konferenciák szűkre szabott terjedelme mindig csak az újdonságok bemutatására ad lehetőséget, ami a nem beavatott olvasó számára sokszor érthetetlen.

Régen felmerült az igény egy ilyen jellegű, majdnem tankönyvszerű összefoglaló mű megírására. Több újságban folytatásos „regényként” jelentek meg Letohov professzor munkái a lézeres spektroszkópiáról. A terjedelem azonban ott is csak a fő irányzatok vázlatos áttekintésére nyújtott lehetőséget.

Végül is Demtröder professzor vállalta a munkát és véleményünk szerint nagyon fontos kézikönyvet írt. Igaz, kicsit későn, hiszen a lézerek felfedezésekor a lézeres spektroszkópiát tekintették az egyik legfontosabb lézeralkalmazási területnek. A lézerek hihetetlenül nagy spektrális intenzitás-sűrűsége hatalmas lehetőségeket sejtetett. A sejtés be is igazolódott, csakhogy évés közben jön meg az étvágy, így egy idő múlva korlátozó tényezőt jelentett a lézerek spektrumbeli szakaszossága, az, hogy egy-egy lézer csak meghatározott frekvenciákon működött. Az igazi áttörést a hangolható festéklézerek megjelenése jelentette, melyek már tetszőleges hullámhosszon működhetnek a látható és a körüli tartományon, folytonos vagy impulzus üzemmódban és akár extrém keskeny vonal-szélességgel is.

A könyv a Kémiai Fizika sorozatban jelent meg, s ez kicsit befolyásolta szerkezetét, hiszen kémikus olvasókra számítva, viszonylag részletesen foglalkozik a spektroszkópia ismert alapfogalmain és műszerezettségén túlmenően a fénykeltéssel, abszorpcióval, s a könyv alapját szolgáltatató lézerekkel. Persze a nem szakterületen dolgozó fizikusok is élvezettel forgathatják ezeket a lapokat, hiszen a lézerműködést és a lézerek kiviteli formáit egy kicsit a spektroszkópus szemével írja le, ami más, mint a szokásos lézertankönyvek.

Spektroszkópiai szempontokból részletesen foglalkozik a klasszikus spektroszkópia lézerekkel módosított formáival, de a könyvben a hangsúlyt a valóban új, csak lézerekkel elérhető területek kapják. A Doppler szélességnél kisebb felbontású és „leutolsó” eredményként a természetes vonal-szélességnél is finomabb felbontású spektroszkópia. A lézerek viszonylagos nagy intenzitás-sűrűsége a telítési és sokfotonos spektroszkópiát alapozta meg. Külön fejezet foglalkozik a főleg pikoszekundumos lézerekkel elvégzett nagy időfelbontású spektroszkópiai kísérletekkel. A könyv végén néhány szóban összefoglalja a lézeres spektroszkópia gyakorlati felhasználási területeit a fotokémiaától a légszennyezésmérésen keresztül az orvosi, biológiai alkalmazásokig. Kár, hogy ez a fejezet így rövidre sikeredett, aminek nyilván az így is majd 700 oldalas terjedelem az oka.

Külön említést érdemel, hogy az 1981 nyarán kézbe vehető könyv valóban tartalmazza a legújabb eredményeket is 1980-as hivatkozásokkal, ami a szerző és kiadó együttes érdeme.

Horváth Zoltán György

T. Moriya (ed.): Electron Correlation and Magnetism in Narrow-band Systems
Springer Series in Solid State Sciences, Vol. 29. Springer-Verlag, 1981.

A Taniguchi Nemzetközi Szilárdtestelméleti Szimpóziumok keretében tartották meg Japánban 1980 novemberében az „Elektron korreláció keskenysávú rendszerekben” című konferenciát, ami a mai szilárdtestfizika egyik központi kérdésével foglalkozott. A jelen kötet a konferencián elhangzott előadásokat tartalmazza. A konferencián különleges hangsúlyt kapott az átmeneti fémek, ötvözetek és vegyületek ferro- és antiferromágnessége, különös tekintettel az itinerens és a lokalizált leírás közti régi ellentmondásokra, valamint a ritkaföldfém vegyületek valenciafluktuációi.

Az első területen a spinfluktuációk általános elmélete terén elért sikerek jelentős előrelépésre vezettek, bár még mindig akadnak ellentmondások, pl. a rövidtávú rend jelentőségét illetően egy adott, konkrét anyagban és a dinamikus effektusok tárgyalása is távol van a kielégítőtől. Elmondhatjuk, hogy jelenleg a spinsűrűség-fluktuációk elmélete alapján végre van egy egységes, bár elég durva képünk a fémek és szigetelők mágnességéről véges hőmérsékleten, amely magában foglalja a lokalizált momentumos és a gyengén mágneses anyagok határeseteit is. Az utóbbi esetben a spinfluktuációk a reciproktérben vannak lokalizálva és amplitúdójuk kicsi, míg az előbbi esetben a spinfluktuáció a reális térben történik, lokális amplitúdója nagy és hőmérsékletfüggő is lehet. Az elmélet új

fizikai eredményeket szolgáltatott a Curie-hőmérséklet kifejezésére, a Curie—Weiss típusú szuszceptibilitás leírására, a hőmérséklet-indukálta lokalizált momentumok kialakulására stb. Az elmélet statikus jellegéből következnek annak hiányosságai alacsony hőmérsékleten és a kísérleti eredmények kvantitatív leírásához szükséges kvantumeffektusok figyelembevétele. Ez különösen a határesetek közti tartományra, pl. a Ni vagy Fe mágnességére vonatkozik.

A könyv második fejezete a d-fémek és vegyületek alapállapotának sajátjaival foglalkozik, beleértve a nikkel és ötvözeiben a többlesteffektusok esetleges fontosságát, valamint az antiszimmetrikus kicserélődési kölcsönhatás szerepét egyes fémvegyületek hosszuperiódusú helikális spinszerkezetének kialakulásában. A keskenysávú rendszerek különböző elméleti kérdései, mint pl. Stoner és Kondo típusú spinűvek, alacsony dimenziók, korrelációk a Hubbard modellben, képezik a könyv 3. fejezetének tárgyát. A 4. fejezet a kevert valenciaállapotú 4f vegyületekkel foglalkozik, amelyeknél az elektron korrelációs effektusok várhatóan erősebbek, mint az átmeneti fémeknél, és a többlestest problémák már az alapállapotban is jelentkeznek.

A könyv jelentőségét emeli, hogy az adott szimpóziumot a Taniguchi magánalapítvány rendezte 15—20 meghívott, kiemelkedő szakember részére, így az előadások anyaga csak ebben a formában válik hozzáférhetővé az érdeklődők szélesebb köre számára. A könyv ajánlható minden szilárdtest-elméleti fizikusnak és a mágnességgel foglalkozó kutatóknak.

(P. M.)

S. Chikazumi, N. Miura (eds.): *Physics in High Magnetic Fields*
Springer Series in Solid State Sciences, Vol. 24. Springer-Verlag, 1981.

Az elmúlt évtizedben a nagy mágneses terek létrehozásának terén a világ számos jelentős laboratóriumában folyt intenzív munka. Ennek eredményeként a statikus és az impulzusterek technológiájának fejlődése olyan nagy pontosságú mérések elvégzését tette lehetővé, amilyenre eddig nem volt példa. Napjainkra jó néhány laboratóriumban lehet szilárdtestfizikai kísérleteket végezni 20 Tesla meghaladó mágneses terekben, 100 Tesla (megagauss) nagyságrendű impulzusterek is állnak a fizikusok rendelkezésére. A mérés technika gyors fejlődése következtében nagy mennyiségű kísérleti adat gyűlt össze a félvezetők és a mágneses anyagok fizikája területén. A nagy mágneses terek előállításának kérdéseivel és a felgyűlt adatok összegzésével foglalkozott a Hakone-ban (Japán) 1980 szeptemberében tartott nemzetközi konferencia, amely a három würzburgi és az oxfordi konferenciák sorozatát folytatta. A konferencia tárgya „Nagy mágneses terek alkalmazása a félvezetők és a mágneses anyagok fizikájában” volt. A jelen kötet tartalmazza a konferencián elhangzott előadásokat.

A sztatikus mágneses terek előállítása terén áttörést a szupravezető mágnesek megjelenése jelentett, ma Nb_3Sn és V_3Ga anyagból 17,5 Tesla térerejű mágneseket konstruálnak Japánban. De a gyakorlatban mégis a hűtött és hibrid mágnesek terjedtek el, pl. Grenoble-ban 10 MW teljesítményű 14 Tesla terű kriomágneses rendszer működik. Az amerikai Francis Bitter laboratóriumban van a legnagyobb hibrid mágnes, egy 8,5 Tesla, 40 cm üregű szupravezető tekercs és egy 10 MW, 32 mm belső átmérőjű Bitter mágnes kombinációjával 30 T térerősség érhető el. A Nijmegen-i laboratórium célja maximális tér (jelenleg 30,1 T) biztosítása a kutatók részére. Impulzusterek létrehozása sokkal egyszerűbb és olcsóbb, bár a kísérletek elvégzése és interpretálása ilyen körülmények közt nem mindig egyértelmű. Ma már 1 sec hosszú, 50 T amplitúdójú impulzustereket állítanak elő, és jelentős fejlesztő munka folyik a leuveni, az osakai, a tokiói egyetemen, valamint a Los Alamos laboratóriumban.

A nagy mágneses terekben végzett kísérletek egyszerűen kombinálhatók alacsony hőmérsékletekkel vagy nagy nyomással, óriási lehetőségeket nyújtva az anyagok jobb megismerésére. Félvezetők elektronszerkezetének mérésére távoli infravörös spektroszkópiát, ciklotron rezonanciát, optikai gerjesztések, magnetooptikai átmenetek vizsgálatát használják. A nagy terek igen alkalmasak félvezető szennyező állapotok kutatására. A magneto-transzport jelenségek segítenek excitonok, elektron-lyuk csöppek, keskenysávú félvezetők megismerésében. Nagyszámú előadás foglalkozott a tértöltéses rétegek és szuperrácsok elméleti és kísérleti vizsgálatával, Si MOS, MOSFET eszközökben, III—V periodikus rendszerekben, grafit interkalációs vegyületekben csakúgy, mint II—VI szemimágneses félvezetők sáv szerkezetével.

A mágneses jelenségeket két kölcsönhatás — a kicserélődés és a magnetokristályos anizotrópia uralja. Nagy mágneses terekben ezek egyszerűen vizsgálhatók, de a mágnesség alapkérdéseire (itinerens — lokalizált mágnesség, spinhullámok, kristálytér szerepe) is választ kaphatunk, csakúgy, mint a fázisátalakulások és kritikus jelenségek elméleti problémáira.

A könyv hasznos és korszerű információhoz juttatja a szilárdtestfizikusokat, elsősorban a félvezető-kutatás és a mágnesség területén, valamint jó összefoglaló cikkek formájában betekintést nyújt egy olyan, igen széleskörűen alkalmazható kísérleti területre, amelyen sajnos, hazai tapasztalattal nem rendelkezünk.

(P. M.)

D. L. MacAdam: Color Measurement
Springer Series in Optical Sciences. 27. kötet. Springer-Verlag. 1981.

Igaza van a szerzőnek: a szín vonzó és érdekes mindenki számára. Az érdekesség igen sok esetben nincs minden érdekelő nélkül. Gondoljunk csak a hazai mezőgazdaságra, nem elsősorban — a különben egyáltalában nem érdektelen — közvetlen eladási feladatokra, hanem az eltarthatóság feltételének a színnel való összefüggésére. Éppen azért nagyon érdekes kérdés, hogyan lehetne a szubjektív színmegítélést objektív mérésekkel helyettesíteni. A szakértők milliárd dollárokra becsülik azt a veszteséget évenként, amely jelenleg a probléma nem kellő megoldásából származik.

Nem csoda, hogy nemzetközi erőfeszítések kezdődtek a közös nyelv, a közös mérőegységek és módok kialakítására. Az International Commission on Illumination (CIE) 1931-től dolgozik közös módszerek kialakításán. Így született meg a kolorimetria első Handbook of Colorimetry kiadása 1936-ban. Jelen könyv első három fejezete és mind a 4., mind az 5. fejezet első három paragrafusa az előbbi revíziója és rövidített kivonata. Az utóbbi két fejezet többi paragrafusa a Handbook továbbfejlesztése. A további fejezetek a fényforrások és a tárgyak színével foglalkoznak, tárgyalva a természetes és a mesterséges fényforrásokat egyaránt. Ismertetésre kerül a kis színkülönbségek felismerésének a problémája, a színrendszerek kérdése, viszonyuk az Optical Society of Amerika színskálájához, majd számos egészen speciális kolorimetria kérdés, fogalom.

A szerző középiskolai matematikai ismeretekre támaszkodik csupán. Tudatosan kerüli a magasabb matematikai formulákat. Ha utal rájuk, akkor csak fizikai tartalmukat emeli ki. A könyv végén levő „Notes and Sources” tág lehetőséget ad a további szakirodalom, a kérdések részletesebb megismerésére. Ne keressen senki biológiai, orvosi részleteket, mert a szerző meg kívánt maradni az általa is kutatott feladatok körében. Ez azonban nem azt jelenti, hogy munkáját, mint igen alapvető könyvet nem lehet ajánlani az egyes részletkérdésekkel foglalkozók számára.

(T. Gy.)

Evva Ferenc: A fotográfiai rejtett kép
A szilárdtestkutatás újabb eredményei. 8. kötet. Akadémiai Kiadó

A téma aktualitására, sokoldalú vonatkozására jellemző, hogy a könyv megjelenése után különböző foglalkozású kutatók és szakemberek keresték a szerzőt konzultáció érdekében.

A majdnem 400 irodalmi hivatkozás többé-kevésbé egyenletesen oszlik meg az elvi, a „tisztán tudományos” kérdések és a felhasználási folyamatok között. A szerző a könyvecske tanúsága szerint beledolgozta magát mind az elvi, mind a gyakorlati problémák vizsgálatába. Az előbbiekhöz tartozik az ezüstbromid kristálynak, mint félvezetőnek, mint diszlokációkat és illeszkedési hibákat tartalmazó kristálynak, mint felületi tértöltéssel rendelkező kristálynak stb. részletes ismertetése. Ez utóbbi formája arra utal, hogy a szerzőnek érzéke és módja van elméleti kérdéseknek gyakorlati szakemberekkel való megértetésre.

A téma egyik központi kérdése a rejtett kép. A hívási folyamatok számára csak a mikrokristályok felületén keletkező csírák hatásosak. Így gyakorlati szempontból elsőrangú kérdés, hogy milyen tényezők szabják meg a rejtett képnek felületi, ill. a tömbben való elhelyezkedését. Mivel a „felületi” érzékenység tulajdonságai lényegesen eltérnek a „belső” érzékenység tulajdonságaitól, a topográfiai megkülönböztetés igen lényeges. A szerző röviden, a lényegét kiemelve ismerteti az ide vonatkozó kísérleti eljárást is.

Nem könnyű feladat lenne egy ilyen ügyes könyvecske összes értékeit felsorolni. Hasznosítható-nak tartom az egyetemeken mind a vegyész, mind a fizikus oktatásban gyakorlati alkalmazási kérdések, speciális kollégiumok keretében. Az biztos, hogy az ilyen kérdéseknél mindig hangsúlyoznunk kell, hogy a „tudomány mai állása szerint”. Nyilvánvaló, hogy a hazai alkalihalogenid kristálykutatók, a könyvben szereplő témákkal rokon problémákkal foglalkozó vegyészek, fizikusok még sok finomítással tudnák bővíteni az egyes részletkérdéseket.

(T. Gy.)

**Landolt—Börnstein: Numerical Data and Functional Relationship
in Science and Technology**

II. 9. kötet d2 rész, Springer-Verlag, Berlin, 1980

Ez évben jelentette meg a Springer kiadó a közismert és közhasználatú Landolt—Börnstein új sorozat II. 9 kötetének d2 jelzésű befejező részét. Mint már jeleztük (Magy. Fiz. Folyóirat 27, 505, '79) a hatrészes II. 9. kötet az 1965-ben kiadott, a szabad gyökök mágneses tulajdonságait tárgyaló II. 1. kötet kiegészítése. Terjedelmét az elektronspin-rezonancia módszer nagymértékű fejlődése magyarázza és tette szükségessé. Míg az 1. kötet összesen 500 gyök spektrumát ismertette, a kiegészítés mintegy 8000 újabb szabad gyök publikálásáról ad számot (1977-ig bezárólag), felosztva a területet anorganikus gyökök és fémkomplexek (a), organikus C-centrumú (b), N-centrumú és nitrozó gyökök (c1), O—P—S és egyéb centrális atomot tartalmazó organikus gyökök (c2), valamint anion (d1) és kation gyökök tárgyalására. A most megjelent d2 rész 5 szűkebb területre csoportosítja a kation spektrumokon mért adatokat: foglalkozik aromás szénhidrogének, N, O és S hetero atomot tartalmazó vegyületek gyökeivel, valamint bi- és poliradiálakkal: két vagy több párosítatlan elektront tartalmazó nagymolekulákkal, külön fejezetet szentelve a nitrozó biradikáloknak.

A feldolgozás minőségét a legszűkebb részterületek szakértőinek bevonása biztosítja, ilyen átfogásra magánvállalkozásban már nem lehet törekedni (amire volt több példa a szakirodalomban). Az adatok feldolgozása az L. B. sroztatnál megszokott és az elvárásnak megfelelően gondos és alapos: a táblázatok az adott rendszer összeg és szerkezeti képletén kívül feltüntetik a gyök előállításának módját (oldószer, oxidálószer stb.), a mérés körülményeit (hőmérséklet stb.), valamint a modell molekula spin Hamilton operátorában szereplő, kísérletileg mérhető paraméterek értékeit: a g spektroszkópiai hasadási faktort; az a hiperfinom állandót, illetve ezen tenzorok főértékeit; többszörös gyökök esetén a *J* elektron kicserélődési paramétert és a *D* zéró-tér tenzor főértékét; valamint a referátumokat. Külön kitérnek a spektrumok felbontására és szimulálására.

Egyetlen speciális részterület feldolgozását hiányolom: a II. 1. kötet megemlíti a donor-akceptor komplexek vizsgálatát, itt ezen témakör kiegészítése elmaradt, holott a félvezető komplexek finomstruktúrájának mérése is sokat fejlődött a feldolgozott időtartam alatt.

Végezetül a d2 zárókötet tartalmazza az előző 1. és 9. kötetek anyagindexét is, tehát beszerzése az előző kötetek használhatósága miatt is szükséges és célszerű.

G. M.

**Landolt—Börnstein: III. Kristály- és szilárdtestfizika 12b. kötet: Spinelek, vasoxidok,
Fe—Me—O vegyületek**

Minden jelentős műszaki könyvtár polcain ott sorakoznak a Landolt—Börnstein kézikönyvek egyre gyarapodó, bővülő és megújuló kötetei. Az első kiadás 1883-ban jelent meg és a szerény kötet célja az volt, hogy a fizika, fizikai kémia, geofizika, asztrofizika és az ipari kutatás által szolgáltatott összes adatot összefoglalva, egységesen közölje. A cél azóta sem változott, de a hatodik kiadás 1950-ben kezdődött sorozatát már 28 kötet alkotja. 1961 óta a merev formákat felváltotta az „Új sorozat”, amelynek minden egyes köteté önálló és teljes képet ad egy-egy tudományterület kísérleti eredményeiről. 1961 óta 50 kötet jelent meg, melyek közül több egyes megelőző kötetek kiegészítő kötete, vagy javított és bővített új kiadása.

A sorozat III. csoportja a Kristály- és szilárdtestfizika címet viseli. Ennek 12b. kötete az oxid-vegyületek fizikai tulajdonságait tárgyaló 12. kötet része. A 12. kötet viszont a III. csoport 4a és 4b kötetének kiegészítő kötete, amelynek terjedelme jelentősen meghaladja az eredeti kiadást — ezt a szóban forgó anyagok iránt a hetvenes években megélnéknél, a gyakorlati alkalmazás által diktált érdeklődés magyarázza. A feldolgozott anyag érdekessége, hogy az érdeklődés súlypontja az anyagok mágneses tulajdonságairól eltolódott az elektromos, optikai, ill. katalitikus sajátságok felé. Az utóbbi években folyó intenzív technológiai kutatások — amelyek a preparatív módszerek és az anyagok fizikai tulajdonságainak kapcsolatáról adnak kvantitatív képet — jelentős szerepet kaptak ebben a kötetben. Az 1980-ban megjelent kötet legkésőbbi adatai 1978-ban megjelent közleményeken alapulnak.

A sorozat 12a. kötetének első és második fejezete foglalkozik a gránát-, ill. a perovszkit szerkezetű anyagokkal, a 12b. kötet ennek folytatása, a vas-oxidokat, a spineleket és a Fe—Me—O vegyületeket tárgyalja. Az alfejezetek rövid bevezetőben összefoglaló képet adnak a tárgyalta anyagcsoportról, majd közlik a fejezetben használt rövidítések jegyzékét és az alfejezet részletes tartalomjegyzékét. Ezután kerül sor az adott anyagcsoport bemutatására. Az adatok sorát általános jellegű és kristályfizikai információk nyitják meg, majd általában azután következnek a technológiai jellegű

adatok, fázisábrák. Ezt követi a mágneses tulajdonságok ismertetése, mágnesezettség, szuszceptibilitás, anizotrópia, rezonancia, Mössbauer-effektus méréseket bemutató grafikonokkal. A rugalmassági jellemzők ismertetésével, a transzporttulajdonságok leírásával, optikai és magnetooptikai állandók, egyes esetekben mechanikai adatok megadásával teljeseedik ki az adott anyagról alkotott kép. Amennyiben rendelkezésre állnak az adatok, közlik a tulajdonságok összetételtől, hőmérséklettől, nyomástól, mágneses tértől való függését is. Az alfejezetek végén szerepel a téma hivatkozásjegyzéke.

A kötet 3. fejezete tárgyalja a vas-oxidokat, kezdve a wüstittel (Fe_xO) és annak helyettesített változataival, majd az alap kutatás és alkalmazott mágnesség egyik kedvelt anyaga, a hematit ($\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$) és a maghemit ($\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$) kerül sorra.

A vas—fém—oxigén vegyületek közt megtalálhatók a MeFeO_2 vegyületek ($\text{Me} = \text{Li}, \text{Na}, \text{K}, \text{Cu}$), a tiszta és helyettesített $\text{Ca}_2\text{Fe}_2\text{O}_5$, a BaFeO_4 és a SrFeO_4 , a sziderit (FeCO_3), a FeMeO_3 ($\text{Me} = \text{Si}, \text{Ge}, \text{Ti}$), a $\text{Fe}_2\text{Mo}_3\text{O}_8$ és rokonvegyületei. Az elmúlt években jelentek meg a vas bórvegyületeiről szóló, gyakran egymásnak ellentmondó adatokat tartalmazó publikációk. A FeBO_3 , Fe_3BO_6 , $\text{Fe}_3\text{B}_7\text{O}_{13}\text{X}$ ($\text{X} = \text{Cl}, \text{Br}, \text{I}$) típusú vegyületek érdekessége az alacsony hőmérsékleten fellépő egyidejű mágneses és ferroelektromos rendeződés.

A nagy terjedelmű 4.1. alfejezet foglalkozik az iparilag is igen fontos ferrimágneses spinelcsaláddal, amelynek tipikus tagja a $\text{Fe}^{2+}\text{—Fe}^{3+}$ inverz spinel, a magnetit (Fe_3O_4), amelyben a mágneses és elektromos tulajdonságok ugrásszerű változásai az elméleti szilárdtestfizikát is erőfeszítésekre késztették. A magnetitről és helyettesített változatairól igen nagy számú kísérleti adat gyűlt egybe, az ipari szempontból is fontos anyagok mágneses adatai közt természetesen megtalálhatók a domén-szerkezeti, permeabilitás, utóhatás, koercitív erő és veszteségi adatok is. Az alfejezet megadja a Me_2FeO_4 család ($\text{Me} = \text{Ni}, \text{Mn}, \text{Mg}, \text{Zn}, \text{Li}, \text{Cu}, \text{Co}$) tiszta és kevert ferritjeinek adatait.

A 4.2. alfejezet tárgyalja a legérdekesebb mágneses félvezetőket, a krómspineleket. Az ACr_2X_4 ($\text{X} = \text{O}, \text{S}, \text{Se}, \text{Te}$) iránti érdeklődést az 1965-ben felfedezett mágneses — elektromos — és optikai keresztfektusok váltották ki. A fejezetben 677 cikk adatai szerepelnek. A szerkesztők felhívják a figyelmet a mintaelőállításból származó adateltérésekre. A család egyetlen, természetben előforduló tagja a FeCr_2O_4 krómérc, amelyet korrózióálló védőréteggént is használnak. A mesterséges krómspinelek mágneses tulajdonságai az A kationtól függően rendkívül változatosak, mágneses térrel elektromos és optikai tulajdonságaik változtathatók, utat nyitva számos gyakorlati alkalmazás lehetőségének. Az ACr_2O_4 katalitikus tulajdonságai is figyelemre méltóak.

A 4.3. alfejezetben találhatók az eddig ismert többi spinelszerkezetű anyag adatai. A legtöbb adat a MeV_2O_4 ($\text{Me} = \text{Cd}, \text{Mg}, \text{Li}, \text{Mn}, \text{Co}, \text{Fe}, \text{Ni}$) rendszerre vonatkozik, de az ABGeO_4 , MeRh_2O_4 típusú anyagokról is számos adatot találunk. A továbbiakban az Al^{3+} és Ga^{3+} oxid-, szelenid- és szulfidspinelek tulajdonságait veszi sorra a kötet, majd a vasnélküli AB_2O_4 spinelek következnek. A kötetet a ritkaföldfém-tartalmú spinelek zárják.

A könyv használatát megkönnyíti, hogy az egyes fejezetek bevezető részei, a tartalomjegyzékek és egyéb általános információk angol és német nyelven egyaránt szerepelnek. Az eredeti közleményekből átvett ábrák szövegét a szerkesztők annyiban módosították, hogy az az eredeti mű ismerete nélkül is biztosítsa a tájékozódást. Az SI mértékszerre való áttérés folyamata magyarázza, hogy az adatok nagy része (az eredeti forrással megegyezően) CGS egységekben szerepel. Az átszámítást a belső borítón közölt konverziós táblázat könnyíti meg.

A kötet nélkülözhetetlen segédeszköz minden szilárdtestfizikával, anyagtudománnyal, technológiával foglalkozó kutató, fejlesztő és felhasználó szakember számára.

Pardaviné Horváth Márta

J. P. Harnad and S. Shnider (ed.-s): Geometrical and Topological Methods in Gauge Theories
Lecture Notes in Physics 129
Springer-Verlag, Berlin

A kötet a Kanadai Matematikai Társulat 1979. szeptember 3—8. között tartott azonos című nyári iskoláján elhangzott előadásokat tartalmazza. Minthogy mind az előadók, mind a hallgatók aktívan kutató fizikusok voltak, az előadások rendkívül magas szintűek, megértésükhöz a tárgy elemi szintű előzetes ismerete szükséges.

Az utóbbi években a mértékelméletek egyik legtöbbet vizsgált kérdése az ún. instanton megoldások és szerepük a térelmélet funkcionál integrállal történő leírásában. Két előadás (C. Bernard, valamint E. Corrigan és P. Goddard) foglalkozik ezzel a kérdéskörrel; az első főleg az instantonok fizikai vonatkozásait (bezáró fázisátmenet, e^+e^- annihiláció), a második főleg az instantonok kapcsán felmerülő matematikai kérdéseket (ζ függvény regularizálás, index tételek, Green függvények) tárgyalja.

Három előadás (R. Jackiw, L. O'Raifeartaigh, C. Rebbi) vizsgálja különböző szempontokból a mértékelméletek klasszikus megoldásait. Az első a nem-abeli mértékelméletekben források jelenlétében fellépő nem Coulomb-szerű statikus megoldások stabilitását és a fellépő bifurkációt vizsgálja. A második és harmadik előadás tárgya a különböző klasszikus megoldások (monopólusok 3 dimenzióban, illetve vortexek 2 dimenzióban) között fellépő kölcsönhatások analitikus (monopólusok), illetve numerikus (vortexek) leírása.

További két előadás (P. G. O. Freund és A. Trautman) foglalkozik a mértékelméletek „matematikaibb” kérdéseivel. Az első olyan általánosított spin sokaságok leírását adja, melyek akkor is lehetővé teszik belső mértékszimetriával rendelkező globális spinortér definícióját, amikor a topológia kizárja egy közönséges globális spinortér létezését. A második a mértékelméletek fibrált nyaláb leírását tárgyalja.

A meghívott előadások anyagán felül a kötet tartalmazza 10 szemináriumi előadás kivonatát is.

Palla László

**D. F. Gray and J. L. Linsky (ed.-s): Stellar Turbulence
Lecture Notes in Physics 114,
Springer-Verlag; Berlin, Heidelberg, New York, 1980**

A kötet a kanadai Londonban 1979. augusztus 27. és 30. között tartott hasonló című IAU (Nemzetközi Csillagászati Unió) szimpozium előadásait tartalmazza. Négy nagy témakörben összesen 48 előadás hangzott el. Ezek egy részének azonban csak az összefoglalása szerepel a könyvben.

A *turbulencia fizikai eredete* témakörben az asztrofizikai konvekcióval kapcsolatos három cikk szerepel, míg 13 másik előadásnak csak az összefoglalója. Jaan-Paul Zahn a csillagászati konvekció elméletének legfontosabb eredményeit foglalja össze. P. A. Gilman a csillagok differenciális rotációjára és a konvektív zónák kapcsolatát tárgyalja, míg Yoji Osaki a rezgőmozgások keletkezésének problémájával foglalkozik a csillagatmoszférákban.

A *csillagászati turbulencia megfigyelt tulajdonságai* témakörben elhangzott előadások közül külön ki kell emelnünk R. Glebocki és A. Stawikowski összefoglalóját a turbulencia alacsony felbontóképességű technikával történő meghatározásának módjával, valamint D. F. Gray cikkét a nagy felbontóképességű műszerrel készített vonalprofilok analízisééről.

Nagyon érdekes J. Beckers összefoglalása a nem termális mozgások Napon megfigyelhető példairól, amelyet a 89. oldalon egy nagyon érdekes grafikonon is összefoglal. R. Foy cikkében a csillagok légkörében észlelhető mikroturbulenciának a korral való összefüggését elemezi.

A *turbulencia elvi kérdéseiről* szóló fejezetben a turbulencia-elmélet különböző fizikai megközelítéseiről esik szó. G. Traving ismerteti a „Mezoturbulencia” fogalmát és jelentőségét. Ugyancsak a mezoturbulencia alkalmazásairól E. Sedlmayer írt cikket. A fejezetből kiemelkedik R. F. Stein és J. W. Leibacker gondosan megírt és minden fontos részletre kiterjedő cikke a mechanikai energia-transzportról a csillagok légkörében.

A *csillagászati turbulencia néhány hatása* témakörben elhangzott 14 előadás közül csak 2-nek a teljes szövege szerepel a könyvben. Ez a két előadás azonban a témakör két legfontosabb aspektusát tárgyalja. J. Linsky a csillagkromoszférákról ad részletes és kitűnő összefoglalást, majd A. K. Dupree és L. Hartmann a csillagszelekre és a csillagkoronákra vonatkozó kutatásokat foglalja össze.

Külön élmény olvasni a témakör legkiválóbb szaktekintélyének elismert Erika Böhm-Vitenzenek 5 konferencián elhangzott előadásokról szóló összefoglalását.

A könyv egymástól elütő stílusú szerzők cikkeinek gyűjteménye, így semmiképpen sem tankönyv, amelyből a járatlan olvasó megtanulhatja az asztrofizikai turbulencia rejtjelmeit. Tény viszont, hogy a könyvben a témakör minden fontos területéről található cikk, tehát nyugodtan ajánlhatjuk kézikönyv gyanánt is mindazoknak, akik a csillagászati turbulencia alapkérdéseit már nagy vonásokban ismerik.

Dr. Marik Miklós

**B. R. Nag: Electron Transport in Compound Semiconductors
Springer Series in Solid-State Sciences 11,
Springer-Verlag, 1980**

Hézagpótló és a maga nemében ritkaságszámba menő az indiai B. R. Nag könyve, az elektronok transzportelméletéről a félvezető vegyületekben. Olvasásakor nehéz eldöntenünk, hogy világosan és kitűnő stílusban megírt szakmonográfiát, vagy igényes tankönyvet tartunk-e kezünkben. A könyv ugyanis éppúgy tartalmazza a félvezető-fizika hagyományos bevezető fejezeit — kristályrendszerek,

sávmélet, elektronstatisztikák, stb. —, mint a címben jelzett területen folyó elméleti és kísérleti kutatások legfrissebb eredményeinek átfogó és részletes ismertetését. A könyv hézagpótló jellege abban áll, hogy olyan kutatásokról számol be, amelyek eredményeiről eddig csupán az irodalomban szétszórt eredeti publikációkból és konferenciakiadványokból tájékozódhatott az érdeklődő.

A félvezető vegyületekben felfedezett új transzportjelenségek és az ezekre alapozható elektronikus eszközök az utóbbi években nagymértékben megnövekedtek az érdeklődést ezen anyagok iránt. Nagy mennyiségű kísérleti anyag halmozódott fel, különösen a mesterségesen előállított vegyületekkel kapcsolatban. Komoly előrehaladás történt az elmélet terén is, a különböző transzportegyhathatók ma már gyakran elegendő pontossággal kiszámíthatók. Az ezzel kapcsolatos nehézségekért a félvezető vegyületeknek az elektrontranszportban szerepet játszó speciális tulajdonságai felelősek:

a) A gap alacsony értéke miatt nem használható az elektron-hullámfüggvényekre a síkhullámközelítés. Bonyolultabb hullámfüggvényekkel kell számolni és figyelembe kell venni az E-k diszperziós reláció nem-parabolikus jellegét.

b) A félvezető vegyületekben a kémiai kötések részlegesen polarizált kovalens kötések. Az ionitítás miatt a domináns szórásfolyamat a poláros optikai fononokon való szóródás, amelyre nem érvényes a relaxációs idő közelítés.

c) A félvezető vegyületekben az elektronok effektív tömege igen kis érték, s emiatt az állapotsűrűség is kicsi a vezetési sávban. Mivel igen gyakran erősen dotált anyagokról van szó, ez ahhoz vezet, hogy a vezetési sávban levő elektronok degenerált sokaságot alkotnak, s ezért az elméletben degenerált statisztikát kell alkalmazni.

A könyv nemcsak az elért eredményekről, hanem a még megoldatlan problémákról is tájékoztat.

Az első fejezet rövid történeti áttekintés a félvezető vegyületek fizikájáról és az alkalmazásokról. A 2—5. fejezetek tárgya: kristályszerkezet, sávmélet és konkrét sáv szerkezetek, elektronstatisztikák. A szerző súlyt helyez arra, hogy ezen bevezető jellegű témák ismertetésénél is figyelembe vegye az újabb fejlődést, így megtalálhatjuk itt pl. a $k \cdot p$ perturbáció-elméletet és a nem-parabolikus sáv szerkezet és mágneses tér együttes hatására vonatkozó statisztikát.

A szóráselmélettel, a Boltzmann-egyenlettel és megoldási módszereivel foglalkozik a 6. és 7. fejezet, különös tekintettel az utóbbi években kifejlesztett azon módszerekre, melyek a félvezető vegyületek említett sajátosságait hivatottak figyelembe venni. A kiterítő egyenlőáramú transzportegyhathatók — driftmozgékonyosság, Hall-mozgékonyosság, mágneses ellenállás, diffúziós állandó, termoelektromos együthtatók, elektron-hővezetőképesség — számításával foglalkozik a 8. fejezet. Az itt tárgyalt anyag egy jelentős része a szerző még nem publikált saját kutatási eredményein alapul. A 9. fejezet témája: a transzportegyhathatók váltakozó terekben. Részletesen foglalkozik az alacsonyfrekvenciás vezetőképességgel és mágneses vezetőképességgel, a ciklotron-rezonanciával, Faraday-rotációval és a szabad töltéshordozók abszorpciójával.

Az erős mágneses térben fellépő transzportjelenségek különösen érdekesek a félvezető vegyületeknél, ez a tárgya a 10. fejezetnek. A 11. fejezet a „forró”-elektron transzporttal foglalkozik, mégpedig azzal a kettős céllal, hogy mind az e téren végzett korai kutatásokkal, mind az újabb kutatási irányzatokkal megismertesse az olvasót.

A 12. fejezetben áttekintést kapunk a fontosabb félvezető vegyületek tulajdonságairól. Az utolsó, 13. fejezet a jelenleg az érdeklődés homlokterében álló problémákkal foglalkozik, melyek közül megemlítjük a szuperrácsokat és heterostrukturákat, valamint az erősen dotált anyagokat.

A könyvet figyelembe ajánlom mind a téma iránt újonnan érdeklődőknek, mind a terület specialistáinak.

Rácz Sándor

**Ruggero Maria Santilli: Foundation of Theoretical Mechanics I.
(The Inverse Problem in Newtonian Mechanics)
Texts and Monographs in Physics,
Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin, 1978**

Az elméleti mechanika alapjai c. mű első kötete a newtoni mechanika olyan logikai megalapozását tűzi ki célul, amelyben a variációszámítás ún. inverz problémája fontos szerepet játszik. Mint közismert, a newtoni mozgásegyenletek megoldási eljárásaiban, nagyrészt bizonyos kényszerfeladatok célzerű kezelése és a kanonikus perturbáció-számítás megalapozása kapcsán, kiépült a Lagrange—Hamilton-formalizmus. Ez a formalizmus a Hamilton-elvben és a kanonikus egyenletekben tetőzik, ez az az eljárás, amely a kvantummechanikai és kvantumtérelméleti kanonikus formalizmus alkalmazásai miatt háttérbe tolta azt a kérdést — amit pedig a nagy elődök: Jakobi, Helmholtz,

Darboux, Hamel és a magyar Kürschák József is a variációszámítás szempontjából már tanulmányozott —, hogy általában egy tetszőleges mozgásproblémához megadható-e a Lagrange-függvény. Ez az ún. inverz-probléma, ami főleg a nemkonzervatív erők esetében fontos, mert a konzervatív erők modellje csak első közelítés. Az inverz probléma általános tárgyalása mellett, az ehhez szükséges függvénytani és differenciálegyenlet-elméleti apparátus felvonultatása során szerző más kérdésköröket is tanulmányoz, így pl. a szimmetriák és megmaradási tételek, valamint az első integrálok nem-konzervatív rendszerekben. Szerző monográfiája, melyben saját eredményeit is összefoglalja, igényes tankönyvül is szolgálhat. Ez a könyv a fizika e klasszikus ágának a modern problémák bemutatásával újfajta aktualitást ad.

Abonyi Iván

**K. Osterwalder (ed.): Mathematical Problems in Theoretical Physics
Proceedings, Lausanne 1979
Lecture Notes in Physics, vol. 116,
Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 12. oldal**

1979. augusztus 20. és 26. között Lausanneban rendezték meg az immár rendszeressé váló Nemzetközi Matematikai Fizikai Konferenciát (az eddigiek: Moszkva (1972), Varsó (1974), Kyoto (1975), Róma (1977)). 7 témakör köré csoportosították az előadásokat. Ezek közül négyben 2-2 kiemelt, áttekintő előadás hangzott el, és mindegyik témakörben egy-egy jónévvű „felelős” szervezte meg a szekcióülések programját.

A témakörök (zárójelben a kiemelt előadók neve, majd a szekcióülések felelőse és a szekcióban elhangzott előadások száma áll): *Shrödinger operátorok* (Combes, Hunziker; szekció: Simon, 10 előadás), *Statisztikus mechanika* (Lieb, Lanford; szekció: Brezin, 9 előadás), *kvantum-mező-elmélet* (Bros, Jaffe; szekció: Fröhlich, 9 előadás), *gauge-elmélet* (Olive, Singer; szekció: Trautman, 12 előadás), *dinamikus rendszerek* (szekció: Ruelle, 4 előadás), *szuperszimmetria és csoportelmélet* (szekció: Scherk, 3 előadás), *C* algebra* (szekció: Araki, 5 előadás). A kötet a konferencián elhangzott előadások többé-kevésbé teljes szövegét tartalmazza. Az egyébként is sok izgalmas előadás közül kiemelem Sato—Jimbo—Miwa eredményét a differenciál egyenletek deformációinak elmélete és a kvantum-mezők kapcsolatáról, amivel bizonyos modellekben (pl. 2 dimenziós Ising modell) az n pont korrelációkat sikerült kiszámolniuk.

Szász Domokos

**A szilárdtestkutatás újabb eredményei 9. kötet: Anyagtudomány és gyakorlat
Akadémiai Kiadó — Budapest 1980**

„A szilárdtestkutatás újabb eredményei” sorozat egyes kötetei általában egy-két monográfiát tartalmaznak, melyek a modern szilárdtestkutatás egy-egy szűkebb területét mutatják be. Kivételt képezett eddig Pál Lénárd akadémikus cikke a szilárdtestkutatás újabb irányzatairól, mely az első kötetben jelent meg, és a harmadik kötet, amely tizenhat beszámoló alapján tükrözi a hazai szilárdtestkutatásoknak 1976-ig elért eredményeit. A jelenlegi 9. kötet megint egy széles területet ölel fel, az anyagtudomány témakörét, a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának, Műszaki Tudományok Osztályának és Kémiai Tudományok Osztályának 1979. évi együttes tudományos ülésén elhangzott előadásokat és az ülésen hozott határozatot tartalmazza.

Mint megnyitójában Beck Mihály akadémikus rámutatott, korunkban nemcsak a tudományok differenciálódása, hanem integrálódása is végbemegy. Az anyagtudomány ennek az integrálódási folyamatnak jellegzetes terméke. Az anyagtudomány szó, az angol material science szavak tükrörfordításából keletkezett, de közérthetősége, szemléletessége miatt hamar beivódott a mindennapi szóhasználatunkba. Prohászka János akadémikus cikkében az anyagtudományoknak a következő meghatározását adja: „Az anyagtudomány célja és feladata, hogy az anyag kémiai összetétele, szerkezete, hőmérséklete, nyomása és tulajdonsága közötti összefüggéseket megállapítsa és a köztük fennálló törvényeket — azok érvényességi határaival együtt — leírja és értelmezze.”

A kötetben az adott tudományterület hazai reprezentásai számolnak be az eredményekről, lehetőségekről és feladatokról. Székely Tamás cikkében az anyagtudománynak elsősorban kémiai oldalát elemzi, válogatási elvként a hazai kutatás eredményeit, a magyar ipar szükségleteit és a nyersanyag-adottságainkból fakadó lehetőségeket választva. Ugyanakkor bemutat néhány reprezentatív külföldi példát, mert „ez adja meg reálisan azt a mércét, amelynek figyelembevételével kell saját eredményeinket elérni”. Témáját a termék előállításánál alkalmazott reakció típusa szerint csoportosítja. Így először a szilárd-szilárd, majd a gáz-szilárd, s végül a folyékony-szilárd folyamatokról szól.

Krén Emil beszámolójában a hazai szilárdtestkutatás egészét tekinti át, tíz akadémiai intézmény és tizenhárom egyetemi kutatóhely leglényegesebb eredményeit foglalja össze. Az eredményeket a „Szilárdtestek kutatása” országos főiránytervében szereplő négy anyagscsoport, a tiszta fémek és ötvözetek, a félvezetők és dielektrikumok, a mágneses anyagok és az optikai anyagok szerint csoportosítja.

A korszerű anyagvizsgáló módszerekkel két cikk foglalkozik. Berényi Dénes akadémikus az ATOMKI-ben kifejlesztett néhány korszerű anyagvizsgáló berendezést, köztük röntgenfluoreszcencia-analitikai berendezést, kvadrupol-tömegspektrométert és elektrosztatikus elektronspektrométert ismertet. Kormány Teréz és Pungor Ernő akadémikus közös cikkükben az elektronikai iparban felhasznált anyagok minősítésével foglalkozik. Kiemelkedő egyik megállapításuk: „Az elektronikai iparban felhasznált anyagok minősítési rendszere nem vásárolható meg licencia vagy know-how formájában. Az adott elektronikai alkatrész termelési folyamatához illesztve viszont még akkor is létre kell hozni, ha az alkalmazott technológia megvásárolt licencia, mert ez alapvető biztosítéka a licencia továbbfejlesztettségének, és meglete jellemzője minden korszerű és gazdaságos terméknek.”

Bartha László a hazai porkohászat anyagtudományi kérdéseivel foglalkozik, és beszámol az Egyesült Izzó és a Műszaki Fizikai Kutató Intézet közös programjáról a fém-porkohászat terén. „A különféle tudományágak közül talán a félvezető anyagok kutatása köszönheti leginkább a mai fejlettségét az anyagtudománynak, és — megfordítva — az anyagtudomány is talán a félvezetők mint tökéletes kristályszerkezetben előállítható modellanyagok révén nyert a legtöbbet” — kezdí cikkét Gyulai József, majd a miniatürizálás követelményeiről, a félvezető kutatás anyagtudományi eszközeiről, a félvezetők tökéletes adalékolásáról és VLSI (Very Large Scale Integration) eredményekről ír.

Voszka Rudolf röviden áttekinti azokat a módszereket, amelyeket hazánkban is alkalmaznak, majd az egykristálynövesztés hazai műhelyeiben elért eredményeket foglalja össze.

Hargittai István cikkében kimutatja, hogy az anyagtudomány gyakorlati feladatainak megoldásában a kémiai szerkezetkutatásnak konkrét feladatai vannak és ugyanakkor ezek, az anyagtudomány alkalmazásából fakadó feladatok a szerkezeti kémia fejlődése szempontjából is a legizgalmasabb problémák közé tartoznak.

A kutatás—fejlesztés—termelés—értékesítés láncban egyik láncszem sem hagyagolható el. Ez tükröződik mindegyik cikkben, így Prohászka János akadémikus és Várhegyi Győző cikkében is. Várhegyi Győző cikkében a világ nyersanyagellátottságáról és a különleges — nagyértékű anyagok korunkban kiemelt szerepéről ír, végül a hazai adottságokat említi meg, és a fejlesztési irány modelljére tesz javaslatot. Prohászka János cikkében többek között az anyagtudomány és az anyagtechnológia kapcsolatáról ír és kimutatja, hogy a „technológia, ..., rendkívül fontos gazdasági tényező, mely minden terméknek a gazdaságosságát jelentős mértékben megszabja. Ugyanaz a termék, mely korszerű, a feltételekhez illeszkedő technológiával gazdaságos, elmaradott, vagy a feltételeket figyelmen kívül hagyó technológiával gazdaságtalan”.

„A szilárdtestkutatás újabb eredményei” 9. kötete minden eddigi kötetnél szélesebb témakört ölel fel és a 3. kötettel egybevetve megmutatja a hazai szilárdtestkutatások terén az elmúlt három-négy évben végbement fejlődést is. Szemléletesen érzékeltetik pl. ezt a fejlődést a tellur-dioxid egykristályokat bemutató fényképek (1. 3. kötet 177. oldalát és a 9. kötet 143. oldalát). Egy későbbi kötetben bizonyára sor kerül a műanyagkutatások terén elért eredmények ismertetésére is.

Befejezésül érdemes idézni a határozati javaslat egyik megállapítását: „a műszaki—gazdasági fejlődés során egyre nagyobb jelentősége van előírt tulajdonságokkal bíró anyagok előállításának. Ennek kapcsán egyre jelentősebbekké válnak a természetben kis mennyiségben előforduló elemek is. E folyamat eredményeként a «nyersanyag» fogalmát át kell értékelnünk. Az anyagtudomány a hazai anyagbázisra támaszkodva az átlagosnál jóval nagyobb értékű anyagok, termékek előállítását teszi lehetővé. Az anyagtudomány és anyagtechnológia teremti meg a legdinamikusabban fejlődő iparágak anyagellátási hátterét is.”

Hartmann Ervin

**J. Ehlers, K. Hepp, R. Kippenhahn, H. A. Heidenmüller, J. Zittartz (ed.-s): Neutron Spin Echo
Lecture Notes in Physics. 128. k.
Springer-Verlag, Berlin, 1980.**

A neutron spin echo módszere lassú neutronok szóródásakor fellépő igen kis sebességváltozásainak kimutatását teszi lehetővé, gyakorlatilag függetlenül a szóródás előtti neutronnyaláb sebességszórásától. Az ötlet megszületése és első demonstrációja a Központi Fizikai Kutatóintézetben 1972-ben történt. Az első ezen az elven működő spektrométer a Grenoble-i Laue-Langevin Intézet-

ben épült és ott működő nagyfluxusú reaktornál került felállításra. Az utóbbi két évben már értékes kísérleti eredmények születtek a spektrométeren.

A neutron spin echo módszernek szentelt első munkaértekezlet 1979 októberében zajlott le a Laue- Langevin Intézetben Mezei Ferenc, a KFKI és az ILL munkatársa rendezésében, akinek a nevéhez a módszer felfedezése és megvalósítása fűződik. Ennek a munkaértekezletnek az anyagát tartalmazza a könyv, melyet a Springer Verlag jelentetett meg 1980-ban.

Részletes ismertetést kapunk mindenekelőtt a neutron spin echo elvéről és az ILL-ben működő spektrométer felépítéséről.

A következő fejezetben a munkaértekezlet időpontjára a szilárdtestfizika, folyadékfizika és biológia területén elvégzett kísérletek leírását találjuk meg.

Ezután a módszer továbbfejlesztésével kapcsolatos újabb elképzelésekkel és néhány további mérési lehetőséggel ismerkedhetünk meg.

Hasznos a kötet végén található, az előzményeket ismertető cikkekből álló gyűjtemény.

Noha az összeállítás elsősorban a neutron spin echo módszert felhasználni akaró kutatók számára nyújt segítséget, minden, az új lehetőség iránt érdeklődő fizikus számára is érdekes és hasznos olvasmányt jelent.

Króó Norbert

M. Boiti, F. Pempinelli, G. Soliani (ed.-s): Nonlinear evolution equations and dynamical systems
Springer Lecture Notes in Physics 120

A kötet a Leccai Egyetemen (Olaszország) 1979. június 20—23 között hasonló címmel megrendezett konferencián elhangzott előadásokat tartalmazza. A konferencia célja a nemlineáris (evolúciós) egyenletek tanulmányozásában, valamint ezek fizikai alkalmazásában elért újabb eredmények áttekintése és összefoglalása volt.

Ennek megfelelően a kötetben szereplő 18 dolgozat igen széles témakört fog át, az érintett témák a Riemann—Hilbert probléma és az inverz szórási módszer között fennálló kapcsolat főleg matematikai szempontból érdekes tárgyalásától, valamint az inverz szórási módszernek a szám- és approximáció-elméletben történő felhasználásától az erős Langmuir-turbulencia szoliton elméleti leírásáig és a Sine—Gordon egyenlet analitikus megoldásainak a Josephson effektus leírásában játszott szerepének bemutatásáig terjednek. A legtöbb dolgozat (7) az inverz szórási módszer (inverz spektrál transzformáció) matematikájának elméletében és alkalmazásában elért eredményeket tárgyalja, de számos dolgozat (4) foglalkozik a Bäcklund transzformációk és az inverz szórási módszer geometriai vonatkozásaival, kapcsolatba hozva őket a „jet bundle” elmélettel, a szimplektikus Kähler sokaságokkal, illetve bizonyos negatív Gauss görbületű felületekkel. Egy további dolgozat tárgyalja egy Lie algebra duális terének geometriája és bizonyos nem lineáris parciális differenciál-egyenletrendszerek teljes integrálhatósága közötti kapcsolatot.

A kötet legnagyobb részének megértéséhez az egyetemi matematika oktatásban elhangzottakon túlmenő ismeretek nem szükségesek, az ezen túlmenők pedig alapvető differenciálgeometria könyvekből hozzáférhetők. A dolgozatok részleteket is hangsúlyozó stílusa után a bőséges irodalomjegyzék következtében a kötet a témakörbe bevezetőül is szolgálhat.

Palla László

P. W. Hawkes (ed.): Computer Processing of Electron Microscope Images
Topics in Current Physics 13.
Springer-Verlag, 1980

A számítógépes kiértékelés egy ma már elméletileg lezárásához közelgő, az emberi haladás újabb fegyvertényéről számol be ez a könyv. Nyilván elsősorban az elektronmikroszkóppal dolgozó kutatók számára nyújt hasznos ismereteket, de áttanulmányozása tanulságos mások számára is. Ez utóbbiakhoz tartozhatnak más technikai eszközök fogyatékoságának kiküszöbölésén fáradozókon kívül a kutatási eszközöket ismertető oktatók is. Önmagában a könyvben közölt eredményeknek egyszerű, több-kevesebb szakismerettel rendelkező, a tudomány haladása után érdeklődő, az ún. nagyközönség számára is megérthető formában való feldolgozása is érdeklődést keltene.

Alig több, mint egy évtizede kezdődött meg az elektronmikrográfok digitális feldolgozása. Hogy ez a módszer olyan gyors sikereket könyvelhet el, az összefügg annak belátásával, hogy az elektronmikroszkópok képalkotásainak hibái leküzdhetők ugyan, de túl drágán. Kítűnt, hogy a nagy

képmátrixszal manipulálni képes gyors komputerek útján a megoldás megközelíthető. Az első törekvések a felvett elektronmikroszkópos képek háromdimenziós rekonstrukciójára, ill. gyengén szóró példányokra koncentráltak. Erről szól a könyv első fejezete. A második fejezet az 1973-ban R. W. Gerchberg és W. D. Saxton által kidolgozott iterációs algoritmust ismerteti, amely erősen szóró példány esetén megadta az elektronhullám fázisát és amplitúdóját. Ezt követően számos munka foglalkozott az ún. fázisproblémával, azaz az elektronhullám intenzitásából a fáziseloszlás megállapításával, mégpedig abban az esetben, amikor csupán csak az intenzitás az adott.

Az első törekvések erősen szimmetrikus tárgyak rekonstrukcióját, később már az alacsonyabb szimmetriájúakat, majd a kevésbé, ill. egyáltalában nem szimmetrikus háromdimenziós szerkezetű példányok rekonstrukcióját is megkísérelték. Egyes gyakorlati problémák ismertetésére, mint pl. a jel—zaj viszony, egész fejezetet szentel a könyv. Helyet kap benne pl. az elektron holográfia, a scanning transzmissziós elektronmikroszkópiában kialakult kép on-line folyamata stb.

Appendixként szerepelnek 1949-től a nemzetközi és európai elektronmikroszkóp kongresszusok publikációs anyagai.

(T. Gy.)

**Bata Lajos: Folyadékkristályok
A szilárdtestkutatás újabb eredményei. 7. kötet
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980**

Nehéz ilyen könyvről ismertetést írni. Majdnem olyan nehéz, mint amilyen nehéz lehetett Bata Lajosnak ennek a sokoldalú témának közös koncepciót adni. Bata úgy érzi, hogy sok mindenről nem írt. Sokról írt, s amiről írt azt fokozatosan, célszerűen építette fel. Könyve igazi kézikönyv, nagyobb publicitást érdemelne. Javaslom angol nyelven is kiadni. A hazai olvasók széles táborára is számíthat ez a könyv. Az angol nyelvű kiadványt annyiban persze át kellene dolgozni, hogy a hazai vonatkozások kevesebb szerepet kapjanak. Itt helyes, sőt talán egyedül helyes a hazai alkalmazások felemlítése, mert a magyar olvasó megismerheti, hova, kihez kell fordulnia az adott kérdés még részletesebb megismerése érdekében. Bata Lajos akadémiai doktori értekezése Nematikus és szmeztikus-A szerkezetű folyadékkristályok mikrodinamikája címet visel. Úgy gondolom, hogy a Szilárdtestkutatás sorozat el tudná viselni a folyadékkristály-téma folytatását. Olyan kötetre gondolok, amelyben Bata Lajostól, magyar biológiai membránkutatóktól stb. jelennének még Bata alapvető könyve segítségével részleteiben is megérthető fejezetek.

(T. Gy.)

**D. C. Hanna, M. A. Yuratic, D. Cotter:
Nonlinear Optics of Free Atoms and Molecules
Springer-Verlag, 1979**

A lézerek felfedezése óta a nemlineáris optika a fizika klasszikus eredményei modern újrafogalmazási igényének egyik jellegzetes példájává vált. Többször tekintettük már az optikát lezárt tudományágnak, ahol már csak technikai részletkérdések maradtak nyitva, s többször kényszerültünk e nézet megváltoztatására. Ezek az apróbb kimaradt részletkérdések később pl. a kvantummechanika kialakulásához vezettek.

A nemlineáris optikában ilyen mélyenszántó változástól talán nem kell tartani, de pont azzal a határterülettel foglalkozik, ahol az elméleti fizika számítási módszerei közül a legalapvetőbb, a perturbációs számítás kezd érvényét veszteni. A klasszikus optikában megelégedhetünk azzal, hogy az anyagban keltett polarizáció lineárisan függ az őt indukáló elektromágneses tér térerősségétől. Innét a lineáris optika elnevezés. A nemlineáris optikában a polarizáció térerősségfüggésének magasabb rendű tagjait is figyelembe kell venni, sőt esetenként csak ezek dominálnak. Másszóval a perturbációs számításban magasabb közelítésekig kell elmennünk, s időnként azt is figyelembe kell vennünk, hogy a perturbáció erősebb lehet, mint az alapállapot kötése. Ekkor már divergálhat a klasszikus közelítés és teljesen új számítási módszereket kell alkalmaznunk.

Azt a szemléletes képet képzelhetjük a jelenségkör magyarázatára, hogy míg a lineáris optikában a fény csak kevésbé változtatta meg a kölcsönhatás során az anyag tulajdonságait, a nemlineáris optika már olyan fény—anyag kölcsönhatásokkal foglalkozik, ahol a fény maga megváltoztatja az anyag eredeti tulajdonságait s ezzel az „új” anyaggal történő kölcsönhatást vizsgáljuk.

Természetes, hogy a jelenséget csak a nagy fényintenzitásokat szolgáltató lézerek megjelenése után lehetett kísérletileg tanulmányozni. Azóta azonban rohamosan növekszik irodalma.

Igazi összefoglaló mű elég régen (1965) jelent meg e területről. N. Bloembergen: *Nonlinear Optics* (Benjamin, New York). Bloembergen professzor könyve majd minden világnyelven azóta is több bővített kiadást megért, de természetszerűleg nem tartalmazhatta a legújabb eredményeket.

Ezért dicséretes a Springer kiadó vállalkozása, hogy új összefoglaló mű kiadására vállalkozott, mégpedig olyan gyorsasággal, hogy az 1979-ben megjelent könyv azévi (1979-es) eredményeket is tartalmaz.

Tekintettel az összefoglaló modern művek hiányára e témakörben egy kissé megkérdőjelezhető, hogy a szerzők a szabad atomokon és molekulákon végbemenő nemlineáris optikai jelenségekkel foglalkoznak, ami gázok és gőzök nemlineáris optikai tulajdonságait fedi. Így nem kaphatunk képet az utóbbi évek szilárdtesteken és folyadékokon végzett kísérleti és elméleti eredményeiről. Valószínű, hogy a szerzőket az 1965-ben kiadott könyv viszonylagos teljessége, alapvető volta befolyásolta és címválasztásukban, így a könyv tematikájában is, az ismétlések elkerülése miatt attól akarták elhatárolni magukat. Ezt a feltevést látszik alátámasztani az a tény is, hogy a mélyhűtött folyadékokban lezajló folyamatokkal már foglalkoznak — nagyon helyesen —, bár a cím alapján ezt a részt is ki kellett volna hagyniuk. Az olvasó tehát hiányt érezhet, hogy nem kaphat teljes képet összefoglaló mű formájában egyetlen kötetben a nemlineáris optika legújabb eredményeiről.

Elfogadható a szerzők azon, a bevezetőben is megemlített álláspontja, miszerint a kísérleti tevékenység súlya az utóbbi időkben áttevődött a gázokra és gőzökre. Ezt az magyarázza, hogy a szilárd anyagok megfelelő minőségben történő előállításának költségei jelentősen megnöttek és nagy fényintenzitások vissza nem fordítható károsodásokat idéznek elő bennünk. Gyakorlati elterjesztésük így korlátozott, de ma még az sem látszik egyértelműnek, hogy a gázok és gőzök nem laboratóriumi felhasználása jelentős előnyökkel járhat-e, tekintettel arra, hogy sokkal nehezebben kezelhetők.

Az elméletek tisztá felépítésének igénye azonban valóban egyértelműen a számítástechnikailag sokkal egyszerűbben kezelhető atomok és molekulák mellett szól.

A szilárdtestek és légnemű anyagok szembeállításakor utaltunk a gyakorlat igényére, nem véletlenül. A nemlineáris optikai jelenségek egyike legfontosabb alkalmazási területe ugyanis a könyvben kellő súllyal szereplő optikai felharmonikusok, összeg és különbségi frekvenciák generálása, valamint az indukált Raman szórás. Mindezek lehetőséget nyújtanak arra, hogy az esetenként a lézergyak által szigorúan megszabott fényfrekvenciát igényünknek megfelelően megváltoztathassuk mégpedig úgy, hogy eredményül szintén koherens fényt nyerünk. Jelenleg ugyanis csak ez az egyedüli elterjedt lehetőség arra, hogy a távoli ultraibolya és a lágy röntgen tartományban elfogadható koherenciatalajdonságokkal rendelkező fényt nyerjünk második és magasabb felharmonikusok keltésével.

A könyvben találkozhatunk azokkal a sokfotonos folyamatokkal is, melyek az atomok és molekulák nívórendszerében rejlő rezonancia jelenségek kihasználásával a nemlineáris optikai jelenségek hatásfokát nagyságrendekkel tudták megnövelni.

Az elméleti és kísérleti rész érdekesen válik ketté, mivel más-más szerző munkája. A kísérleti rész is tartalmaz bizonyos „leegyszerűsített, a gyakorlat számára praktikusabb formulákat alkalmazó” elméletet. Tipikus példája ennek a második fejezet, mely végtelen síkhullámok terjedését írja le nemlineáris közegben, elegáns, de a gyakorlatban soha meg nem valósítható feltételekkel, így a valóságghú leírást a kísérleteknél találhatjuk.

Jelentős elméleti eredménynek tekinthető, hogy a szerzők megpróbálnak egységes definíciót adni a különböző rendű nemlineáris optikai szuszceptibilitásokra, s mindezt már az új rendnek megfelelő SI rendszerben. Az olvasók segítségére sietnek a régi egységek esetenkénti zárójeles feltüntetésével.

A kísérleti rész részletességét és arányait a szerzők érdeklődésükre úgy látszik, erősebben határozta meg, mint várható tudományos fontosságuk. Ebben a kérdésben azonban nyilván csak évek távlatából visszamenőleg lehet csalhatatlan ítéletet mondani. Csak dicsérettel lehet a szerzőkről szólni, hogy megkíséreltek a lehető legfrissebb eredményekről összefoglaló formában képet adni. Ez a gyorsaság természetesen az egységesség rovására megy, de jó alapját képezheti egy későbbi átdolgozott kiadásnak, addig az idő már kiválogatja a lényegest, az általánost a ma még túl bő teméből.

A bőséget jelzi a több mint 450 hivatkozást tartalmazó irodalomjegyzék. Ebben a magyar recenszenek nemcsak az szembeötlő, hogy a tematikában felvett területeken elért jelentős magyar eredmények a bőség ellenére kimaradtak, hanem az is, hogy a nemlineáris optika alapkísérletének, az optikai felharmonikusok keltés megjósolójának, Neugebauer Tibor professzornak a nevét sem említik meg.

Horváth Zoltán György

R. K. Bullough and P. J. Candrey (ed.-s): Solitons
Spinger-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980

„Ez a legszebb és legkülönösebb jelenség, életem legboldogabb napja volt az a nap, amikor megláttam.” Így írt a „Great Solitary Wave” felfedezője, John S. Russel. A felismerést több mint 100 éves Csipkerózsika-álom követte. A 60-as évektől azonban a szoliton az érdeklődés homlokterébe került. Ekkor sikerült több nemlineáris differenciálegyenletnek pontos, analitikus megoldását adni, amely a nemlineáris fizika forradalmához vezetett, megváltoztatta egy sor fizikai problémáról alkotott képünket. Egyedül a sine-Gordon egyenlet olyan különböző területeken nyert alkalmazást, mint a diszlokációelmélet, a Josephson jelenség, a folyékony ^3He spingerjesztése, az igen rövid fényimpulzusok elmélete, egydimenziós szerves vezetők töltéshullámai stb.

A szolitonról eddig csak eredeti közleményekben, konferenciagyűjteményekben olvashattunk, jelen könyv az első olyan mű, amely a szolitonokat átfogóan tárgyalja. Jó összefoglalást ad azokról, a 70-es évek végéig kidolgozott matematikai módszerekről, amelyek segítségével az integrálható, vagy majdnem integrálható nemlineáris egyenletek megoldhatók. A kötet angol szerkesztőinek sikerült a legkülönösebb szoliton iskolák képviselőit szerzőnek megnyerni, így az egyes fejezeteket szovjet, japán, amerikai, dán és olasz neves kutatók írták. A könyv a Spinger-Verlag „Topics in Current Physics” sorozatának 17. köteteként jelent meg, XVIII+389 lap terjedelmű. Várhatóan hosszú évekre a szolitonok és a nemlineáris hullámok elméletének alapvető kézikönyve lesz.

Janszky József

W. Helfrich, G. Heppke (ed.-s): Liquid Crystals of one- — and two dimensional order
Springer-Verlag, 1980

A könyv, az azonos cím alatt Garmisch-Partenkirchenben 1980 januárjában megtartott folyadékkristály konferencián elhangzott előadásokat ismerteti. Ez a konferencia is beépült a nemzetközi konferenciák sorozatába, melyeket a folyadékkristályok fizikája, kémiája, biológiai vonatkozásai és gyakorlati alkalmazásai terén rendeztek. Ez volt a nyugat-európai országok harmadik konferenciája. A szocialista országok is három konferenciát rendeztek eddig, míg a nagy nemzetközi konferenciák sorozatában tavaly Kiotóban, Japánban tartották a nyolcadikat. A konferenciáknak ez a sorozata tette lehetővé, hogy egy-egy konferencia témakörét leszűkítsék. Ennél a konferenciánál a témákat szmektikus fázis vizsgálatai köré csoportosították. A szmektikus folyadékkristályok réteges szerkezetűek, melyben a molekulák tömegközéppontjai (egydimenziós rendbe) síkokba rendeződve helyezkednek el. Gyakran előfordul, hogy a molekulák tömegközéppontja a síkokon belül is (pl. hexagonálisan) rendeződik. Ekkor kétdimenziós rendezettség valósul meg. Nos, ezekről a szerkezetekről kapta a konferencia a nevét. Szigorúan ezt a megkötést nem sikerült megvalósítaniuk, mert az időközben felmerült újabb problémák és eredmények pl. az újra fellépő (reentrant) nematikusok, a mezomorf polimerek, a koleszterikus „kék fázis” kérdésköre is helyet követelt magának. Így inkább azt mondhatjuk, hogy csak a termotrop nematikus és ezek rendkívül kiterjedt alkalmazási lehetőségeik megvitatásától tekinthettek el.

Nagy figyelmet szenteltek a mono és kettős rétegek kérdésének, a biológiai membránokhoz kapcsolódó kutatásokra is.

A témát a könyv kilenc fejezetre osztva tárgyalja. Ezek a következők:

— Az első a rendezett szmektikus fázisok és szerkezeteik meghatározásának módszerei. Itt tudjuk meg, hogy megegyezés jött létre a két szerkezetmeghatározó csoport között (Halle és Hull) a szerkezetek jelölésében.

— A második, a szmektikus-A és a szmektikus-C fázisok tulajdonságaival foglalkozó fejezetből kiemelhető a nagyfelbontású röntgenszórással foglalkozó cikk.

— A harmadik fejezet a szerkezeti hibák, rugalmassági és áramlástani,

— a negyedik, a speciális fázisátmenetek vizsgálatával foglalkozik. Itt magyarázatot találhatunk az újra megjelenő (reentrant) fázisok szerkezetére.

— A nem nematikus anyagok elektro-optikai alkalmazásaival foglalkozó fejezet a koleszterikus kék fázis, a koleszterikusok és a csavart szmektikus-C alkalmazásait tárgyalja. Itt mutatnak rá az eddig használatnál nagyságrendekkel gyorsabb, azaz mikrosecundumos kapcsolás lehetőségére.

— A folyadékkristályos polimerek közül elsősorban a nematikus polimerekkel foglalkozik a hatodik fejezet.

— A liotrop folyadékkristályokon kiterjedt mérésekről és mágneses térrel végzett orientálásokról számolnak be a hetedik fejezetből.

— A nyolcadik fejezet az elválasztó felületekkel, mono és kettős rétegekkel és biológiai alkalmazásokkal foglalkozik.

— A korong alakú molekulákból felépülő mezofázison végzett méréseket, a szerkezetek osztályozását találhatjuk az utolsó fejezetben.

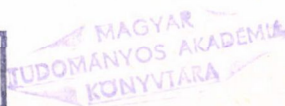
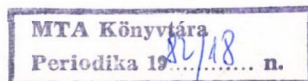
A könyv azok részére jelent érdekes olvasmányt, akik már megfelelő ismeretekkel rendelkeznek a témában. Kezdők számára nehéz anyagnak tűnhet.

Bata Lajos

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Sándor István

A kézirat nyomdába érkezett: 1981. március 15. — Terjedelem: 7,70 (A/5 ív)
81-1064 — Szegedi Nyomda, Szeged — Felelős vezető: Dobó József igazgató



TARTALOMJEGYZÉK

<i>Szabó S. András</i> : Bórmeghatározás prompt neutronaktivációval	487
---	-----

A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

<i>W. Heisenberg és W. Pauli</i> : Hullámmezők kvantumelmélete II.	529
---	-----

A IUPAP HÍREI

List of IUPAP conferences	551
---------------------------------	-----

KÖNYVISMERTETÉS

<i>I. I. Sobelman, L. A. Vainshtein, E. A. Yukov</i> : Excitation of Atoms and Broadening of Spectral Lines	557
<i>S. Grossmann</i> : Mathematischer Einführungskurs für die Physik	557
<i>W. K. Bühler</i> : GAUSS — A Biographical Study	558
<i>W. Zawadzki</i> (ed.): Narrow Gap Semiconductors	558
<i>D. C. Mattis</i> : The Theory of Magnetism I.	559
<i>Ola Bratelli—Derek W. Robinson</i> : Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II. ...	560
<i>S. A. Losev</i> : Gázdinamikus lézer	560
<i>W. Demtröder</i> : Laser Spectroscopy	561
<i>T. Moriya</i> (ed.): Electron Correlation and Magnetism in Narrow-band Systems	561
<i>S. Chikazumi, N. Miura</i> (eds.): Physics in High Magnetic Fields	562
<i>D. L. MacAdam</i> : Color Measurement	563
<i>Evva Ferenc</i> : A fotográfiai rejtett kép	563
<i>Landolt—Börnstein</i> : Numerical Data and Functional Relationship in Science and Technology ..	564
<i>Landolt—Börnstein</i> : III. Kristály- és szilárdtestfizika. 12.b. Spinelek, vasoxidok	564
<i>J. P. Harnad and S. Shnider</i> (ed.-s): Geometrical and Topological Methods in Gauge Theories ..	565
<i>D. F. Gray and J. L. Linsky</i> (ed.-s): Stellar turbulence	566
<i>B. R. Nag</i> : Electron Transport in Compound Semiconductors	566
<i>Ruggero Maria Santilli</i> : Foundations of Theoretical Mechanics I	567
<i>K. Osterwalder</i> (ed.): Mathematical Problems in Theoretical Physics	568
A szilárdtestkutatás újabb eredményei. 9. kötet. Anyagtudomány és gyakorlat	568
<i>J. Ehlers, K. Hepp, R. Kippenhahn, H. A. Heidenmüller, J. Zittartz</i> (ed.-s) Neutron Spin Echo ...	569
<i>M. Boiti, F. Pempinelli, G. Soliani</i> (ed.-s): Nonlinear evolution equations and dynamical systems ..	570
<i>P. W. Hawkes</i> (ed.): Computer Processing of Electron Microscope Images	570
<i>Bata Lajos</i> : Folyadékkristályok. A szilárdtestkutatás újabb eredményei. 7. k.	571
<i>D. C. Hanna, M. A. Yuratch, D. Cotter</i> : Nonlinear Optics of free Atoms and Molecules	571
<i>R. K. Bullough and P. J. Candrey</i> (ed.-s): Solitons	573
<i>W. Helfrich, G. Heppke</i> (ed.-s): Liquid Crystals of one- and two dimensional order	573

A MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT XXVIII. KÖTETE

TÁRGYMUTATÓ

A képlékeny átalakítás vizsgálati módszerei

Szerkesztette: Kovács István

<i>Kovács István</i> : Az egytengelyű nyújtás	3
<i>Rajkovits Zsuzsa</i> : Az összenyomás	15
<i>Tóth László</i> : A csavarás	23
<i>Lendvai János</i> : A kúszás	37
<i>Tasnádi Péter</i> : A feszültségrelaxáció	51
<i>Vörös György</i> : A képlékeny alakváltozás vizsgálata belsőúrlódás-méréssel	75
<i>Ungár Tamás</i> : Alakított fémek vizsgálata röntgen vonalprofil analízissel	85
<i>Juhász András</i> : A keménységmérés	93
<i>Honyek Gyula</i> : A fárasztás	105
<i>Sáray István</i> : A törés vizsgálata	117

— — —

<i>Horváth Péter</i> : Általános mechanikai rendszerek geometriai leírása	127
<i>Sáray István</i> : A ferromágneses doménszerkezet közvetlen megfigyelése Fe—3% Si transzformátorlemezen	181
<i>Lovas Rezső</i> : Nukleon és mag töltéscserélő kölcsönhatása	225
<i>Radnai Tamás</i> : Az alkáli kloridok vizes oldatainak szerkezetvizsgálata röntgendiffrakcióval	339
<i>Tarnóczy Tamás</i> : A Magyar Tudományos Akadémia akusztikai mérőhelyiségeinek műszaki adatai	377
<i>Illényi András és Korpássy Péter</i> : Zavaró visszhangok kiküszöbölése süket szobai méréseknél ...	399
<i>Uchrin János</i> : Nagyfelbontóképességű Ge/Li detektorok kidolgozása s alkalmazásuk gerjesztett magnívók élettartam mérésére Doppler effektus felhasználásával	443
<i>Mészáros Attila</i> : A tardionok és tachionok közötti feltételezett szimmetria következményei	535

A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

<i>P. A. M. Dirac</i> : Sugárzás kibocsátásának és elnyelésének kvantumelmélete	305
<i>P. A. M. Dirac</i> : A diszperzió kvantumelmélete	415
<i>P. Jordan és W. Pauli jr.</i> : A töltésnélküli terek kvantumelektrodinamikája	550

KÖZLEMÉNYEK

<i>Zolnai László</i> : Az MTA Atommagkutató Intézete jubileumi nemzetközi pályázatának eredménye	325
--	-----

KÖNYVISMERTETÉSEK

<i>M. Cardona and L. Ley</i> (ed.): Photoemission in Solids II	327
<i>S. Barisic, A. Bjelis, J. R. Cooper, B. Leontic</i> (ed.): Quasi-one-Dimensional Conductors I—II. ...	327
<i>T. S. Huang</i> (ed.): Picture processing and digital filtering	328

<i>S. Albeverio, Ph. Combe, R. Hoegh-Krohn, G. Rideau, M. Sirugue-Colin, M. Sirugue és R. Stora</i> (ed.): Feynman Path Integrals	328
<i>Ph. A. Martin</i> : Modèles en Mécanique Statistique des Processus Irreversibles	330
<i>A. Martin-Löf</i> : Statistical Mechanics and the Foundations of Thermodynamics	330
<i>W. Walcher</i> : Praktikum der Physik	331
<i>D. Smidt</i> : Reaktor-Sicherheitstechnik	331
<i>S. Villani</i> (ed.): Uranium Enrichment	332
<i>Jan Weiland—Hans Wilhelmsson</i> : Coherent Nonlinear Interaction of Waves in Plasmas	332
<i>J. A. De Santo</i> (ed.): Ocean Acoustics	333
<i>J. M. Blatt és V. P. Weisskopf</i> : Theoretical Nuclear Physics	334
<i>Lane P. Hughston</i> : Twistors and Particles	334
<i>W. Beiglböck</i> (man. ed.): Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems	335
<i>W. Beiglböck, A. Böhm és E. Takasugi</i> (ed.): Group Theoretical Methods in Physics	335
<i>S. Heykin</i> (ed.): Nonlinear Methods of Spectral Analysis	336
<i>B. A. Robson</i> (ed.): Nuclear Interactions	431
<i>H. Arenhövel, D. Rechsel</i> : Nuclear Physics with Elektromagnetic Interactions	432
<i>A. F. Ranada</i> (ed.): Nonlinear Problems in Theoretical Physics	433
<i>T. Tamir</i> (ed.): Integrated Optics	434
<i>A. Weber</i> (ed.): Raman Spectroscopy of Gases and Liquids	434
<i>Jean Cea</i> : Lectures on Optimization—Theory and Algorithmus.	434
<i>B. K. Agarwal</i> : X-Ray Spectroscopy	435
<i>I. I. Sobelman</i> : Atomic Spectra and Radiative Transitions	435
<i>Landolt—Börnstein</i> : Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology ..	436
<i>M. B. Salamon</i> (ed.): Physics of Superionic Conductors	436
<i>Jerzy Kijowski, Włodzimierz M. Tulczyjew</i> : A Symplectic Framework for Field Theories	437
<i>M. D. Scadron</i> : Advanced Quantum Theory and Its Applications Through Feynman Diagrams ..	437
<i>A. J. Chorin, J. E. Marsden</i> : A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics	438
<i>Fazekas Patrik</i> : Antiferromágnesség és szimmetriasértés	438
<i>Watterich Andrea</i> : Ponthibák adalékolt alkálifalogenidekben	438
<i>Gergely György</i> (szerk.) Szilárdtestfelület-vizsgálatok új módszerei I.	439
<i>Gergely György</i> (szerk.) Szilárdtestfelület-vizsgálatok új módszerei II.	440
<i>P. Grosse</i> : Freie Elektronen in Festkörpern	441
<i>F. Rosenberger</i> : A kristálynövesztés alapjai I.	442
<i>M. H. Brodsky</i> (ed.): Amorphous semiconductors	571
<i>P. S. Tehocaris, E. E. Gdoutos</i> : Matrix Theory of Photoelasticity	572
<i>Vladimir M. Fridkin</i> : Photoferroelectrics	572
<i>B. O. Seraphin</i> (ed.): Solar Energy Conversion	573
<i>A. Vértes, L. Korecz, K. Burger</i> : Mössbauer Spectroscopy	573
<i>G. Deconinck</i> : Introduction to Radioanalytical Physics	574
<i>J. D. Lawson</i> : The Physics of Charged—Particle Beams	575
<i>Heinrich Hora</i> : Nonlinear Plasma Dynamics at Laser Irradiation	575
<i>A. A. Oliner</i> (ed.): Acoustic Surface Waves	576
<i>R. Hazalett and D. Turner</i> (ed.): The Einstein Myth and the Ives Papers	577
<i>Hartmut M. Pilkuhn</i> : Relativistic Particle Physics	577
<i>M. Demianski</i> (ed.): Physics of the Expanding Universe	578
<i>Wolfgang Pauli</i> : Wissenschaftliche Briefwechsel mit Bohr, Einstein, Heisenberg u. a. Bd. I.	578
<i>H. Zingl, M. Haftel and H. Zankel</i> (ed.): Few Body Systems and Nuclear Forces II.	579
<i>C. Ciofi degli Atti and E. De Sanctis</i> (ed.): Few Body Systems and Electromagnetic Interactions ..	580
<i>H. Kressel</i> (ed.): Semiconductor Devices for Optical Communication	580
<i>P. Bräunlich</i> : Thermally Stimulated Relaxation in Solids	581
<i>G. Bally</i> (ed.): Holography in Medicine and Biology	581
<i>H. Fiedler</i> (ed.): Structure and Mechanisms of Turbulence	582

A MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT XXVIII. KÖTETE

NÉVMUTATÓ

<i>Dirac P. A. M.</i> : Sugárzás kibocsátásának és elnyelésének kvantumelmélete	305
<i>Dirac P. A. M.</i> : A diszperzió kvantumelmélete	415
<i>Honyek Gyula</i> : A fázisítás	105
<i>Horváthy Péter</i> : Általános mechanikai rendszerek geometriai leírása	127
<i>Illényi András és Korpássy Péter</i> : Zavaró visszhangok kiküszöbölése süket szobai méréseknél ...	399
<i>Jordan P. és Pauli jr. W.</i> : A töltésnélküli terek kvantumdinamikája	550
<i>Juhász András</i> : A keménységmérés	93
<i>Korpássy Péter</i> lásd <i>Illényi András</i>	399
<i>Lendvai János</i> : A kúszás	37
<i>Kovács István</i> : Az egytengelyű nyújtás	3
<i>Lovas Rezső</i> : Nukleon és mag töltéscserélő kölcsönhatása	225
<i>Mészáros Attila</i> : A tardionok és tachionok közötti feltételezett szimmetria következményei	535
<i>Pauli W.</i> lásd <i>Jordan</i>	181
<i>Radnai Tamás</i> : Az alkáli kloridok vizes oldatainak szerkezetvizsgálata röntgendiffrakcióval ...	339
<i>Rajkovits Zsuzsa</i> : Az összenyomás	15
<i>Sáray István</i> : A törés vizsgálata	117
<i>Sáray István</i> : A ferromágneses doménszerkezet közvetlen megfigyelése Fe—3% Si transzformá- torlemezen	181
<i>Tarnóczy Tamás</i> : A Magyar Tudományos Akadémia akusztikai mérőhelyiségeinek műszaki adatai	377
<i>Tasnádi Péter</i> : A feszültségrelaxáció	51
<i>Tóth László</i> : A csavarás	23
<i>Vörös György</i> : A képlékeny alakváltozás vizsgálata belsőúrlódás-méréssel	75
<i>Uchrin János</i> : Nagyfelbontóképességű Ge/Li detektorok kidolgozása s alkalmazásuk gerjesztett magnívók élettartam mérésére Doppler effektus felhasználásával	443
<i>Ungár Tamás</i> : Alakított fémek vizsgálata röntgen vonalprofil analízissel	85
<i>Zolnai László</i> : Az MTA Atommagkutató Intézete jubileumi nemzetközi pályázatának eredménye	325

